JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE
JACOBI

Rapport fait à l'Académie des Sciences de l'Institut, au nom d'une Commission composée de MM. Lamé et Liouville, sur un Mémoire de M. Hermite, relatif à la division des fonctions abéliennes ou ultra-elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 502-506.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__502_0>

Rapport fait à l'Académie des Sciences de l'Institut, au nom d'une Commission composée de MM. Lamé *et* Liouville, *sur un Mémoire de* M. Hermite, *relatif à la division des fonctions abéliennes ou ultra-elliptiques;*

Par J. LIOUVILLE.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie*, tome XVII, séance du 14 août 1843.)

« L'Académie nous a chargés, M. Lamé et moi, de lui rendre compte d'un Mémoire relatif à une des parties les plus abstraites de l'analyse, la *division des fonctions abéliennes* ou *ultra-elliptiques*, dont l'auteur, M. Hermite, figure depuis quelques mois seulement parmi les élèves de l'École Polytechnique. C'est avec un vif plaisir que nous venons présenter aujourd'hui les résultats de l'examen auquel nous nous sommes livrés. Peu de mots en effet nous suffiront pour faire comprendre toute l'importance du travail de notre jeune compatriote.

» Les formules fondamentales de trigonométrie, par lesquelles on exprime le sinus et le cosinus de la somme de deux arcs, montrent que le cosinus d'un arc multiple s'obtient rationnellement à l'aide du cosinus de l'arc simple, tandis que la valeur de ce dernier cosinus, en fonction du premier, dépend de la résolution d'une équation algébrique de degré élevé. Le problème de la *multiplication* et celui de la *division* des arcs de cercle diffèrent dont beaucoup entre eux : l'un se résout comme de lui-même; l'autre, au contraire, exige la recherche de quantités irrationnelles, à la vérité toujours exprimables par des radicaux.

» Lorsqu'on passe des fonctions circulaires aux fonctions elliptiques, il arrive semblablement que les problèmes relatifs à la *multiplication* se résolvent de suite par les formules fondamentales, tandis que les problèmes relatifs à la *division* dépendent d'équations algébriques de degré élevé. Ces équations sont à une seule inconnue, comme dans le cas précédent, et elles se résolvent encore à l'aide de radicaux, pourvu que l'on admette les irrationnelles auxiliaires, propres au cas de la fonction complète de première espèce, irrationnelles qui ne dépendent plus de l'argument variable qu'on veut diviser, mais qui ne paraissent pouvoir se réduire à des racines d'équations binômes, que pour certaines valeurs particulières du module.

» Abel a le premier donné la théorie générale de la division des fonctions elliptiques. Les formules assez compliquées qu'il a trouvées d'abord ont été peu de temps après simplifiées par M. Jacobi. Nous devions ici mentionner ce perfectionnement, indiqué en quelques lignes dans le t. III du Journal de M. Crelle, p. 86; car les nouvelles formules de M. Hermite ont beaucoup d'analogie avec celles que M. Jacobi pose sans démonstration dans l'endroit cité.

» La considération des différentielles algébriques, qui renferment un radical carré portant sur un polynôme du troisième ou du quatrième degré, donne naissance aux transcendantes elliptiques. En augmentant le degré du polynôme on est conduit aux transcendantes ultra-elliptiques. Vous pourrez même, si vous voulez, aller plus loin, et substituer aux radicaux carrés des irrationnelles quelconques. Mais l'étude des transcendantes que l'on forme ainsi devient très-difficile. Pour passer de la théorie des fonctions elliptiques à celle des fonctions ultra-elliptiques, les géomètres ont dû vaincre les plus grands obstacles. Ce n'est pas là une de ces généralisations vulgaires où se complaisent les esprits médiocres et que Jean Bernoulli renvoyait dédaigneusement à Varignon. Il a fallu d'abord qu'Abel découvrît le théorème si remarquable sur les sommes d'intégrales; il a fallu surtout que M. Jacobi expliquât le vrai sens de ce théorème, et la différence essentielle de nature qui sépare les transcendantes elliptiques des transcendantes ultra-elliptiques, malgré la communauté apparente de leur origine. Les géomètres philosophes admireront toujours la sagacité déployée par M. Jacobi dans ces recherches délicates et l'art avec lequel il s'est mis au seul point de vue qui pût dominer tout son sujet. Ce grand géomètre a montré que dans le cas, par exemple, d'un polynôme du cinquième ou du sixième degré placé sous un radical carré (ce qui répond aux premières transcendantes ultra-elliptiques), on ne peut plus, comme dans le cas d'un polynôme de degré moindre et des transcendantes elliptiques ordinaires, introduire en analyse de simples fonctions inverses d'une seule variable. Il faut nécessairement recourir à des fonctions de deux variables. Des fonctions de trois et de plus de trois variables sont de même indispensables dans la théorie des autres transcendantes ultra-elliptiques. Idée capitale, entièrement due à M. Jacobi, et sans laquelle le beau théorème d'Abel demeurait en quelque sorte inutile! Sans vouloir rien ôter à l'immortelle réputation du géomètre de Christiania, ne nous sera-t-il pas permis de dire ici que M. Jacobi a fait preuve de modestie lorsqu'il a appliqué aux fonctions de plusieurs variables, introduites par lui en analyse [*], le nom de *fonctions abéliennes?*

» Quoi qu'il en soit, le théorème d'Abel, convenablement interprété, fournit une solution facile du problème de la *multiplication* des arguments par un même nombre entier dans les transcendantes ultra-elliptiques, et prouve que le problème de la *division* dépend de la considération d'*un système d'équations algébriques simultanées*. Or, c'est la résolution générale de ces équations qui fait l'objet du Mémoire de M. Hermite. L'auteur réussit à l'effectuer par des radicaux, en admettant la *division des fonctions complètes* [**]. La méthode dont il se sert repose, en majeure partie, sur la propriété que les fonctions de M. Jacobi ont de se reproduire périodiquement quand les variables qu'elles contiennent augmentent ensemble de certaines quantités. Dans le cas le plus simple, les fonctions dont il s'agit sont à quatre périodes; on voit par là combien elles diffèrent, et des fonctions elliptiques, et de toutes les fonctions à une seule variable, fonctions qui ne peuvent jamais posséder plus de deux périodes distinctes. La considération des périodes conduit immédiatement à l'expression, sous forme transcendante, des racines propres à opérer la *division* des arguments; et M. Hermite en déduit, par une marche élégante, la valeur algébrique de ces mêmes racines. Il entre d'ailleurs dans des détails intéressants sur les irrationnelles auxiliaires relatives à la *division des fonctions complètes*.

» En résumé, ce que l'on savait faire pour les équations à *une seule inconnue* de la théorie des fonctions elliptiques, M. Hermite est parvenu à l'effectuer aussi pour les équations à *plusieurs inconnues* à l'aide des-

---

[*] *Voir* le Journal de M. Crelle, t. IX, p. 394, et t. XIII, p. 55.

[**] C'est ce que M. Jacobi appelle *division des indices*.

quelles on *divise* les fonctions abéliennes produites par l'intégration de radicaux carrés quelconques. C'est ainsi (on nous pardonnera ce rapprochement entre l'ancienne et la nouvelle École Polytechnique), c'est ainsi qu'à son début, Poisson étendit à la détermination du degré de l'équation finale, résultant de l'élimination des inconnues entre un nombre quelconque d'équations, la méthode des fonctions symétriques dont on n'avait d'abord su faire usage que pour deux équations à deux inconnues.

» Vos Commissaires pensent que le Mémoire de M. Hermite est très-digne de l'approbation de l'Académie, et qu'il doit être imprimé dans le Recueil des *Savants étrangers*. »

Les conclusions de ce Rapport ont été adoptées.

Extrait d'une Lettre de M. Jacobi *à* M. Hermite.

« Je vous rends bien sincèrement grâce de la belle et importante communication que vous venez de me faire, par rapport à la division des fonctions abéliennes. Vous vous êtes ouvert, par la découverte de cette division, un vaste champ de recherches et de découvertes nouvelles qui donneront un nouvel essor à l'art analytique. Les maintes difficultés qui se présentent dans cette matière épineuse paraissent naître en grande partie de ce que les fonctions transcendantes que j'ai introduites dans l'analyse des fonctions abéliennes renferment deux variables. Les fonctions à deux variables étant peu traitables par les méthodes connues, je suis bien aise d'y pouvoir faire une sorte de réparation, ayant remarqué que les fonctions transcendantes et à deux variables, que j'ai nommées $\lambda(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$, sont des fonctions algébriques de fonctions transcendantes qui ne renferment qu'une seule variable.

» En effet, soit fx une fonction entière du sixième degré de x; si l'on fait

$$\int \frac{dx}{\sqrt{fx}} + \int \frac{dy}{\sqrt{fy}} = u, \quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{fx}} + \int \frac{y\,dy}{\sqrt{fy}} = v,$$

on aura

$$(\mathrm{A})\quad \begin{cases} \displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{fx}}+\int\frac{dy}{\sqrt{fy}}=\int\frac{dx'}{\sqrt{fx'}}+\int\frac{dy'}{\sqrt{fy'}}+\int\frac{dx''}{\sqrt{fx''}}+\int\frac{dy''}{\sqrt{fy''}},\\ \displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{fx}}+\int\frac{y\,dy}{\sqrt{fy}}=\int\frac{x'dx'}{\sqrt{fx'}}+\int\frac{y'dy'}{\sqrt{fy'}}+\int\frac{x''dx''}{\sqrt{fx''}}+\int\frac{y''dy''}{\sqrt{fy''}}, \end{cases}$$

en déterminant les quatre quantités x', y', x'', y'' au moyen des équations

$$\int\frac{dx'}{\sqrt{fx'}}+\int\frac{dy'}{\sqrt{fy'}}=0,\qquad \int\frac{x'dx'}{\sqrt{fx'}}+\int\frac{y'dy'}{\sqrt{fy'}}=v,$$

$$\int\frac{dx''}{\sqrt{fx''}}+\int\frac{dy''}{\sqrt{fy''}}=u,\qquad \int\frac{x''dx''}{\sqrt{fx''}}+\int\frac{y''dy''}{\sqrt{fy''}}=0.$$

Nommant

$$x=\lambda(u,v),\quad y=\lambda_1(u,v),$$

on aura

$$x'=\lambda(0,v),\quad y'=\lambda_1(0,v),\quad x''=\lambda(u,0),\quad y''=\lambda_1(u,0).$$

Or, d'après le théorème d'Abel, les quantités x et y satisfaisant aux deux équations (A) peuvent être exprimées algébriquement par x', y', x'', y''; donc les transcendantes $\lambda(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$ sont des fonctions algébriques des transcendantes $\lambda(0,v)$, $\lambda_1(0,v)$, $\lambda(u,0)$, $\lambda_1(u,0)$, dont chacune ne renferme qu'une seule variable. »