JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur un théorème d'Abel

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 513-514.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__513_0>

SUR UN THÉORÈME D'ABEL;

PAR J. LIOUVILLE.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie*, tome XVII, séance du 9 octobre 1843.)

Abel a donné à la fin de son Mémoire sur une classe d'équations algébriques (Journal de M. Crelle, tome IV, page 149) un théorème élégant et très-utile que l'on peut énoncer ainsi : « Soit $\chi(x) = 0$ une » équation algébrique quelconque dont toutes les racines s'expriment ra- » tionnellement en fonction d'une seule d'entre elles que nous dési- » gnerons par x; soient $\theta(x)$, $\theta_1(x)$ deux autres racines quelconques; » si l'on a

$$\theta[\theta_1(x)] = \theta_1[\theta(x)],$$

» l'équation proposée sera résoluble par radicaux, en fonction bien » entendu des coefficients $a, b, c, \ldots$, contenus dans $\chi(x)$, $\theta(x)$, etc., » coefficients dont la nature peut être plus ou moins compliquée sui- » vant les cas. » Ce théorème est d'un usage fort commode dans la pratique, ainsi que le prouvent les applications qu'on en a faites à la division du cercle et de la lemniscate. La condition de solubilité qu'il indique étant du reste *suffisante* et non pas *nécessaire*, il est tout naturel qu'on puisse aisément le généraliser, ce qu'Abel sans doute n'a pas voulu faire pour lui conserver mieux son précieux caractère de simplicité. L'énoncé qu'Abel a donné à son théorème suffisait probablement pour le but que l'illustre auteur voulait atteindre. Toutefois il est bon de faire observer que de nouveaux cas de solubilité résultent de sa démonstration même. D'abord il est bien évident que nulle condition n'a besoin d'être imposée aux fonctions θ qui servent à exprimer des racines étrangères à l'équation irréductible dont x dépend et sur laquelle seule reposent les raisonnements d'Abel. Mais, en laissant de côté cette première observation (si vraie qu'elle en devient insignifiante), en admettant que l'équation $\chi(x) = 0$ ait été rendue ou soit d'avance irréductible, on comprendra avec un peu d'attention que le fond de la démonstration d'Abel portant sur des groupes de racines dont on forme des fonctions symétriques plutôt que sur des racines isolées, on peut changer de diverses manières les conditions imposées à celles-ci, sans que la conclusion finale en éprouve la moindre altération. Il sera très-facile de développer cette remarque, et d'obtenir ainsi, par l'analyse même d'Abel, de nouveaux théorèmes analogues au sien.