JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. LAMÉ

Note sur la méthode de recherche des surfaces isothermes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 515-520.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__515_0>

NOTE

SUR

LA MÉTHODE DE RECHERCHE DES SURFACES ISOTHERMES;

Par M. G. LAMÉ.

(Extrait du *Compte rendu* de la séance de l'Académie des Sciences du 27 novembre 1843.)

Dans mon premier Mémoire sur les surfaces isothermes (tome II de ce Journal), j'ai exposé la méthode analytique qui m'a conduit aux surfaces isothermes et orthogonales du second ordre. Mais cette exposition laisse à désirer sous le rapport de la simplicité; de plus, elle est incomplète, car une trop grande complication dans les calculs m'a fait oublier plusieurs familles isolées de surfaces isothermes. En cherchant à combler cette lacune, que M. Sturm m'a fait apercevoir, je suis parvenu à simplifier assez la méthode dont il s'agit, pour qu'on puisse aborder la recherche des surfaces isothermes d'un ordre plus élevé. Voici comme il convient de présenter l'exemple qui fait l'objet du Mémoire cité.

On se propose de trouver les familles de surfaces isothermes comprises dans l'équation

$$lx^2 + my^2 + nz^2 = 1, \tag{1}$$

laquelle s'étend à toutes les surfaces du second ordre ayant le même centre, et leurs sections principales sur les mêmes plans.

Le problème d'analyse qu'il s'agit de résoudre consiste à regarder les coefficients l, m, n comme des fonctions inconnues d'un paramètre λ, et à déterminer ces fonctions par la condition que le rapport

$$\frac{\dfrac{d^2\lambda}{dx^2} + \dfrac{d^2\lambda}{dy^2} + \dfrac{d^2\lambda}{dz^2}}{\left(\dfrac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{d\lambda}{dz}\right)^2} \tag{2}$$

soit exprimable en λ seul, lorsque, considérant à la fois toutes les surfaces comprises dans l'équation (1), le paramètre λ devient une fonction de x, y, z, donnée par cette même équation.

Désignons par L le premier membre de l'équation (1); posons, pour simplifier,

$$l^2x^2 + m^2y^2 + n^2z^2 = \mathrm{M}; \tag{3}$$

enfin employons une notation connue, en représentant par la même lettre, accentuée une ou deux fois (F′, F″), les dérivées première et seconde de toute fonction (F) de λ, prises par rapport à ce paramètre seul.

On déduit de l'équation (1), par des différentiations successives, et par l'élimination,

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{L}'^2\left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right] = 4\mathrm{M},\\ &\mathrm{L}'^3\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right) = 4\left(\mathrm{M}'\mathrm{L}' - \mathrm{ML}'' - \frac{l+m+n}{2}\mathrm{L}'^2\right); \end{aligned}\right. \tag{4}$$

d'où l'on conclut, pour le rapport (2),

$$\frac{\mathrm{M}'\mathrm{L}' - \mathrm{ML}'' - \frac{l+m+n}{2}\mathrm{L}'^2}{\mathrm{ML}'}.$$

Si donc φ désigne une fonction inconnue de λ seul, on peut égaler ce rapport à $\frac{\varphi'}{\varphi}$, et le problème proposé est réduit à faire en sorte que l'équation

$$\frac{\mathrm{M}'\mathrm{L}' - \mathrm{ML}'' - \frac{l+m+n}{2}\mathrm{L}'^2}{\mathrm{ML}'} = \frac{\varphi'}{\varphi} \tag{5}$$

soit vérifiée en même temps que l'équation (1), ou $\mathrm{L} = 1$.

La question se simplifie encore si l'on élimine l'une des coordonnées, x par exemple, entre les équations (1) et (5). En effet, en posant

$$\left\{\begin{aligned} &l' + (lm' - l'm)y^2 + (ln' - l'n)z^2 = \mathrm{N},\\ &l + m(m - l)y^2 + n(n - l)z^2 = \mathfrak{M}, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

la valeur de x^2, tirée de l'équation (1), donne

$$l\mathrm{L}' = \mathrm{N}, \quad l\mathrm{L}'' = \mathrm{N}', \quad \mathrm{M} = \mathfrak{M}, \quad \mathrm{M}' = \mathfrak{M}' + \mathrm{N},$$

et l'équation (5) devient

$$(7) \qquad \mathfrak{M}'\mathrm{N}\varphi - \mathfrak{M}(\varphi\mathrm{N}' + \varphi'\mathrm{N}) - \frac{m+n-l}{2l}\varphi\mathrm{N}^2 = 0.$$

Or cette équation finale doit être identique, quelles que soient les deux seules variables indépendantes y et z actuellement présentes, sans quoi λ serait indépendant de x, ce qui ne peut être, en vertu de l'équation (1). Donc, pour trouver les familles de surfaces isothermes comprises dans la formule (1), il suffit de chercher les fonctions l, m, n, φ de λ, qui peuvent vérifier l'équation (7), quels que soient y et z.

Le premier membre de l'équation (7) se présente sous la forme d'un polynôme du quatrième degré, à puissances paires de y et de z. Mais, 1°. tous les termes en y^2 et z^2 disparaissent quand on pose

$$(8) \qquad l = m = n;$$

car on en déduit

$$l' = m' = n', \quad l'' = m'' = n'', \quad \mathrm{N} = l', \quad \mathrm{N}' = l'', \quad \mathfrak{M} = l, \quad \mathfrak{M}' = l',$$

et l'équation (7) se réduit à

$$(9) \qquad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{l'}{2l} - \frac{l''}{l'}.$$

Rien n'empêche de prendre $\frac{1}{\lambda^2}$ pour la valeur commune des fonctions (8); les équations (1) et (9) deviennent

$$(10) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2, \quad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{2}{\lambda}, \quad \text{ou} \quad \varphi = \lambda^2,$$

et l'on est conduit à la famille bien connue des sphères concentriques, qui est isotherme, et pour laquelle la température est exprimée par une fonction linéaire de $\int \frac{d\lambda}{\varphi}$, ou de $\frac{1}{\lambda}$.

2°. Le premier membre de l'équation (7) se réduit au second degré quand on pose

$$(11) \qquad \frac{l'}{l} = \frac{m'}{m} = \frac{n'}{n},$$

car N se réduit à l', N′ à l''; mais $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ conservent leurs termes en y^2 et z^2. Les équations (11) donnent, par l'intégration,

$$(12) \qquad l = \alpha\psi, \quad m = \beta\psi, \quad n = \gamma\psi,$$

α, β, γ étant constants, ψ fonction de λ; d'où l'on conclut

$$(13) \qquad \begin{cases} \mathrm{N} = \alpha\psi', & \mathrm{N}' = \alpha\psi'', \\ \mathfrak{M} = \alpha\psi + \psi^2\mathrm{F}, & \mathfrak{M}' = \alpha\psi' + 2\psi\psi'\mathrm{F}, \\ \mathrm{F} = \beta(\beta - \alpha)y^2 + \gamma(\gamma - \alpha)z^2. \end{cases}$$

Toutes ces valeurs, substituées dans l'équation (7), la transforment ainsi :

$$(14) \qquad \left[\frac{\alpha}{\psi} + \beta(\beta - \alpha)y^2 + \gamma(\gamma - \alpha)z^2\right] \frac{d\dfrac{\psi^2}{\varphi\psi'}}{d\lambda} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2\varphi}.$$

Pour que les termes en y^2 et z^2 disparaissent, il faut, ou que $\alpha = \beta = \gamma$, ce qui reproduirait le système des sphères concentriques, ou que

$$(15) \qquad \frac{d\dfrac{\psi^2}{\varphi\psi'}}{d\lambda} = 0, \quad \gamma = -(\alpha + \beta).$$

Rien n'empêche, dans le dernier cas, de prendre $\psi = \frac{1}{\lambda}$, et la première équation (15) conduit à une valeur constante pour φ; l'équation (1) devient

$$(16) \qquad \alpha x^2 + \beta y^2 - (\alpha + \beta) z^2 = \lambda;$$

elle représente alors plusieurs familles d'hyperboloïdes isothermes, sur lesquelles la température est exprimée par une fonction linéaire de $\int \frac{d\lambda}{\varphi}$, ou de λ; ce qui est d'ailleurs évident, puisque la fonction λ (16) satisfait à l'équation

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2} = 0.$$

3°. Enfin, on peut vérifier l'équation (7) sans poser les relations (8) ou (11), c'est-à-dire sans que les termes en y^2 et z^2 disparaissent directement dans $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, N, N'. En effet, comme cette vérification doit avoir lieu quels que soient y et z, on peut supposer ces coordonnées constantes tandis que λ varie, et écrire ainsi l'équation (7) :

$$(17)\qquad \frac{d\,\frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{N}\varphi}}{d\lambda} = \frac{m+n-l}{2l\varphi};$$

alors, si l'on pose

$$\frac{l'}{l} = \frac{lm'-l'm}{m(m-l)} = \frac{ln'-l'n}{n(n-l)},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(18)\qquad \frac{l'}{l} = \frac{m'-l'}{m-l} - \frac{m'}{m} = \frac{n'-l'}{n-l} - \frac{n'}{n},$$

et si ψ est la valeur commune de ces trois quantités, on aura simplement $\frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{N}} = \frac{1}{\psi}$, quels que soient y et z; l'équation (17) deviendra

$$(19)\qquad \frac{d\,\frac{1}{\psi\varphi}}{d\lambda} = \frac{m+n-l}{2l\varphi},$$

et son intégration conduira à la valeur de φ.

Les intégrales des équations (18) peuvent se mettre sous la forme

$$ml = b^2(m-l),\quad nl = c^2(n-l),$$

b et c étant deux constantes, ou sous celle-ci

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{l} - b^2,\quad \frac{1}{n} = \frac{1}{l} - c^2;$$

si l'on prend, ce qui est permis, $l = \frac{1}{\lambda^2}$, on a

$$(20)\qquad l = \frac{1}{\lambda^2},\quad m = \frac{1}{\lambda^2 - b^2},\quad n = \frac{1}{\lambda^2 - c^2},\quad \psi = \frac{l'}{l} = -\frac{2}{\lambda};$$

l'équation (19) devient, toute réduction faite,

$$(21)\qquad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - b^2} + \frac{\lambda}{\lambda^2 - c^2},$$

et donne, par l'intégration,

$$(22)\quad \begin{cases} \varphi = \sqrt{\lambda^2 - b^2}\,\sqrt{\lambda^2 - c^2}, \\ \text{ou}\quad \varphi = \sqrt{\lambda^2 - b^2}\,\sqrt{c^2 - \lambda^2}, \\ \text{ou}\quad \varphi = \sqrt{b^2 - \lambda^2}\,\sqrt{c^2 - \lambda^2}, \end{cases}$$

suivant que λ surpassera c plus grand que b, ou sera compris entre c et b, ou sera moindre que b.

Ces trois cas différents conduisent aux familles connues d'ellipsoïdes et d'hyperboloïdes isothermes, représentées par les équations

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1,\quad \frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{y^2}{\lambda_1^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \lambda_1^2} = 1,\quad \frac{x^2}{\lambda_2^2} - \frac{y^2}{b^2 - \lambda_2^2} - \frac{z^2}{c^2 - \lambda_2^2} = 1,$$

(où $\lambda > c > \lambda_1 > b > \lambda_2 > 0$), et sur lesquelles la température est exprimée par une fonction linéaire de $\int \frac{d\lambda}{\varphi}$, φ ayant l'une des formes (22), ou par l'une des transcendantes

$$\varepsilon = \int_c^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - b^2}\,\sqrt{\lambda^2 - c^2}},\quad \varepsilon_1 = \int_b^{\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 - b^2}\,\sqrt{c^2 - \lambda_1^2}},\quad \varepsilon_2 = \int_0^{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{\sqrt{b^2 - \lambda_2^2}\,\sqrt{c^2 - \lambda_2^2}}.$$

FIN DU HUITIÈME VOLUME.