JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Propriétés géométriques relatives à la théorie des fonctions elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 495-501.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__495_0>

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES

RELATIVES

A LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

Par J.-A. SERRET.

I.

On sait quelle importance Legendre attachait à la représentation géométrique des fonctions elliptiques; cet illustre géomètre, après avoir remarqué que les arcs de la lemniscate représentent exactement les fonctions de la première espèce dans le cas particulier où l'angle du module est $\frac{\pi}{4}$, détermina l'équation d'une courbe algébrique du sixième degré dont la forme diffère peu de celle de l'ellipse et dont les arcs peuvent représenter les fonctions de première espèce de module et d'amplitude quelconques. Il est très-probable que Legendre ne s'était pas borné à cette recherche et qu'il avait fait d'autres tentatives; c'est du moins ce qui me semble résulter de la phrase suivante du savant géomètre : « Il est très-remarquable que notre nouvelle formule conduise » si facilement à la solution d'un problème que nous avons regardé » comme fort difficile, *et qui paraît n'admettre aucune autre solution ;* » celui de trouver une courbe algébrique dont les arcs représentent » généralement la fonction elliptique de première espèce [*]. » Toutefois, la propriété connue de la lemniscate devait nécessairement faire présumer l'existence d'autres courbes planes plus générales, jouissant de propriétés géométriques analogues, et susceptibles de servir à la représentation des fonctions quelconques de première espèce.

Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, et imprimée de-

[*] *Traité des Fonctions elliptiques*, tome II, page 590.

puis dans ce Journal [*], j'ai résolu en partie ce problème en prouvant que toute fonction elliptique de première espèce peut être représentée, quels que soient son module et son amplitude, par la somme ou la différence de deux arcs de *l'ellipse de Cassini* (de l'une quelconque des deux espèces que j'ai considérées). A la vérité, ce théorème ne satisfait pas complétement, en ce sens qu'il faut deux arcs pour représenter une fonction elliptique; mais, outre l'avantage qu'il présente de n'exiger que les deux mêmes arcs pour deux fonctions complémentaires, il établit un lien géométrique remarquable entre les fonctions elliptiques de première espèce et les transcendantes eulériennes de seconde espèce. J'ai fait voir en effet, dans un autre article [**], que ces dernières peuvent être représentées au moyen des périmètres de courbes, qui, ainsi que les *cassinoïdes,* sont renfermées dans l'équation générale

$$r^{2m} - 2a^m r^m \cos mt + a^{2m} = b^{2m},$$

et jouissent d'une propriété commune consistant en ce que le produit des distances d'un point de la courbe à m points fixes est constant.

Cette propriété, constatée depuis longtemps pour la lemniscate, et dont la généralisation m'a conduit aux résultats que je viens de rappeler, n'est sans doute pas la seule qui puisse mettre sur la voie d'une représentation géométrique convenable des transcendantes elliptiques à amplitude et module quelconques; mais une pareille recherche ne saurait être entreprise qu'après une étude approfondie de la lemniscate. C'est dans le but de faciliter cette étude que, d'après le conseil d'un savant géomètre, M. Chasles, je me décide à publier les théorèmes suivants dont on pourra, ce me semble, un jour tirer parti.

II.

Si l'on coupe un tore par un plan parallèle à l'axe, et distant de cet axe d'une quantité égale au rayon du cercle générateur, la section

---

[*] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* tome XVI, page 914; *Journal de Mathématiques,* tome VIII, page 145.

[**] *Journal de Mathématiques,* tome VII, page 114.

que l'on obtient est une cassinoïde dont la nature dépend du rapport qui existe entre la distance du centre du cercle générateur à l'axe, et le rayon de ce cercle; ce rapport ou *module* détermine la forme du tore et celle de la cassinoïde unique que l'on peut tracer sur sa surface. Dans le cas particulier où ce module est 2, la section est une lemniscate, et son plan est tangent au tore que l'on pourrait appeler pour cette raison *tore lemniscatique*. La section d'un tore quelconque par un plan tangent parallèle à l'axe est une courbe plus générale que la lemniscate, dont la forme se rapproche dans certains cas de celle de cette dernière et qui jouit d'ailleurs de plusieurs propriétés géométriques analogues : ainsi, suivant que le module du tore est inférieur ou supérieur à 1, la section dont nous parlons est le lieu géométrique des projections orthogonales du centre d'une ellipse ou d'une hyperbole sur ses tangentes; si ce module est 2, l'hyperbole est équilatère, et l'on retombe sur la propriété connue de la lemniscate. Au surplus, cette généralisation de la lemniscate est impropre à remplir le but que nous nous proposons.

III.

Dans mon premier travail sur les fonctions elliptiques, j'ai déjà énoncé et démontré plusieurs des propriétés géométriques des courbes représentées généralement par l'équation

$$(1) \qquad r^{2m} - 2a^m r^m \cos mt + a^{2m} = b^{2m}.$$

J'ai fait voir en particulier que, dans le cas de m entier, b^m représente le produit constant des distances d'un point de la courbe aux sommets d'un polygone régulier de m côtés et de rayon a, lesquels sommets peuvent être considérés comme des foyers relativement à la courbe.

On déduit aisément de l'équation (1)

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dt} = \frac{-a^m \sin mt}{r^m - a^m \cos mt},$$

ce qui montre que

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{dt} = \frac{r^m - a^m \cos mt}{a^m \sin mt}$$

sera l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes homofocales représentées par l'équation (1), où b varie de o à ∞.

L'intégration de l'équation précédente s'effectue sans difficulté; θ désignant une constante, on trouve

$$r^m = \frac{a^m \cos m\theta}{\cos m(t-\theta)}. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) représentent deux systèmes de courbes conjuguées et orthogonales; il est aisé de vérifier qu'elles sont du genre de celles que M. Lamé a appelées *lignes isothermes*, propriété qui aurait pu servir à former directement l'équation (2). Les courbes représentées par cette dernière sont composées de m branches de forme hyperbolique, passant par les foyers communs de leurs conjuguées, et présentant elles-mêmes m sommets dont le lieu géométrique représenté par l'équation

$$r^m = a^m \cos mt$$

est une courbe semblable à celle du premier système qui correspond à $b = a$.

IV.

Dans le cas particulier de $m = 2$, les équations (1) et (2) deviennent

$$r^4 - 2a^2 r^2 \cos 2t + a^4 = b^4, \tag{3}$$

$$r^2 = \frac{a^2 \cos 2\theta}{\cos 2(t-\theta)}. \tag{4}$$

L'équation (3) représente des cassinoïdes homofocales, et l'équation (4) des hyperboles équilatères ayant même centre et un point commun.

M. Lamé, dans une Note insérée au tome I^er de ce *Journal* (p. 85), avait déjà remarqué que les équations (3) et (4), où b et θ sont des paramètres variables, représentent deux systèmes de courbes isothermes conjuguées et orthogonales.

Le lieu des sommets des hyperboles équilatères, représentées par l'équation (4), est une lemniscate ayant pour équation

$$r^2 = a^2 \cos 2t.$$

Le lieu de leurs foyers est aussi une lemniscate ayant pour équation

$$r^2 = 2a^2 \cos 2t.$$

Mais cette dernière est digne d'être remarquée, car c'est précisément celle que représente l'équation (3) pour $b = a$, et qui, par conséquent, fait partie du système des trajectoires orthogonales.

On peut, d'après cela, énoncer les deux théorèmes suivants :

1°. Le lieu géométrique des sommets d'un système d'hyperboles équilatères ayant même centre et un point commun est une lemniscate;

2°. Le lieu géométrique des foyers des mêmes courbes est une lemniscate qui les coupe orthogonalement.

V.

Si aux hyperboles équilatères dont nous venons de parler, on substitue un système de coniques quelconques semblables, on sera nécessairement conduit à des trajectoires orthogonales plus générales que les cassinoïdes, et jouissant de propriétés analogues. Parmi ces dernières, il en est une plus simple que toutes les autres et qui serait précisément une lemniscate, si les coniques conjuguées étaient des hyperboles équilatères. Il était naturel de rechercher si les arcs de cette courbe sont susceptibles de représenter généralement les fonctions elliptiques de première espèce, mais l'extrême complication des calculs ne m'a pas permis de m'en assurer; toutefois, l'analogie qui existe entre le module de la fonction elliptique représentée par l'arc de lemniscate et celui des hyperboles que cette courbe coupe orthogonalement, analogie que les considérations qui vont suivre mettront encore plus en évidence, m'avait fait longtemps espérer de résoudre enfin complétement le problème que je m'étais proposé.

VI.

J'appellerai, suivant l'usage, *module d'une section conique* le rapport constant des distances d'un point de la courbe au foyer et à la directrice : d'après cela, on voit que l'équation

$$(1) \qquad r^2 = a^2 \frac{1 - m^2 \cos^2 \alpha}{1 - m^2 \cos^2 (t - \alpha)}$$

représentera un système de coniques de module m, ayant pour centre commun l'origine des coordonnées polaires, et passant par un point fixe ayant pour coordonnées $t = 0$ et $r = a$.

Si m est > 1, l'équation (1) représentera des hyperboles; mais il est aisé de voir qu'elle représentera non-seulement les hyperboles de module m, mais aussi leurs conjuguées de module m', ces deux nombres m et m' satisfaisant, comme on sait, à la relation

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m'^2} = 1.$$

Il résulte de là que, sauf le cas de $m = \sqrt{2}$, l'équation (1), dans laquelle α est un paramètre variable, représente réellement deux systèmes de courbes distincts. On voit quelle complication cette circonstance doit apporter dans la recherche des trajectoires orthogonales, qui doivent aussi sans doute former deux systèmes distincts; mais celle de ces courbes qui se réduit à une lemniscate dans le cas particulier de $m = m' = \sqrt{2}$, et dont les arcs représentent la fonction F, qui, ainsi que sa fonction complémentaire, a pour module $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ne doit-elle pas, dans le cas général, servir à la représentation des deux fonctions complémentaires de modules $\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{m'}$? Telle est la question que je m'étais posée depuis longtemps, et que je n'ai pas été assez heureux pour résoudre.

On trouve assez facilement, pour l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes représentées par l'équation (1),

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{dr}{dt}(r^2 - a^2 \cos 2t) + a^2 r \sin 2t\right]^2 \\ &= \left(\frac{2}{m^2} - 1\right)^2 \left\{\left[\frac{dr}{dt}(r^2 - a^2) + a^2 r \sin 2t\right]^2 + a^4 r^2 (1 - \cos 2t)^2\right\}. \end{aligned} \right.$$

Ainsi que nous l'avions prévu, elle ne change pas quand on y change m en m'; elle se simplifie considérablement si $m = \sqrt{2}$: on a, dans ce cas,

$$\frac{dr}{dt}(r^2 - a^2 \cos 2t) + a^2 r \sin 2t = 0,$$

équation qui représente effectivement un système de cassinoïdes homofocales.

Il n'est pas probable que l'équation (2) puisse servir à résoudre le problème que je m'étais proposé; mais si la propriété que je soupçonne existe, peut-être pourra-t-on la découvrir à l'aide de considérations géométriques.

Le lieu géométrique des sommets et celui des foyers des sections coniques représentées par l'équation (1), où α est un paramètre variable, ne sont autres que les courbes que nous avons déjà mentionnées, et que l'on obtient en coupant un tore quelconque par un plan tangent parallèle à l'axe. Le second de ces lieux géométriques ne coupe orthogonalement les courbes (1) que dans le cas particulier de $m = \sqrt{2}$, c'est-à-dire dans le cas de la lemniscate que nous avons étudié précédemment.

VII.

En terminant cet article, je crois devoir indiquer une dernière propriété des courbes représentées par l'équation générale

$$r^{2m} - 2a^m r^m \cos mt + a^{2m} = b^{2m},$$

propriété remarquable qui offre le premier exemple de courbes algébriques dont les arcs représentent dans un cas particulier les transcendantes connues des géomètres sous le nom de fonctions abéliennes ou ultra-elliptiques.

On déduit aisément de l'équation précédente,

$$\frac{ds}{dr} = -\frac{b^m}{a^m}\frac{1}{\sin mt},$$

d'où, en désignant par $s(r_0, r_1)$ l'arc de la courbe déterminé par les rayons vecteurs r_0, r_1, qui correspondent aux azimuts t_0, t_1,

$$s(r_0, r_1) = -2b^m \int_{r_0}^{r_1} \frac{r^m}{\sqrt{-r^{4m} + 2(b^{2m} + a^{2m})r^{2m} - (b^{2m} - a^{2m})^2}}\,dr.$$