JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEBESGUE

Théorèmes nouveaux sur l'équation indéterminée $x^5 + y^5 = az^5$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 49-70.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__49_0>

THÉORÈMES NOUVEAUX

SUR L'ÉQUATION INDÉTERMINÉE

$$x^5 + y^5 = az^5;$$

PAR M. LEBESGUE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Si dans cette équation on fait $a = \mathrm{A}\mathrm{B}^5$, B^5 étant la plus grande cinquième puissance qui divise a, on la remplacera, en posant $\mathrm{B}z = u$, par l'équation

$$x^5 + y^5 = \mathrm{A}u^5,$$

où l'on pourra supposer x, y premiers entre eux, et par conséquent à u et à A. Dans cette équation, x est positif, mais y peut être positif ou négatif. Si l'on suppose maintenant A sans diviseur premier de forme $10m + 1$, il paraît probable que l'équation

$$x^7 + y^5 = \mathrm{A}u^5$$

est impossible, ou du moins n'a que les solutions qui se présentent immédiatement; telles sont

$$u = 0, \quad x = -y = 1,$$

et pour $\mathrm{A} = 2$,

$$x = y = u = 1.$$

Voici ce que M. Dirichlet a démontré à cet égard (*Journal de M. Crelle*, tome III, page 354) :

1°. Si A est multiple de 5, et que la plus haute puissance de 5 qui divise A ne soit pas $5^2 = 25$, l'équation est impossible;

2°. Si A n'est pas divisible par 5, et que la division par 25 donne un des restes $\pm\ 3$, $\pm\ 4$, $\pm\ 9$, $\pm\ 12$, l'équation est impossible;

3°. L'équation est impossible pour $A = 1$.

Voici ce que j'ai ajouté aux propositions connues :

1°. L'équation est toujours impossible quand A est divisible par 5;

2°. Si A n'est pas divisible par 5, et que la division par 25 donne un des huit restes $\pm\ 2$, $\pm\ 6$, $\pm\ 8$, $\pm\ 11$, l'équation est impossible.

Le cas de A non divisible par 5, et donnant, quand on le divise par 25, un des restes $\pm\ 1$, $\pm\ 7$, reste à examiner, et ne paraît pas pouvoir se traiter comme les précédents, si ce n'est pour le cas de l'équation

$$x^{10} \pm y^{10} = Az^5,$$

qui est généralement impossible quand A n'a point de facteurs premiers de forme $10m + 1$.

Dans un premier paragraphe je rappellerai diverses propositions connues; dans un second je démontrerai synthétiquement les anciens théorèmes et les nouveaux. Le premier paragraphe indique clairement ce qui m'a guidé dans l'ordre établi entre les diverses propositions du second.

§ I.

Propositions préliminaires.

1°. Si n représente un nombre premier impair, on sait que l'équation

$$x^n + y^n = Az^n$$

se ramène à une équation semblable où x, y, z sont premiers entre eux. (Ici nous supposons x, z positifs; le signe de y est quelconque.) Pour le faire voir, il suffit de remplacer a par Ab^n; A n'étant plus divisible par aucune $n^{ième}$ puissance, on fera $bz = u$, et l'on aura

$$x^n + y^n = Au^n;$$

sous cette forme on voit que le facteur commun à x, u; y, u; x, y disparaît par la division.

2°. On a

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2} y + \dots + y^{n-1}).$$

Si l'on fait $x + y = s$, le second facteur devient

$$\frac{x^n + y^n}{x + y} = \frac{x^n + (s - x)^n}{s} = s^{n-1} - n s^{n-2} x + \dots + n x^n.$$

Sous cette forme on voit de suite que les deux facteurs de $x^n + y^n$, savoir,

$$x + y \quad \text{et} \quad (x^{n-1} - x^{n-2} y + \dots + y^{n-1}),$$

seront premiers entre eux quand $x^n + y^n$ ne sera pas multiple de n; mais que, si cela arrive, ils seront tous les deux divisibles par n, de sorte que $x^n + y^n$ le sera par n^2. De plus

$$x^{n-1} - x^{n-2} y + \dots + y^{n-1}$$

ne sera divisible que par la première puissance de n.

3°. Euler a prouvé (voyez la *Théorie des nombres* de Legendre) que le facteur

$$x^{n-1} - x^{n-2} y + \dots + y^{n-1},$$

nombre essentiellement impair, outre le facteur n, qui peut s'y trouver à la première puissance seulement, n'a que des facteurs premiers de forme $2kn + 1$. On suppose n premier [*].

---

[*] Je remarquerai en passant qu'on déduit de là qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $2kn + 1$. Si, en effet, il n'y en avait qu'un nombre limité $p_1, p_2, \dots, p_k$, le nombre

$$z^{n-1} - z^{n-2} + \dots + z + 1$$

serait divisible par quelqu'un des nombres $p_1, p_2, \dots, p_k$; or si l'on fait

$$z = p_1 p_2 \dots p_k,$$

cette quantité devenant

$$p_1 p_2 \dots p_k Q + 1,$$

ne sera divisible par aucun des nombres $p_1 p_2 p_3 \dots p_k$. Cette proposition est un cas particulier de celle-ci : Toute proposition arithmétique a, $a + b$, $a + 2b, \dots$ (ou bien la formule $a + bx$) renferme une infinité de nombres premiers, quand a est premier à b. (*Voyez* la démonstration de M. Dirichlet, dans ce Journal, tome IV, page 393.)

4°. Donc l'équation

$$x^n + y^n = A z^n,$$

où les inconnues sont premières entre elles, pour le cas de A sans facteur premier de forme $2kn + 1$, se décomposera ainsi, en faisant $z = uv$ (u, v premiers entre eux, le second impair) :

1°. Pour Az^n divisible par n,

$$n(x+y) = Au^n, \quad x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1} = nv^n;$$

2°. Pour Az^n non divisible par n,

$$x + y = Au^n, \quad x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1} = v^n.$$

Par conséquent, si l'on fait $n = 5$, l'équation

$$x^5 + y^5 = A z^5,$$

où les inconnues sont premières entre elles et A sans facteur premier de forme $10k + 1$, se décompose ainsi :

1°. $x^5 + y^5 = Az^5$, Az^5 multiple de 5, $z = uv$, v impair, premier à u,

(A) $5(x+y) = Au^5, \quad x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = 5v^5;$

2°. $x^5 + y^5 = Az^5$, Az^5 non multiple de 5, $z = uv$, v impair, premier à u,

(B) $x + y = Au^5, \quad x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = v^5.$

L'impossibilité de l'équation

$$x^5 + y^5 = A z^5$$

résulte donc de l'impossibilité des systèmes (A), (B). M. Dirichlet a prouvé l'impossibilité du système (A), mais seulement dans le cas de $x + y$ divisible par 25. Il reste à examiner le cas de $x + y$ divisible par 5, sans l'être par 25. Si le système (A) était impossible, dans ce cas il serait prouvé que l'équation

$$x^5 + y^5 = Az^5$$

est impossible toutes les fois que A est divisible par 5, car alors il faut avoir $x + y$ divisible par 5. La démonstration de M. Dirichlet exclut les nombres $A = 25B$, B n'étant pas divisible par 5. Le cas $A = 5B$ (B non divisible par 5) n'est pas exclu, car, comme $5(x+y)$ est divisible par 25, il faut supposer u divisible par 5, d'où $x + y$ divisible par 5^4 au moins. Voici donc le théorème de M. Dirichlet :

« L'équation

$$x^5 + y^5 = Az^5,$$

» où x est premier à y positif ou négatif, et A sans facteur premier
» de forme $10k + 1$, est impossible quand A, multiple de 5, est tel
» que la plus haute puissance de 5 qui divise A n'est pas la seconde. »

Pour la démonstration, telle que l'a donnée M. Dirichlet dans un Mémoire qui devait être inséré dans le *Recueil des Savants étrangers*, et qui a paru, avec un Supplément, dans le tome III du *Journal de M. Crelle*, il faut consulter cet ouvrage. J'ai changé un peu l'énoncé, pour réunir en une seule deux propositions du Mémoire cité.

Une conséquence du théorème précédent, c'est l'impossibilité de

$$x^5 + y^5 = z^5;$$

tout nombre ayant l'une des formes $5a$, $5a \pm 1$, $5a \pm 2$, les cinquièmes puissances auront les formes $25A$, $25A \pm 1$, $25A \pm 7$, d'où il suit qu'une des inconnues x, y, z est divisible par 5; et comme on peut isoler cette inconnue, on aura l'équation impossible

$$x^5 + y^5 = 5^{5a}u^5.$$

Quand A n'est pas divisible par 5, l'équation

$$x^5 + y^5 = Az^5$$

est impossible pour z multiple de 5; ainsi, z n'étant pas multiple de 5, on aura

$$z^5 = 25k \pm 1, \quad \text{ou} \quad 25k \pm 7.$$

De là

$$z^{10} = 25k + 1, \quad \text{ou} \quad 25k - 1.$$

L'équation

$$x^5 + y^5 = Az^5,$$

étant multipliée par z^5, donne donc

$$\pm A = (xz)^5 + (yz)^5 + 25Q.$$

Comme on ne peut supposer $x + y$ multiple de 5, on ne pourra prendre

$$x = 5x' + r, \quad y = 5y' - r \quad (r \text{ étant } \pm 1, \text{ ou } \pm 2);$$

voici donc les seules hypothèses à faire :

1°. x ou y divisible par 5, il en résulte

$$A = 25Q \pm 1, \quad A = 25Q \pm 7;$$

2°. $x = 5k + r$, $y = 5k + r$ (r étant ± 1 ou ± 2); il en résulte $x - y$ divisible par 5 et $\pm A = 2(rz)^5 + 25Q$, d'où

$$A = 25Q \pm 2, \quad A = 25Q \pm 11;$$

3°. $x = 5k \pm 1$, $y = 5k \pm 2$, les signes étant pris comme on voudra; il en résulte $x^2 + y^2$ divisible par 5, et

$$A = 25Q \pm 6, \quad A = 25Q \pm 8.$$

On voit donc que les formes

$$A = 25Q \pm 3, \ \pm 4, \ \pm 9, \ \pm 12$$

ne se présentent point; d'où ce théorème :

« L'équation

$$x^5 + y^5 = Az^5,$$

» où les inconnues x, y sont premières entre elles, A n'ayant aucun
» facteur premier de forme $10k + 1$, est impossible quand A, divisé
» par 25, donne un des huit restes ± 3, ± 4, ± 6, ± 12. »

Ce théorème est de M. Dirichlet, qui l'a démontré de même.

En examinant ces questions, j'ai été porté à penser que les équations

$$(C) \qquad x^4 - xy^3 + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = z^5,$$
$$(D) \qquad x^4 - xy^3 + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = 5z^5,$$

sont impossibles, sauf quelques solutions qui se présentent immédiatement.

Je n'ai pu jusqu'ici prouver cette impossibilité (qui peut-être n'existe que sous certaines conditions). Voici ce que j'ai trouvé pour l'équation (C). Elle peut prendre l'une des formes

$$(x+y)^4 - 5xy(x+y)^2 + 5x^2y^2 = r^5,$$
$$x(x-y)(x^2+y^2) = r^5 - y^4 = 5Q.$$

La première montre que $x + y$ et par suite r n'est pas divisible par 5; la seconde prouve qu'un des trois nombres x, $x - y$, $x^2 + y^2$ est divisible par 5, quand on suppose que y ne l'est pas.

J'ai prouvé l'impossibilité dans les deux derniers cas et j'en ai tiré ces deux théorèmes, qui renferment ceux de M. Dirichlet :

« L'équation

$$x^5 + y^5 = Az^5,$$

» où les inconnues x, y (dont la seconde peut être négative) sont pre-
» mières entre elles, et où A n'a pas de facteur premier de forme
» $10k + 1$, est impossible :

» 1°. Quand A est divisible par 5;

» 2°. Quand A, divisé par 25, donne un des seize restes

$$\pm 2, \ \pm 3, \ \pm 4, \ \pm 6, \ \pm 8, \ \pm 9, \ \pm 11, \ \pm 12. \text{ »}$$

N. B. On voit que le cas des restes ± 1, ± 7 reste à examiner, et que, si l'équation (C) était impossible pour x divisible par 5, on aurait ce théorème plus général :

« L'équation

$$x^5 + y^5 = Az^5$$

» est impossible quand A n'a aucun facteur premier de forme
» $10m + 1$. »

J'emploierai dans mes démonstrations les deux propositions suivantes, qui forment la partie principale du travail de M. Dirichlet :

« I. Les nombres P et Q devant être premiers entre eux, l'un pair, » l'autre impair, et le dernier devant être de plus divisible par 5, je dis » que, pour égaler le binôme $P^2 - 5Q^2$ de la manière la plus générale » à une cinquième puissance, il suffira de poser

$$P + Q\sqrt{5} = (f + g\sqrt{5})^5,$$

» ou

$$P = f(f^4 + 50f^2g^2 + 125g^4), \qquad Q = 5g(f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4);$$

» les indéterminées f et g étant premières entre elles, l'une paire, » l'autre impaire, et la première non divisible par 5. » (Journal de M. Crelle, tome III, page 361.)

« II. Les nombres P et Q devant être premiers entre eux et impairs » l'un et l'autre et le dernier devant être divisible par 5, je dis que, » pour égaler le binôme $P^2 - 5Q^2$ au quadruple d'une cinquième » puissance avec toute la généralité convenable, il suffira de poser

$$16(P + Q\sqrt{5}) = (f + g\sqrt{5})^5,$$

» ou

$$16P = f(f^4 + 50f^2g^2 + 125g^4), \quad 16Q = 5g(f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4);$$

» les nombres indéterminés f et g étant premiers entre eux, impairs » l'un et l'autre, et le premier de plus non divisible par 5. » (Journal de M. Crelle, tome III, page 371.)

J'ajouterai qu'en posant

$$f = u + v, \quad g = u - v,$$

de sorte qu'un des nombres u, v soit pair et l'autre impair, on trouvera

$$P = (u + v)(11u^4 - 31u^3v + 41u^2v^2 - 31uv^3 + 11v^4),$$
$$Q = 5(u - v)(u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4).$$

Cette transformation servira plus loin.

§ II.

Proposition I. L'équation indéterminée

$$a^2 = b^4 + 50b^2c^2 + 125c^4$$

est impossible.

Démonstration. On commence par faire disparaître le facteur θ, commun à b et à c, en remplaçant a par $\frac{a}{\theta^2}$; puisque a^2 se trouve divisible par θ^4, supposons donc de suite b, c premiers entre eux, il en résulte que a et c sont premiers entre eux; autrement b et c auraient un facteur commun. Il en sera de même pour a et b, car si θ était un diviseur premier commun, θ^2 diviserait $125\,c^4$ et par suite 125: donc θ serait 5: mais alors le deuxième membre étant divisible par 5^3 seulement, n'est pas carré. Ainsi a, b, c sont premiers entre eux; a et b sont premiers à 5.

Cela posé, distinguons plusieurs cas :

1°. b pair, c impair, le deuxième membre prenant la forme $8k+5$, l'équation est impossible;

2°. b impair, c pair. On fera $c = 2^i d$, d étant impair, il viendra

$$a^2 = b^4 + 2^{2i+1}25b^2d^2 + 2^{4i}125d^4,$$

ou

$$a^2 = (b^2 + 2^{2i}25d^2)^2 - 2^{4i+2}5^3d^4,$$

ou

$$(b^2 + 2^{2i}25d^2)^2 - a^2 = 2^{4i+2}5^3d^4,$$

ou

$$(b^2 + 2^{2i}25d^2 + a)(b^2 + 2^{2i}25d^2 - a) = 2^{4i+2}5^3d^4.$$

Or a, b sont impairs et premiers à 5; de là résulte que les facteurs

$$b^2 + 2^{2i}25d^2 + a, \quad b^2 + 2^{2i}25d^2 - a,$$

ont 2 pour diviseur commun et n'en ont pas d'autre; on décomposera d en deux facteurs f, g premiers entre eux, et il faudra poser l'une des équations suivantes :

$$b^2 + 2^{2i}25d^2 + a = 2f^4, \quad = 2^{4i+1}5^3g^4, \quad = 2.5^3f^4, \quad = 2^{4i+1}g^4,$$
$$b^2 + 2^{2i}25d^2 - a = 2^{4i+1}5^3g^4, \quad = 2^{2i+1}f^4, \quad = 2^{4i+1}g^4, \quad = 2.5^3 2f^4;$$

les deux derniers donnent par addition, puisque $d = fg$,

$$b^2 = 5^5 f^4 - 2^{2i} 25 f^2 g^2 + 2^{4i} g^4 = 8k + 5, \text{ impossible;}$$

les deux premiers

$$b^2 = f^4 - 2^{2i} 25 f^2 g^2 + 2^{4i} 5^3 g^4 \quad \text{où} \quad i > 1,$$

ou bien

$$(f^2 - 2^{2i-1} 5^2 g^2)^2 - b^2 = 2^{4i-2} 5^3 g^4;$$

et comme

$$f^2 - 2^{2i-1} 5^2 g + b, \quad f^2 - 2^{2i-1} 5^2 g^2 - b,$$

ont 2 pour diviseur commun, on posera, pour $f^2 - 2^{2i-1} 5^2 g$ positif, en faisant $g = hk$,

$$\begin{aligned} f^2 - 2^{2i-1} 5^2 g^2 \pm b &= 2h^4, & &= 2.5^3 h^4, \\ f^2 - 2^{2i-1} 5^2 g^2 \mp b &= 2^{4i-3} 5 k^4, & &= 2^{4i-3} k^4; \end{aligned}$$

pour $f^2 - 2^{2i-1} 5^2 g^2$ négatif, on aura, au contraire,

$$\begin{aligned} 2^{2i-1} 5^2 g^2 - f^2 \pm b &= 2h^4, & &= 2.5^3 h^4, \\ 2^{2i-1} 5^2 g^2 - f^2 \mp b &= 2^{4i-3} 5^3 k^4, & &= 2^{4i-3} k^4; \end{aligned}$$

on a donc, par addition, les quatre équations

$$\begin{aligned} f^2 &= h^4 + 2^{2i-1} 5^2 h^2 k^2 + 2^{4i-4} 5^3 k^4, \\ f^2 &= 5^3 h^4 + 2^{2i-1} 5^2 h^2 k^2 + 2^{4i-4} k^4 = 8k + 5, \\ -f^2 &= h^4 - 2^{2i-1} 5^2 h^2 k^2 + 2^{4i-4} 5^3 k^4 = 8k + 1, \\ -f^2 &= 5^3 h^4 - 2^{2i-1} 5^2 h^2 k^2 + 2^{4i-4} k^4 = 8k + 5; \end{aligned}$$

les trois dernières sont impossibles; la première peut s'écrire

$$f^2 = h^4 + 2^{2(i-1)+1} 5^2 h^2 k^2 + 2^{4(i-1)} 5^3 k^4,$$

qui diffère de

$$a^2 = b^4 + 2^{2i+1} 5^2 b^2 c^2 + 2^{4i} 5^3 b^4$$

par le changement de i en $i - 1$. On finira donc par tomber sur une équation toute semblable à l'équation proposée, où les inconnues du deuxième membre seront impaires.

3°. b, c impairs. L'équation devient alors, à cause de $i = 0$,

$$(b^2 + 5^2 c^2)^2 - a^2 = 4.5^3 c^4,$$

d'où, en faisant $c = df$, on tirera

$$b^2 + 5^2 c^2 \pm a = 2d^4,$$
$$b^2 + 5^2 c^2 \mp a = 2.5^3 f^4,$$

et par suite

$$b^2 = d^4 - 5^2 d^2 f^2 + 5^3 f^4 = 8k + 5, \text{ impossible.}$$

L'équation est donc impossible dans tous les cas. On rejette la solution $c = 0$, $a = b = 1$.

Proposition II. L'équation

$$a^2 = b^4 + 10 b^2 c^2 + 5 c^4$$

se ramène toujours à une équation semblable où b, c sont impairs.

Démonstration. On démontre, comme plus haut, que a, b, c peuvent être considérés comme premiers entre eux, et que a et b sont premiers à 5. L'impossibilité est manifeste pour b pair et c impair; pour c pair $= 2^i d$, d étant impair, on aura, par des décompositions semblables aux précédentes,

$$a^2 = b^4 + 2^{2i+1} 5 b^2 d^2 + 2^{4i} 5 d^4,$$
$$(b^2 + 2^{2i} 5 d^2)^2 - a^2 = 2^{4i+2} 5 d^4;$$

et si l'on fait $d = fg$, f et g premiers entre eux, on aura

$$b^2 + 2^{2i} 5 d^2 \pm a = 2f^4, \qquad = 2.5f^4,$$
$$b^2 + 2^{2i} 5 d^2 \mp a = 2^{4i+1} 5 g^4, \quad = 2^{4i+1} g^4,$$

d'où

$$b^2 = f^4 - 2^{2i} 5 f^2 g^2 + 2^{4i} 5 g^4, \quad i > 1,$$
$$b^2 = 5f^4 - 2^{2i} 5 f^2 g^2 + 2^{4i} g^4, \quad i = 1.$$

Cette dernière équation, multipliée par 4, revient à

$$(8g^2 - 5f^2)^2 - 4b^2 = 5f^4.$$

Soit $f = hk$; il viendra, en supposant successivement $8g^2 - 5f^2$ positif ou négatif,

$$8g^2 - 5f^2 \pm 2b = h^4, \quad 5f^2 - 8g^2 \pm 2b = h^4,$$
$$8g^2 - 5f^2 \mp 2b = 5k^4, \quad 5f^2 - 8g^2 \mp 2b = 5k^4;$$

d'où

$$16g^2 = h^4 + 10h^2k^2 + 5k^4,$$
$$-16g^2 = h^4 - 10h^2k^2 + 5k^4 = 16Q - 4, \text{ impossible.}$$

On est donc parvenu à l'équation

$$16g^2 = h^4 + 10h^2k^2 + 5k^4,$$

semblable à la proposée, mais où les inconnues du deuxième membre sont impaires.

L'équation

$$b^2 = f^4 - 2^{2i}5f^2g^2 + 2^{4i}5g^4, \quad (i > 1)$$

reste à considérer. Elle donne

$$(f^2 - 2^{2i-1}5g^2) - b^2 = 2^{4i-2}5g^4,$$

et si l'on fait $g = hk$, il en résulte

$$\begin{aligned} f^2 - 2^{2i-1}5g^2 \pm b &= 2h^4, & &= 2.5h^4, \\ f^2 - 2^{2i-1}5g^2 \mp b &= 2^{4i-3}5k^4, & &= 2^{4i-3}k^4; \\ 2^{2i-1}5g^2 - f^2 \pm b &= 2h^4, & &= 2.5h^4, \\ 2^{2i-1}5g^2 - f^2 \mp b &= 2^{4i-3}5k^4, & &= 2^{4i-3}k^4; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} f^2 &= h^4 + 2^{2i-1}5h^2k^2 + 2^{4i-4}5k^4, \\ f^2 &= 5h^4 + 2^{2i-1}5h^2k + 2^{4i-4}\ k^4 = 8k + 5, \\ -f^2 &= h^4 - 2^{2i-1}5h^2k^2 + 2^{4i-4}5k^4 = 8k + 1, \\ -f^2 &= 5h^4 - 2^{2i-1}5h^2k^2 + 2^{4i-4}\ k^4 = 8k + 5. \end{aligned}$$

Les trois dernières équations sont impossibles; la première revient à

$$f^2 = h^4 + 2^{2(i-1)+1}5h^2k^2 + 2^{4(i-1)}5k^4,$$

qui diffère de l'équation donnée par le changement de i en $i-1$. On finira donc par tomber sur une équation semblable à la proposée, mais où les inconnues du second membre seront impaires

Une telle équation

$$a^2 = b^4 + 10b^2c^2 + 5c^4$$

est possible; la solution $b = c = 1$, $a = 4$ se présente de suite, et, au moyen de cette solution, on peut en trouver d'autres par la méthode de Fermat. J'indiquerai ailleurs le moyen de les trouver toutes.

Proposition III. L'équation

$$a^2 = b^4 + 10\,b^2c^2 + 5\,c^4$$

est impossible quand on suppose $c = 5\,h^2$ ou $10\,h^2$, ou plus généralement $c = 2^i\,5\,h^2$.

Démonstration. On fera tous les calculs de la proposition précédente; dans chaque décomposition un des facteurs sera multiple de 5, il entrera dans le terme dont le coefficient est 5, de sorte que l'on finira par tomber sur une équation

$$a^2 = b^4 + 10\,b^2c^2 + 5\,c^4,$$

où b, c seront impairs et $c = 5\,d^2$, ou sur l'équation

$$a^2 = b^4 + 250\,b^2d^4 + 5^5d^8,$$

d'où

$$\begin{aligned}
&(b^2 + 125\,d^4)^2 - a^2 = 4.5^5\,d^8, \quad d = gf,\\
&b^2 + 125\,d^4 \pm a = 2f^8,\\
&b^2 + 125\,d^4 \mp a = 2.5^5g^8;
\end{aligned}$$

par suite

$$b^2 = f^8 - 5^3f^4g^4 + 5^5g^8,$$

ou

$$\begin{aligned}
&(2f^4 - 5^3g^4)^2 - 4b^2 = 5^5g^8, \quad g = hk,\\
&2f^4 - 5^3g^4 \pm 2b = h^8,\\
&2f^4 - 5^3g^4 \mp 2b = 5^5k^8,\\
&5^3g^4 - 2f^4 \pm 2b = h^8,\\
&5^3g^4 - 2f^4 \mp 2b = 5^5k^8;
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
4f^4 &= h^8 + 2.5^3h^4k^4 + 5^5k^8 = 16Q,\\
-4f^4 &= h^8 - 2.5^3h^4k^4 + 5^5k^8.
\end{aligned}$$

La première équation étant impossible, puisque f est impair, on n'aura que la seconde, qui revient à

$$4(h^8 - f^4) = 5\,(h^4 - 5^2k^4)^2.$$

Comme $h^4 - 5^2 k^4$, à cause de h^4 et k^4 de forme $16Q+1$, est seulement divisible par 8, on aura

$$4(h^8 - f^4) = 5.64\,l^2;$$

en supposant l impair et $h^4 - 5^2 k^4 = 8l$, on aura donc

$$\begin{aligned} h^8 - f^4 &= 80l^2, \quad \text{soit } l = mn, \\ h^4 + f^2 &= 2l^2, \quad = 10l^2, \\ h^4 - f^2 &= 40m^2, \quad = 8m^2. \end{aligned}$$

Comme la différence de deux carrés impairs est divisible par 8 au moins, il faut rejeter la première décomposition, qui donne

$$h^4 = l^2 + 20m^2,$$

ou une différence de deux carrés impairs divisible par 4 seulement.

La seconde décomposition donne l'équation

$$h^4 = 4m^2 + 5l^2,$$

et si l'on fait $l = pq$, p et q étant des nombres impairs premiers entre eux, il en résultera la décomposition

$$h^2 \pm 2m = p^2, \quad h^2 \mp 2m = 5q^2, \quad \text{d'où} \quad 2h^2 = p^2 + 5q^2,$$

équation impossible, car $2h^2 - p^2$ n'est jamais divisible par 5 (autrement 2 n'est pas résidu quadratique de 5).

L'équation

$$a^2 = b^4 + 10b^2c^2 + 5c^4$$

est donc impossible dans l'hypothèse de $c = 5h^2$ et dans celle de $c = 10h^2$.

Proposition IV. Si x et y sont des nombres premiers entre eux dont le second peut être négatif, l'équation

$$x^4 - xy^3 + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = z^5$$

est impossible, quand on suppose $x - y$ divisible par 5, ou bien $x^2 + y^2$ divisible par 5.

Démonstration. Un des nombres x, y n'est pas divisible par 5, soit y, l'équation pourra s'écrire

$$x(x-y)(x^2+y^2)=z^5-y^4.$$

Or z n'ayant que des facteurs premiers de forme $10k+1$, on a

$$z^5=1+50k.$$

On a, par le théorème de Fermat,

$$y^4=1+5Q,$$

donc z^5-y^4 est divisible par 5; il faut donc qu'un des nombres x, $x-y$, y^2+x^2 le soit. On a supposé ici z non divisible par 5, ce qui résulte de ce qu'on a

$$(x+y)^2-5xy(x+y)^2+5x^2y^2=z^5;$$

or si z était divisible par 5, $x+y$ le serait, et le premier membre, au lieu d'être divisible par 5^5, ne le serait que par 5.

Examinons d'abord le cas de $x-y$ divisible par 5 : on a

$$(3x^2-4xy+3y^2)^2-5(x-y)^4=4z^5.$$

1°. Si $x-y$ est impair, il faudra poser

$$16(x-y)^2=5g(f^4+10f^2g^2+5g^4);$$

or $5g$ est premier à $f^4+10f^2g^2+5g^4$, donc

$$5g=5^2k^2,\quad \text{d'où}\quad g=5k^2,\quad \text{et}\quad l^2=f^4+10f^2g^2+5g^4.$$

Or on sait que cette dernière équation est impossible pour $g=5h^2$.

2°. Si $x-y$ est pair, comme on a

$$\left(\frac{3x^2-4xy+3y^2}{2}\right)^2-5\left[2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right]^2=z^5,$$

il faudra poser

$$z=f^2-5g^2\quad \text{et}\quad 2\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=5g(f^4+10f^2g^2+5g^4);$$

ainsi

$$5g=2.25k^2,$$

ou

$$g = 10k^2, \quad l^2 = f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4;$$

or cette équation est impossible pour $g = 10k^2$.

N. B. On excepte le cas $x = y$, qui donne $z = 1$.

Examinons maintenant le cas de $x^2 + y^2$ divisible par 5 ; on a

$$(x+y)^4 - 5(x^2+y^2)^2 = 4(-z)^5.$$

Or comme les deux théorèmes de M. Dirichlet sur l'équation

$$P^2 - 5Q^2 = z^5$$

laissent le signe de z arbitraire, pour le cas de $x + y$ impair il faudra poser

$$(x+y)^2 = f(f^4 + 50f^2g^2 + 125g^4).$$

Comme f et $f^4 + 50f^2g^2 + 125g^4$ sont premiers entre eux, on devra avoir

$$f^4 + 50f^2g^2 + 125g^4 \text{ carré},$$

ou bien

$$h^2 = f^4 + 50f^2g^2 + 125g^4,$$

ce qui est impossible.

Si $x + y$ est pair, comme on a

$$\left[\frac{(x+y)^2}{2}\right] - 5\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 = (-z)^5,$$

il faudra poser

$$\frac{(x+y)^2}{2} = f(f^4 + 50f^2g^2 + 125g^2),$$

ou

$$(x+y)^2 = 2f(f^4 + 50f^2g^2 + 125g^4);$$

comme le deuxième facteur est impair et premier à $2f$, il faudra avoir

$$f^4 + 50f^2g^2 + 125g^4 \text{ carré},$$

ce qui a été démontré impossible.

Remarque. Pour démontrer généralement l'impossibilité de l'équation

$$x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = z^5,$$

il resterait à prouver l'impossibilité dans le cas de x divisible par 5.

Proposition V. L'équation

$$x^5 + y^5 = AB^5 z^5$$

est impossible quand A, multiple de 5, n'a pas de facteurs premiers de forme $10m + 1$.

Démonstration. On peut remplacer l'équation donnée par cette autre

$$x^5 + y^5 = Au^5,$$

où x et y sont premiers entre eux; comme $x + y$ est nécessairement divisible par 5, l'équation, si l'on y fait $u = pq$, se décomposera ainsi

$$5(x+y) = Ap^5, \quad x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = 5q^5;$$

p, q sont des nombres premiers entre eux dont le second est impair et non divisible par 5.

La seconde équation revient à

$$5(x^2 + y^2)^2 - (x + y)^4 = 20p^5,$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2 - 5\left[5\left(\frac{x+y}{5}\right)^2\right]^2 = 4p^5;$$

pour $x + y$ pair, on lui donnera la forme

$$\left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right]^2 - 5\left[\frac{5}{2}\left(\frac{x+y}{5}\right)^2\right]^2 = p^5.$$

On aura donc pour $x + y$ impair

$$16\left(\frac{x+y}{5}\right)^2 = g(f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4),$$

qui devient, en posant $f = u + v$, $g = u - v$,

$$\left(\frac{x+y}{5}\right)^2 = (u - v)(u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4),$$

et pour $x + y$ pair,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{5}\right)^2 = g(f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4),$$

ou bien, en multipliant par 32, et posant $2f = u + v$, $2g = u - v$,

$$\left(\frac{x+y}{5}\right)^2 = (u-v)(u^4 - u^3 v + u^2 v^2 - u v^3 + v^4).$$

Or on a

$$\frac{x+y}{5} = \frac{A p^5}{25};$$

si A est divisible par 25, et qu'on pose

$$A = 25B,$$

on aura

$$\left(\frac{x+y}{5}\right)^2 = B^2 p^{10} = (u-v)(u^4 - u^3 v - u^2 v^2 - u v^3 + v^4),$$

et comme

$$u^4 - u^2 v + u^2 v^2 - u v^3 + v^4,$$

qui n'est pas divisible par 5, puisque $u+v$ ne l'est pas, est premier à B, il faudra poser

$$u^4 - u^3 v + u^2 v^3 - u v^4 + v^4 = t^{10}, \quad \text{ou} \quad = w^5.$$

Si A est divisible par 5 seulement, il faudra faire

$$p = 5^\alpha q, \quad \text{d'où} \quad \frac{x+y}{5} = A\, 5^{5\alpha - 2} q^5,$$

et par suite

$$\left(\frac{x+y}{5}\right)^2 = A^2\, 5^{10\alpha - 4} q^{10} = (u-v)(u^4 - u^3 v + u^2 v^2 - u v^3 + v^4),$$

qui conduit à la même équation

$$u^4 - u^3 v + u^2 v^2 - u v^3 + v^4 = t^{10} \quad \text{ou} \quad = w^5.$$

Il suffit donc de montrer que l'équation précédente est impossible, par la raison que le cas de u ou v divisible par 5 ne peut se présenter.

1°. Le cas de $x+y$ divisible par 25 (celui traité par M. Dirichlet) exige que l'on ait $u - v$ divisible par 5; on sait qu'alors

$$u^4 - u^3 v + u^2 v^2 - u v^3 + v^4 = w^5$$

est impossible.

2°. Le cas de $x+y$, divisible par 5 seulement; revient à f^2+g^2, divisible par 5, et par suite à u^2+v^2, divisible par 5, puisqu'on a, dans le cas de $x+y$ impair,

$$f^2+g^2=2(u^2+v^2),$$

et dans celui de $x+y$ pair

$$2(f^2+g^2)=u^2+v^2.$$

En effet, dans le premier cas $(x+y)$ impair, on a

$$16(x^2+y^2)=f^5+5Q, \quad \text{d'où} \quad 16^2(x^2+y^2)^2=f^{10}+5Q',$$

$$16\left(\frac{x+y}{5}\right)^2=gf^4+5Q'', \quad \text{d'où} \quad 16^2\left(\frac{x+y}{5}\right)^4=g^2f^8+5Q''',$$

et par conséquent

$$16^2\left[(x^2+y^2)^2+\left(\frac{x+y}{5}\right)^2\right]=f^8(f^2+g^2)+5R.$$

Pour que f^2+g^2 soit divisible par 5, il faut et il suffit que

$$(x^2+y^2)^2+\left(\frac{x+y}{5}\right)^4$$

le soit. Posons

$$x+y=5s,$$

s n'étant pas divisible par 5,

$$x^2+y^2=5^2s^2-2xy,$$

il faudra donc avoir

$$(25s^2-2xy)^2+s^4,$$

divisible par 5, ou bien encore

$$4x^2y^2+s^4,$$

divisible par 5, mais

$$x=5s-y$$

donne

$$x^2=y^2+5R', \quad x^2y^2=y^4+5R'',$$

c'est donc $4y^4+s^4$ qui sera divisible par 5; or cela arrive toujours, puisque, y et s n'étant pas divisibles par 5, s^4 et y^4 ont la forme $5m+1$.

La démonstration reste la même pour $x + y$ pair, seulement la quantité $4x^2y^2 + s^4$ se trouve divisée par 16.

On aurait pu prouver directement que le cas de u ou v divisible par 5 ne peut se présenter, car il répond à $f^2 - g^2$ divisible par 5, ce qui conduit à $4y^4 - s^4$ divisible par 5, y et s ne l'étant pas.

Proposition V. L'équation

$$x^5 + y^5 = AB^5z^5,$$

où A n'a pas de facteur premier de forme $10m + 1$, est toujours impossible quand A, non divisible par 5, étant divisé par 25, donne un des seize restes

$$\pm 2, \ \pm 3, \ \pm 4, \ \pm 6, \ \pm 8, \ \pm 9, \ \pm 11, \ \pm 12,$$

plus simplement un reste autre que ± 1, ± 7).

Démonstration. On ramènera l'équation à cette autre

$$x^5 + y^5 = Au^5,$$

où x, y sont premiers entre eux, et, posant

$$u = pq,$$

on décomposera ainsi l'équation:

$$(x+y) = Ap^5, \quad x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = q^5.$$

Or la dernière équation, qui suppose x, y, $x - y$, ou $x^2 + y^2$, divisible par 5, est impossible dans les deux derniers cas, qui donnent, l'un A de forme $25B \pm 2$, ± 11; l'autre A de forme $25B \pm 6$, ± 8. Pour x ou y multiple de 5, A est de forme $25B \pm 1$, ± 7. Quant aux formes

$$A = 25B \pm 3, \ \pm 4, \ \pm 9, \ \pm 12,$$

elles ne peuvent se présenter. On suppose u non divisible par 5, car pour ce cas l'équation est impossible.

Remarque I. Le cas $A = 1$ ou de l'équation

$$x^5 + y^5 = u^5$$

est aussi impossible, parce qu'une des inconnues est divisible par 5, et l'on a une équation de forme

$$p^5 + q^5 = 5^{5a} v^5,$$

en transposant s'il est nécessaire.

Pour $A = 2$, l'équation

$$x^5 + y^5 = 2z^5$$

a la solution

$$x = y = z = 1;$$

elle n'en a pas d'autre.

Remarque II. Pour le cas de $A = 25B \pm 1, \pm 7$, ou, ce qui revient au même, quand l'un des nombres x, y est divisible par 5, l'équation

$$x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - xy^3 + y^4 = q^5$$

se mettra sous la forme

$$(2x^2 - xy + 2y^2)^2 - 5(xy)^2 = 4q^5$$

pour xy impair, et sous la forme

$$\left(x^2 - \frac{xy}{2} + y^2\right)^2 - 5\left(\frac{xy}{2}\right) = q^5,$$

pour xy pair.

Dans le premier cas, il faudra poser

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} 16(2x^2 - xy + 2y^2) = f(f^4 + 50f^2g^2 + 125g^4), \\ 16\,xy = 5g(f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4); \end{cases}$$

dans le second, il faudra poser

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} x^2 - \dfrac{xy}{2} + y^2 = f(f^4 + 50f^2g^2 + 125g^4), \\ \dfrac{xy}{2} = 5g(f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4). \end{cases}$$

Il reste donc à montrer l'incompatibilité des équations (C) et celle des équations (D).

Il est un cas où l'impossibilité de la seconde des équations (C), (D), se présente de suite, c'est celui de x et y carré (ou de l'équation $x^{10} \pm y^{10} = Az^5$); ici il faudra rendre carré

$$f^4 + 10f^2g^2 + 5g^4,$$

en supposant que g soit de la forme $5h^2$, ou $10h^2$, ce qui est démontré impossible dans la proposition III ; on a donc ce théorème :

« *Proposition* VI. L'équation

$$x^{10} \pm y^{10} = A z^5$$

» est impossible quand A n'a point de facteur premier de forme » $10m + 1$. »

Car l'équation, déjà démontrée impossible pour A, multiple de 5 et pour A divisé par 25, donnant un des huit restes

$$\pm 2, \ \pm 3, \ \pm 6, \ \pm 8, \ \pm 9, \ \pm 11, \ \pm 12,$$

l'est encore pour le cas des restes ± 1, ± 7, ce qui épuise tous les cas possibles.