# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE


G. LAMÉ

**Mémoire sur les surfaces orthogonales et isothermes**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1[re] série*, tome 8 (1843), p. 397-434.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__397_0>

# MÉMOIRE

## SUR LES SURFACES ORTHOGONALES ET ISOTHERMES;

PAR M. G. LAMÉ.

(Lu à l'Académie des Sciences, le 21 août 1843.)

Dans un Mémoire, inséré dans ce Journal (tome V, page 313), j'ai démontré les formules qui peuvent servir à transformer des équations aux différences partielles en coordonnées curvilignes, et dont l'interprétation géométrique se résume en deux théorèmes sur les variations de courbure de tout système de surfaces orthogonales. Les formules dont il s'agit sont aux différences partielles du second ordre, mais non linéaires. Elles contiennent, comme variables indépendantes, les paramètres des surfaces conjuguées, ou les trois coordonnées curvilignes, et, comme fonctions de ces variables, les trois paramètres différentiels du premier ordre. Ces équations aux différences partielles sont trop compliquées pour qu'on puisse les intégrer généralement; mais en assujettissant les fonctions qu'elles contiennent à de nouvelles conditions, l'intégration devient possible.

Dans le Mémoire actuel, j'introduis la condition que les surfaces conjuguées soient toutes isothermes, ce qui donne trois équations nouvelles aux différences partielles, linéaires et du premier ordre. Un système de surfaces isothermes, ou d'égale température, existe dans tout solide homogène soumis à diverses sources constantes de chaleur ou de froid. Deux quelconques des surfaces qui composent ce système peuvent être prises à volonté; mais ces deux surfaces, une fois choisies, non-seulement toutes les autres se dessinent d'elles-mêmes, mais encore les surfaces orthogonales qui leur sont conjuguées. Il faut toute-fois excepter le cas de deux sphères concentriques, et celui de deux plans parallèles, à cause de l'indétermination des systèmes conjugués qui leur correspondent. Mais ces cas étant écartés, l'ensemble des surfaces orthogonales est totalement déterminé dès qu'on se donne deux surfaces individuelles; ce qui montre clairement que les deux surfaces choisies doivent avoir une nature et des positions relatives particulières, pour que les systèmes conjugués qui les accompagnent soient tous les trois isothermes.

J'ai fait voir que, dans tout système triple de surfaces isothermes, les six rayons de courbure des surfaces qui passent en chaque point sont tels, que le produit de trois d'entre eux, pris dans un certain ordre, est égal au produit des trois autres. Depuis, M. J. Bertrand, dans le Mémoire qu'il a récemment présenté à l'Académie des Sciences, a démontré plusieurs théorèmes nouveaux sur les surfaces dont il s'agit. Il démontre, par exemple, que toute surface appartenant au système triple doit jouir de la propriété de pouvoir être divisée en carrés infiniment petits par ses lignes de courbure, lesquelles, d'après le beau théorème démontré généralement par M. Dupin, ne sont autres que les intersections de cette surface, par toutes les surfaces orthogonales qui peuvent lui être conjuguées.

C'est cette proposition élégante, trouvée par M. J. Bertrand, qui m'a donné l'idée de chercher, par l'intégration des équations différentielles dont je viens de parler, quelles sont toutes les surfaces capables de composer un système triplement isotherme. Je considère d'abord le cas des surfaces de révolution, c'est-à-dire celui où l'un des trois systèmes partiels se compose de plans menés suivant une même droite, et les deux autres de surfaces de révolution autour de cette droite; or, l'intégration complète ne conduit qu'aux deux systèmes connus des surfaces de révolution du second degré. Je considère ensuite le cas général, et l'intégration me conduit pareillement aux systèmes triples des surfaces isothermes du second ordre; ainsi, par le théorème de M. J. Bertrand, les surfaces du second ordre peuvent être partagées en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure.

Des résultats aussi simples doivent pouvoir se démontrer d'une manière en quelque sorte élémentaire, à l'aide des infiniment petits et en s'appuyant sur la théorie, aujourd'hui si bien connue, des surfaces du second ordre; mais la méthode complétement analytique que j'ai suivie m'offrait l'avantage d'essayer une première fois, sur un cas simple, l'intégration des équations différentielles qui appartiennent à tous les systèmes de surfaces orthogonales. Ces équations sont compliquées et d'une forme telle, que les méthodes d'intégration employées jusqu'ici ne leur sont pas applicables. Je n'ai pu atteindre le but que je me proposais qu'en ayant recours à des procédés particuliers qui paraissent liés intimement avec cette sorte d'équations différentielles, et qui doivent mettre sur la voie pour parvenir à les intégrer dans des cas plus généraux.

En résumé, on connaît maintenant tous les genres de surfaces orthogonales dans lesquels les trois systèmes partiels sont isothermes : 1° celui des ellipsoïdes et des hyperboloïdes homofocaux, qui m'a servi à trouver les lois de l'équilibre et du mouvement des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux, dont la surface est directement soumise à des sources constantes de chaleur et de froid; 2° celui des paraboloïdes elliptiques et hyperboliques, ayant même axe et mêmes foyers; 3° ceux qui comprennent les ellipsoïdes de révolution autour du petit axe et autour du grand axe; 4° celui où l'un des systèmes partiels se compose de sphères concentriques, lesquelles peuvent être conjuguées à une infinité de cônes du second ordre; 5° enfin ceux où l'un des systèmes partiels se compose de plans parallèles, qui peuvent être conjugués à une infinité de cylindres isothermes.

De ces cinq genres, les quatre premiers ne forment réellement qu'un seul et même groupe, car le second, le troisième et le quatrième peuvent se déduire du premier, en modifiant convenablement les constantes qu'il renferme. Il n'en est pas de même du cinquième genre, qui forme un second groupe distinct et très-étendu; car il existe une infinité de cylindres de tous les degrés, dont les bases sont des courbes orthogonales isothermes : on démontre, en effet, très-facilement qu'un système de courbes planes isothermes a pour trajectoires orthogonales des courbes pareillement isothermes.

## § I.

Rappelons en peu de mots les principes établis et les formules démontrées dans le Mémoire sur les coordonnées curvilignes (tome V de ce Journal, page 313).

Lorsqu'une famille de surfaces est donnée par une équation de la forme $f(x, y, z) = \rho$, le paramètre $\rho$, et les deux expressions différentielles

$$\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2\rho}{dx^2} + \frac{d^2\rho}{dy^2} + \frac{d^2\rho}{dz^2}\right),$$

que nous désignons par $h$ et $\Delta_2\rho$, conservent les mêmes valeurs numériques en chaque point, quels que soient les axes coordonnés. La seconde de ces quantités, ou $h$, que nous appelons paramètre différentiel du premier ordre, est telle que $\frac{d\rho}{h}$ représente la distance normale de deux surfaces consécutives; la troisième, ou $\Delta_2\rho$, que nous appelons paramètre différentiel du second ordre, est telle que l'expression $\left(\frac{dh}{d\rho} - \frac{\Delta_2\rho}{h}\right)$ représente la somme des deux courbures de la surface qui passe au point que l'on considère.

Lorsque trois familles de surfaces, aux paramètres $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$, partagent l'espace en parallélipipèdes infiniment petits, leur ensemble constitue un système de surfaces conjuguées et orthogonales. Un point quelconque est déterminé par les trois surfaces qui s'y coupent à angles droits, ou par les valeurs numériques des paramètres $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$, qui leur correspondent. Les trois paramètres différentiels du premier ordre, $h$, $h_1$, $h_2$, vérifient les six équations aux différences partielles suivantes, dans lesquelles on a posé, pour simplifier, $\frac{1}{h} = \text{H}$, $\frac{1}{h_1} = \text{H}_1$, $\frac{1}{h_2} = \text{H}_2$:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\text{H}}{d\rho_1 d\rho_2} &= \frac{1}{\text{H}_1}\frac{d\text{H}}{d\rho_1}\frac{d\text{H}_1}{d\rho_2} + \frac{1}{\text{H}_2}\frac{d\text{H}}{d\rho_2}\frac{d\text{H}_2}{d\rho_1}, \\ \frac{d^2\text{H}_1}{d\rho_2 d\rho} &= \frac{1}{\text{H}_2}\frac{d\text{H}_1}{d\rho_2}\frac{d\text{H}_2}{d\rho} + \frac{1}{\text{H}}\frac{d\text{H}_1}{d\rho}\frac{d\text{H}}{d\rho_2}, \\ \frac{d^2\text{H}_2}{d\rho\, d\rho_1} &= \frac{1}{\text{H}}\frac{d\text{H}_2}{d\rho}\frac{d\text{H}}{d\rho_1} + \frac{1}{\text{H}_1}\frac{d\text{H}_2}{d\rho_1}\frac{d\text{H}_1}{d\rho}; \end{aligned}\right.$$

$$
(2) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d\frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1}}{d\rho_1} + \frac{d\frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho}}{d\rho} + \frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2}\,\frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\rho_2} = 0,\\
&\frac{d\frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\rho}}{d\rho} + \frac{d\frac{1}{H_2}\frac{dH}{d\rho_2}}{d\rho_2} + \frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1}\,\frac{1}{H_1}\frac{dH}{d\rho_1} = 0,\\
&\frac{d\frac{1}{H_2}\frac{dH_1}{d\rho_2}}{d\rho_2} + \frac{d\frac{1}{H_1}\frac{dH_2}{d\rho_1}}{d\rho_1} + \frac{1}{H}\frac{dH_1}{d\rho}\,\frac{1}{H}\frac{dH_2}{d\rho} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Les trois fonctions $h = \frac{1}{H}$, $h_1 = \frac{1}{H_1}$, $h_2 = \frac{1}{H_2}$, étant connues en $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$, 1°. les formules

$$
(3) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{c} = \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}, \quad \frac{1}{c_1} = \frac{h_2}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2}, \quad \frac{1}{c_2} = \frac{h}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho},\\
&\frac{1}{\gamma} = \frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}, \quad \frac{1}{\gamma_1} = \frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}, \quad \frac{1}{\gamma_2} = \frac{h_1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1},
\end{aligned}
\right.
$$

donnent les rayons de plus grande et de plus petite courbure des surfaces $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$, lesquels sont respectivement $(\gamma_1, c_2)$, $(\gamma_2, c)$, $(\gamma, c_1)$; ou bien, les surfaces orthogonales se coupant suivant leurs lignes de courbure, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{\gamma}$, sont les deux courbures de l'arc $ds = \frac{d\rho}{h}$; $\frac{1}{c_1}$, $\frac{1}{\gamma_1}$, celles de l'arc $ds_1 = \frac{d\rho_1}{h_1}$; $\frac{1}{c_2}$, $\frac{1}{\gamma_2}$, celles de l'arc $ds_2 = \frac{d\rho_2}{h_2}$.

2°. Les paramètres différentiels du second ordre des surfaces conjuguées sont déterminés par les équations

$$
(4) \qquad \frac{\Delta_2\rho}{h^2} = \frac{d\log\frac{h}{h_1h_2}}{d\rho}, \quad \frac{\Delta_2\rho_1}{h_1^2} = \frac{d\log\frac{h_1}{h_2h}}{d\rho_1}, \quad \frac{\Delta_2\rho_2}{h_2^2} = \frac{d\log\frac{h_2}{hh_1}}{d\rho_2},
$$

qui, d'après les formules (3), peuvent se mettre sous la forme

$$
(4\ bis) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dh}{d\rho} - \frac{\Delta_2\rho}{h} = \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{c_2}, \quad \frac{dh_1}{d\rho_1} - \frac{\Delta_2\rho_1}{h_1} = \frac{1}{\gamma_2} + \frac{1}{c},\\
&\frac{dh_2}{d\rho_2} - \frac{\Delta_2\rho_2}{h_2} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{c_1}.
\end{aligned}
\right.
$$

3°. Toute coordonnée rectiligne $x$, $y$ ou $z$, ou en général toute distance $\varphi$ d'un point de l'espace à un plan fixe quelconque, étant exprimée en $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$, doit vérifier les quatre équations différentielles

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2\varphi}{d\rho d\rho_1} + \frac{1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}\frac{d\varphi}{d\rho} + \frac{1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}\frac{d\varphi}{d\rho_1} = 0,\\
&\frac{d^2\varphi}{d\rho_2 d\rho} + \frac{1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho}\frac{d\varphi}{d\rho_2} + \frac{1}{h}\frac{dh}{d\rho_2}\frac{d\varphi}{d\rho} = 0,\\
&\frac{d^2\varphi}{d\rho_1 d\rho_2} + \frac{1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2}\frac{d\varphi}{d\rho_1} + \frac{1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1}\frac{d\varphi}{d\rho_2} = 0.\\
&h^2\left(\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2 + h_1^2\left(\frac{d\varphi}{d\rho_1}\right)^2 + h_2^2\left(\frac{d\varphi}{d\rho_2}\right)^2 = 1.
\end{aligned}\right.$$

Ainsi, lorsqu'on aura intégré, soit généralement, soit dans quelque cas particulier, les équations (1) et (2), on connaîtra les fonctions $h = \frac{1}{H}$, $h_1 = \frac{1}{H_1}$, $h_2 = \frac{1}{H_2}$, en $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$; les formules (3) donneront les six courbures des surfaces conjuguées, les équations (4) leurs paramètres différentiels du second ordre. Mais, si l'on veut passer aux coordonnées rectilignes, il faudra, en outre, intégrer les équations (5); cette intégration conduira aux valeurs de $x$, $y$, $z$ en fonction de $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$, et l'élimination de deux des trois paramètres entre ces valeurs donnera les équations générales des surfaces conjuguées en coordonnées rectilignes.

## § II.

Considérons le cas où les systèmes conjugués sont tous les trois isothermes. On sait que, pour toute famille de surfaces isothermes, le rapport du paramètre différentiel du second ordre, au carré de celui du premier, est constant sur chaque surface individuelle; d'où l'on conclut facilement que si l'on prend, pour paramètre intégral, la fonction même qui exprimerait la température, le paramètre différentiel du second ordre doit être nul. (*Mémoire sur les surfaces isothermes*, tome II de ce Journal.)

Ainsi, dans le cas que nous nous proposons de traiter, les paramètres peuvent toujours être tels que l'on ait

$$\Delta_2\rho = 0,\quad \Delta_2\rho_1 = 0,\quad \Delta_2\rho_2 = 0,$$

ou, d'apres les formules (4),

$$\frac{d\,\dfrac{h}{h_1 h_2}}{d\rho} = 0, \quad \frac{d\,\dfrac{h_1}{h_2 h}}{d\rho_1} = 0, \quad \frac{d\,\dfrac{h_2}{h h_1}}{d\rho_2} = 0,$$

ou enfin,

$$\frac{d\,\dfrac{H_1 H_2}{H}}{d\rho} = 0, \quad \frac{d\,\dfrac{H_2 H}{H_1}}{d\rho_1} = 0, \quad \frac{d\,\dfrac{H H_1}{H_2}}{d\rho_2} = 0, \tag{6}$$

et il s'agit de trouver tous les groupes de fonctions $H$, $H_1$, $H_2$, qui peuvent vérifier à la fois les équations différentielles (1), (2), (6).

On aura les intégrales générales des équations (6) en posant

$$\frac{H_1 H_2}{H} = Q^2, \quad \frac{H_2 H}{H_1} = Q_1^2, \quad \frac{H H_1}{H_2} = Q_2^2,$$

d'où

$$H = Q_1 Q_2, \quad H_1 = Q_2 Q, \quad H_2 = Q Q_1, \tag{7}$$

$Q$, $Q_1$, $Q_2$ étant respectivement indépendants de $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$; c'est-à-dire $Q$ étant simplement fonction de $\rho_1$ et $\rho_2$, $Q_1$ de $\rho_2$ et $\rho$, $Q_2$ de $\rho$ et $\rho_1$.

Des fonctions (7) on déduit par la différentiation

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{dH}{d\rho_1} = Q_1 \frac{dQ_2}{d\rho_1}, && \frac{dH_1}{d\rho_2} = Q_2 \frac{dQ}{d\rho_2}, && \frac{dH_2}{d\rho} = Q \frac{dQ_1}{d\rho}, \\
&\frac{dH}{d\rho_2} = Q_2 \frac{dQ_1}{d\rho_2}, && \frac{dH_1}{d\rho} = Q \frac{dQ_2}{d\rho}, && \frac{dH_2}{d\rho_1} = Q_1 \frac{dQ}{d\rho_1}, \\
&\frac{d^2 H}{d\rho_1\, d\rho_2} = \frac{dQ_2}{d\rho_1} \frac{dQ_1}{d\rho_2}, && \frac{d^2 H_1}{d\rho_2\, d\rho} = \frac{dQ}{d\rho_2} \frac{dQ_2}{d\rho}, && \frac{d^2 H_2}{d\rho\, d\rho_1} = \frac{dQ_1}{d\rho} \frac{dQ}{d\rho_1}.
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

La substitution des valeurs (7) et (8) transforme ainsi qu'il suit les équations (1) et (2),

$$\left\{\begin{aligned}
&Q \frac{dQ_1}{d\rho_2} \frac{dQ_2}{d\rho_1} = Q_1 \frac{dQ_2}{d\rho_1} \frac{dQ}{d\rho_2} + Q_2 \frac{dQ}{d\rho_1} \frac{dQ_1}{d\rho_2}, \\
&Q_1 \frac{dQ_2}{d\rho} \frac{dQ}{d\rho_2} = Q_2 \frac{dQ}{d\rho_2} \frac{dQ_1}{d\rho} + Q \frac{dQ_1}{d\rho_2} \frac{dQ_2}{d\rho}, \\
&Q_2 \frac{dQ}{d\rho_1} \frac{dQ_1}{d\rho} = Q \frac{dQ_1}{d\rho} \frac{dQ_2}{d\rho_1} + Q_1 \frac{dQ_2}{d\rho} \frac{dQ}{d\rho_1};
\end{aligned}\right. \tag{9}$$

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&Q\,\frac{d\,\dfrac{1}{Q_1Q_2}\dfrac{dQ_2}{d\rho}}{d\rho} + Q_1\,\frac{d\,\dfrac{1}{QQ_2}\dfrac{dQ_2}{d\rho_1}}{d\rho_1} + \frac{Q_2^2}{Q^2Q_1^2}\,\frac{dQ}{d\rho_2}\,\frac{dQ_1}{d\rho_2} = 0.\\
&Q_2\,\frac{d\,\dfrac{1}{QQ_1}\dfrac{dQ_1}{d\rho_2}}{d\rho_2} + Q\,\frac{d\,\dfrac{1}{Q_2Q_1}\dfrac{dQ_1}{d\rho}}{d\rho} + \frac{Q_1^2}{Q_2^2Q^2}\,\frac{dQ_2}{d\rho_1}\,\frac{dQ}{d\rho_1} = 0.\\
&Q_1\,\frac{d\,\dfrac{1}{Q_2Q}\dfrac{dQ}{d\rho_1}}{d\rho_1} + Q_2\,\frac{d\,\dfrac{1}{Q_1Q}\dfrac{dQ}{d\rho_2}}{d\rho_2} + \frac{Q^2}{Q_1^2Q_2^2}\,\frac{dQ_1}{d\rho}\,\frac{dQ_2}{d\rho} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Le problème est maintenant réduit à trouver trois fonctions : l'une, $Q$, de $\rho_1$ et $\rho_2$; la seconde, $Q_1$, de $\rho_2$ et $\rho$; la troisième, $Q_2$, de $\rho$ et $\rho_1$, qui vérifient les six équations (9) et (10).

## § III.

Si l'un des trois systèmes conjugués, celui au paramètre $\rho$ par exemple, se compose de plans parallèles, les deux courbures $\frac{1}{\gamma_1}$, $\frac{1}{c_1}$, des surfaces $\rho$, sont nulles généralement; il en est de même des deux courbures $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{\gamma}$, de l'arc $ds$. On a donc, d'après les formules (3),

$$\frac{dH_1}{d\rho} = 0, \quad \frac{dH_2}{d\rho} = 0, \quad \frac{dH}{d\rho_1} = 0, \quad \frac{dH}{d\rho_2} = 0,$$

et par les valeurs (8),

$$\frac{dQ_2}{d\rho} = 0, \quad \frac{dQ_1}{d\rho} = 0, \quad \frac{dQ_2}{d\rho_1} = 0, \quad \frac{dQ_1}{d\rho_2} = 0;$$

c'est-à-dire que les fonctions $Q_1$ et $Q_2$ sont constantes ainsi que $H$. Il est facile de voir que l'on pourra disposer de l'indétermination des paramètres, de telle sorte que $Q_1 = Q_2 = H = 1$; d'où résultera $H_1 = H_2 = Q$, seule fonction encore inconnue. Les équations (9) et (10) deviendront identiques, à l'exception de la dernière, qui se réduira à

$$(11)\qquad \frac{d\,\dfrac{1}{Q}\dfrac{dQ}{d\rho_1}}{d\rho_1} + \frac{d\,\dfrac{1}{Q}\dfrac{dQ}{d\rho_2}}{d\rho_2} = 0,$$

et qui peut être vérifiée par une infinité de fonctions Q. On retombe ainsi dans la classe très-étendue des surfaces cylindriques orthogonales et isothermes, déjà suffisamment étudiée dans une Note spéciale (tome I[er] de ce *Journal*).

Si l'un des trois systèmes conjugués, celui dont le paramètre est $\rho$, se compose de sphères concentriques, $r$ étant le rayon variable, il faut prendre $\rho = \frac{1}{r}$, pour que $\Delta_2 \rho$ soit nul, et l'on a

$$h = \frac{1}{r^2} = \rho^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{dh}{d\rho_1} = 0, \quad \frac{dh}{d\rho_2} = 0,$$

ou, d'après les formules (3),

$$\frac{1}{c} = 0, \quad \frac{1}{\gamma} = 0;$$

en effet, tous les éléments $dS$ sont des lignes droites, et les surfaces orthogonales conjuguées au système sphérique sont des cônes. De plus, les deux courbures $\frac{1}{\gamma_1}$, $\frac{1}{c_2}$, de chaque surface $\rho$, sont égales entre elles et à $\frac{1}{r} = \rho$; on a donc, d'après les formules (3),

$$\frac{1}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho} = \frac{1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho} = \frac{1}{\rho};$$

ou bien l'on a

$$\mathrm{H} = \frac{1}{\rho^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\mathrm{H}}{d\rho_1} = 0, \quad \frac{d\mathrm{H}}{d\rho_2} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mathrm{H}_1}\frac{d\mathrm{H}_1}{d\rho} = \frac{1}{\mathrm{H}_2}\frac{d\mathrm{H}_2}{d\rho} = -\frac{1}{\rho};$$

relations qui donnent définitivement

$$(12) \qquad \mathrm{Q}_1 = \frac{a}{\rho}, \quad \mathrm{Q}_2 = \frac{1}{a\rho},$$

$a$ étant une constante. Ces valeurs (12) de $\mathrm{Q}_1$ et $\mathrm{Q}_2$ rendent identiques les équations (9), ainsi que les deux premières (10); la dernière se réduit à

$$(13) \qquad a^2 \frac{d\,\frac{1}{\mathrm{Q}}\frac{d\mathrm{Q}}{d\rho_1}}{d\rho_1} + \frac{1}{a^2}\frac{d\,\frac{1}{\mathrm{Q}}\frac{d\mathrm{Q}}{d\rho_2}}{d\rho_2} + \mathrm{Q}^2 = 0,$$

et peut être vérifiée par un grand nombre de fonctions Q. On retrouve ainsi la classe des surfaces coniques orthogonales et isothermes, dont la généralité a été reconnue dans un Mémoire précédent (tome IV de ce Journal, page 126).

## § IV.

Supposons encore que les surfaces $\rho$ et $\rho_1$ soient de révolution autour du même axe, et conséquemment les surfaces $\rho_2$ des plans méridiens. Les deux courbures $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{c_1}$, de la surface $\rho_2$, sont généralement nulles; on a donc, d'après les formules (3),

$$\frac{dH}{d\rho_2} = 0, \quad \frac{dH_1}{d\rho_2} = 0,$$

ou, dans les valeurs (8),

$$\frac{dQ_1}{d\rho_2} = 0, \quad \frac{dQ}{d\rho_2} = 0.$$

Ainsi $Q_1$ ne contient que $\rho$, nous le désignerons dorénavant par $p$; pareillement Q ne contient que $\rho_1$, et nous le désignerons par $p_1$; enfin Q, que nous remplacerons par F, contient toujours les deux variables $\rho$ et $\rho_1$. Ces valeurs rendent identiques les deux premières équations (9); la troisième devient, en désignant, pour simplifier, $\frac{dp}{d\rho}$ et $\frac{dp_1}{d\rho}$ par $p'$ et $p'_1$ :

$$\frac{p'p'_1}{pp_1} = \frac{p'}{p\mathrm{F}}\frac{d\mathrm{F}}{d\rho_1} + \frac{p'_1}{p_1\mathrm{F}}\frac{d\mathrm{F}}{d\rho}, \tag{14}$$

et les trois équations (10) se transforment ainsi

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{p}\frac{d\,\frac{1}{p\mathrm{F}}\frac{d\mathrm{F}}{d\rho}}{d\rho} + \frac{1}{p_1}\frac{d\,\frac{1}{p_1\mathrm{F}}\frac{d\mathrm{F}}{d\rho_1}}{d\rho_1} = 0,\\ &\frac{1}{p^2}\frac{d\,\frac{p'}{p}}{d\rho} - \frac{p'}{p^3}\frac{1}{\mathrm{F}}\frac{d\mathrm{F}}{d\rho} + \frac{p'_1}{p_1^3}\frac{1}{\mathrm{F}}\frac{d\mathrm{F}}{d\rho_1} = 0,\\ &\frac{1}{p_1^2}\frac{d\,\frac{p'_1}{p_1}}{d\rho_1} + \frac{p'}{p^3}\frac{1}{\mathrm{F}}\frac{d\mathrm{F}}{d\rho} - \frac{p'_1}{p_1^3}\frac{1}{\mathrm{F}}\frac{d\mathrm{F}}{d\rho_1} = 0. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Si l'on ajoute les deux dernières équations (15), il vient

$$(16)\qquad \frac{1}{p^2}\frac{d\frac{p'}{p}}{d\rho}+\frac{1}{p_1^2}\frac{d\frac{p'_1}{p_1}}{d\rho_1}=0.$$

Or $p$ ne contient que $\rho$, $p_1$ que $\rho_1$; il faut donc que, $k$ désignant une constante, on ait séparément

$$\frac{1}{p^2}\frac{d\frac{p'}{p}}{d\rho}=k,\quad \frac{1}{p_1^2}\frac{d\frac{p'_1}{p_1}}{d\rho_1}=-k.$$

On peut intégrer ces deux équations en les multipliant par $2pdp$, $2p_1dp_1$, ce qui les transforme ainsi

$$d.\left(\frac{p'}{p}\right)^2=kd.p^2,\quad d.\left(\frac{p'_1}{p_1}\right)^2=-kd.p_1^2,$$

d'où l'on conclut, A et B étant deux nouvelles constantes,

$$p'=\frac{dp}{d\rho}=p\sqrt{kp^2-\mathrm{A}},\quad p'_1=\frac{dp_1}{d\rho_1}=p_1\sqrt{\mathrm{B}-kp_1^2},$$

et enfin,

$$\rho=\int\frac{dp}{p\sqrt{kp^2-\mathrm{A}}},\quad \rho_1=\int\frac{dp_1}{p_1\sqrt{\mathrm{B}-kp_1^2}}.$$

Si l'on pose

$$p=\varpi\sqrt{\mathrm{A}},\quad p_1=\varpi_1\sqrt{\mathrm{B}},\quad k=\frac{1}{c^2},$$

ces équations deviennent

$$\frac{\sqrt{\mathrm{A}}}{c}.\rho=\int\frac{d\varpi}{\varpi\sqrt{\varpi^2-c^2}},\quad \frac{\sqrt{\mathrm{B}}}{c}.\rho_1=\int\frac{d\varpi_1}{\varpi_1\sqrt{c^2-\varpi_1^2}};$$

or on peut prendre pour paramètres $\frac{\sqrt{\mathrm{A}}}{c}.\rho$, et $\frac{\sqrt{\mathrm{B}}}{c}.\rho_1$, sans que les paramètres différentiels du second ordre cessent d'être nuls; on ne diminuera donc en rien la généralité du cas actuel, en prenant

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &p'=p\sqrt{p^2-c^2},\quad p'_1=p_1\sqrt{c^2-p_1^2},\\ &\rho=\int_c^p\frac{dp}{p\sqrt{p^2-c^2}},\quad \rho_1=\int_0^{p_1}\frac{dp_1}{p_1\sqrt{c^2-p_1^2}}: \end{aligned}\right.$$

ces valeurs vérifient l'équation (16). Si l'on regarde maintenant F comme une fonction de $p$ et $p_1$, et qu'on ait égard aux valeurs (17), l'équation (14) et les deux dernières équations (15), lesquelles se réduisent à une seule, deviennent

$$(18)\quad \begin{cases} p\dfrac{dF}{dp}+p_1\dfrac{dF}{dp_1}=F, \\ F=\dfrac{p^2-c^2}{p}\dfrac{dF}{dp}-\dfrac{c^2-p_1^2}{p_1}\dfrac{dF}{dp_1}. \end{cases}$$

La première de ces équations réduit la seconde à

$$\frac{1}{p}\frac{dF}{dp}+\frac{1}{p_1}\frac{dF}{dp_1}=0,$$

équation aux différences partielles dont l'intégrale est

$$F=f(p^2-p_1^2);$$

or, si l'on pose

$$(p^2-p_1^2)=z,$$

cette valeur générale de F, substituée dans la première des équations (18), exige que l'on ait

$$2z\frac{df}{dz}=f,\quad \text{d'où}\quad f=G\sqrt{z};$$

on doit donc prendre

$$(19)\qquad F=\sqrt{p^2-p_1^2};$$

car la constante G, qui serait facteur du radical, pourrait toujours être ramenée à l'unité en changeant convenablement le paramètre $\rho_2$. On reconnaîtra facilement que cette valeur (19) de F vérifie la première des équations (15), en ayant égard aux relations (17).

Ainsi, $p$ et $p_1$ étant déterminés par les relations (17), on a

$$Q=p_1,\quad Q_1=p,\quad Q_2=F=\sqrt{p^2-p_1^2};$$

d'où

$$H=p\sqrt{p^2-p_1^2},\quad H_1=p_1\sqrt{p^2-p_1^2},\quad H_2=pp_1.$$

et enfin,

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} & h=\frac{1}{p\sqrt{p^2-p_1^2}},\quad h_1=\frac{1}{p_1\sqrt{p^2-p_1^2}},\quad h_2=\frac{1}{pp_1},\\ & \int_c^p \frac{dp}{p\sqrt{p^2-c^2}}=\rho,\quad \int_0^{p_1}\frac{dp_1}{p_1\sqrt{c^2-p_1^2}}=\rho_1. \end{aligned}\right.$$

Il s'agit maintenant de trouver en coordonnées rectilignes les équations des surfaces de révolution, orthogonales et isothermes, toutes caractérisées par les valeurs (20).

## § V.

Les valeurs (20), substituées dans les formules (3), donnent

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{1}{c}=\frac{p_1\sqrt{c^2-p_1^2}}{(p^2-p_1^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{1}{c_1}=0,\quad \frac{1}{c_2}=\frac{-\sqrt{p^2-c^2}}{p\sqrt{p^2-p_1^2}},\\ & \frac{1}{\gamma}=0,\quad \frac{1}{\gamma_1}=\frac{-p\sqrt{p^2-c^2}}{(p^2-p_1^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{1}{\gamma_2}=\frac{-\sqrt{p^2-p_1^2}}{p_1\sqrt{c^2-p_1^2}}. \end{aligned}\right.$$

Les deux limites de $p$ sont $c$ et l'infini, celles de $p_1$, zéro et $c$. Il résulte des expressions (21) que les deux courbures $\frac{1}{\gamma_1}$, $\frac{1}{c_2}$, des surfaces $\rho$, sont nulles, quel que soit $p_1$, quand $p=c$, ou $\rho=0$; que les deux courbures $\frac{1}{\gamma_2}$, $\frac{1}{c}$, des surfaces $\rho_1$, sont l'une infinie, l'autre nulle, quel que soit $p$ ou $\rho$, quand $p_1=0$, ou $\rho_1=0$. On conclut de là que la surface $\rho_1$, correspondante à $p_1=0$, se réduit à une droite, laquelle ne peut être que l'axe de révolution lui-même, et que la surface $\rho$ correspondante à $p=c$ est une aire plane, laquelle est nécessairement perpendiculaire à la surface $p_1=0$, ou à l'axe de révolution.

Cet axe et cette aire plane, si intimement liés au système orthogonal que nous étudions, assignent aux coordonnées rectilignes leur position naturelle. En effet, il conviendra de prendre pour axe des $z$, l'axe de révolution ou la surface $\rho_1=0$, et pour plan des $xy$ l'aire plane correspondante à $p=c$, ou à $\rho=0$.

Ainsi, en intégrant les équations (5), afin de trouver les valeurs de $x, y, z$, en $\rho, \rho_1, \rho_2$, il faudra que $x$ et $y$ deviennent nuls pour $\rho_1=0$, ou $p_1 = 0$, et $z$ pour $\rho = 0$, ou $p = c$. De plus, il est évident que $x$ et $y$ dépendront du paramètre $\rho_2$, ou de l'azimut des plans méridiens, mais que $z$ en sera indépendant.

La première des équations (5), transformée en $p$ et $p_1$, à l'aide des formules (20), devient

$$(22)\qquad (p^2 - p_1^2)\frac{d^2\varphi}{dp\,dp_1} + p_1\frac{d\varphi}{dp} - p\frac{d\varphi}{dp_1} = 0;$$

si l'on y pose $\varphi = \mathrm{PP}_1$, P ne contenant que $p$, $\mathrm{P}_1$ que $p_1$, on trouve

$$p^2 - \frac{p\mathrm{P}}{\left(\frac{d\mathrm{P}}{dp}\right)} = p_1^2 - \frac{p_1\mathrm{P}_1}{\left(\frac{d\mathrm{P}_1}{dp_1}\right)};$$

or le premier membre ne contient que $p$, le second que $p_1$, il faut donc que leur valeur commune A soit indépendante de $p$ et $p_1$; on aura alors séparément

$$\frac{d\mathrm{P}}{\mathrm{P}} = \frac{p\,dp}{p^2 - \mathrm{A}},\qquad \frac{d\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}_1} = \frac{p_1\,dp_1}{p_1^2 - \mathrm{A}},$$

d'où

$$\mathrm{P} = \sqrt{p^2 - \mathrm{A}},\quad \mathrm{P}_1 = \sqrt{p_1^2 - \mathrm{A}}.$$

Il suit de là que l'intégrale générale de l'équation (22) peut être mise sous la forme

$$(23)\qquad \varphi = \sum \sqrt{\mathrm{B}(p^2 - \mathrm{A})(p_1^2 - \mathrm{A})},$$

où B et A, constants relativement à $p$ et $p_1$, varient d'un terme à l'autre de la série. Les trois coordonnées $x$, $y$, $z$, considérées comme des fonctions de $p$, $p_1$, et $\rho_2$, seront donc de la forme (23).

Mais s'il s'agit de $x$ ou de $y$, comme elles doivent s'évanouir pour $p_1 = 0$, A sera nécessairement nul; le produit $pp_1$ sera facteur de tous les termes de la série; et si l'on pose $\sum\sqrt{\mathrm{B}} = \mathrm{M}$ pour $x$, $\sum\sqrt{\mathrm{B}} = \mathrm{N}$ pour $y$, on aura

$$(24)\qquad x = pp_1\mathrm{M},\quad y = pp_1\mathrm{N};$$

M et N étant des fonctions encore inconnues du paramètre $\rho_2$ seul.

S'il s'agit de $z$, comme il doit s'évanouir pour $p=c$, il faudra que A soit égal à $c^2$, dans tous les termes de la série (23); et si l'on pose $\sum\sqrt{-B} = \frac{1}{g}$, on aura

$$gz = \sqrt{p^2 - c^2}\sqrt{c^2 - p_1^2}, \tag{25}$$

$g$ étant constant, puisque $z$ doit être indépendant de $\rho_2$.

Il ne reste plus qu'à déterminer les fonctions M et N et la constante $g$.

## § VI.

Les valeurs (24), mises successivement à la place de $\varphi$, dans la seconde et la troisième des équations (5), les vérifient, quelles que soient d'ailleurs les fonctions M et N; la valeur de $z$, formule (25), rend les mêmes équations identiques, puisque $z$, $h$, $h_1$, $h_2$, sont indépendants de $\rho_2$. Il n'y a donc plus que la dernière équation (5) dont la vérification nécessaire puisse servir à la détermination de M, N, et $g$.

Cette dernière équation (5), transformée en $p$, $p_1$, à l'aide des formules (20), devient

$$(p^2 - c^2)\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + (c^2 - p_1^2)\left(\frac{d\varphi}{dp_1}\right)^2 = (p^2 - p_1^2)\left[1 - \left(\frac{1}{pp_1}\frac{d\varphi}{d\rho_2}\right)^2\right]; \tag{26}$$

si l'on y substitue successivement, à la place de $\varphi$, les valeurs (24) de $x$ et $y$, $(p^2 - p_1^2)$ devient facteur commun, et en supprimant ce facteur on a

$$c^2 M^2 = 1 - \left(\frac{dM}{d\rho_2}\right)^2, \quad c^2 N^2 = 1 - \left(\frac{dN}{d\rho_2}\right)^2;$$

d'où l'on conclut, par l'intégration, que M et N doivent être égales à l'une ou à l'autre des deux fonctions,

$$\frac{1}{c}\cos c\rho_2, \quad \frac{1}{c}\sin c\rho_2;$$

car la constante qu'il faudrait ajouter à l'arc $c\rho_2$ peut être supprimée.

Si l'on prend pour M l'une de ces valeurs, il faudra prendre l'autre pour N, sinon les valeurs (24) ne vérifieraient pas les équations

$$\frac{dx}{d\rho}\frac{dx}{d\rho_2} + \frac{dy}{d\rho}\frac{dy}{d\rho_2} = 0, \quad \frac{dx}{d\rho_1}\frac{dx}{d\rho_2} + \frac{dy}{d\rho_1}\frac{dy}{d\rho_2} = 0,$$

qui doivent avoir lieu, puisque les surfaces $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$, sont orthogonales, et que $z$ ne contient pas $\rho_2$ dans le système d'axes choisi.

Si l'on substitue dans l'équation (26), à la place de $\varphi$, la valeur de $z$, formule (25), il vient

$$p^2(c^2-p_1^2)+p_1^2(p^2-c^2)=(p^2-p_1^2)g^2,$$

ou, en réduisant et supprimant le facteur commun $(p^2-p_1^2)$,

$$c^2=g^2;$$

ainsi la constante $g$ doit être égale à $c$.

On a donc enfin, pour les valeurs de $x$, $y$, $z$, en $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$,

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} cx &= pp_1\cos c\rho_2,\\ cy &= pp_1\sin c\rho_2,\\ cz &= \sqrt{p^2-c^2}\sqrt{c^2-p_1^2}.\end{aligned}\right.$$

L'élimination successive de $p_1$ et $\rho_2$, de $\rho_2$ et $p$, de $p$ et $p_1$, entre ces trois équations, donne pour résultats,

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2+y^2}{p^2}+\frac{z^2}{p^2-c^2}=1,\\ &\frac{x^2+y^2}{p_1^2}-\frac{z^2}{c^2-p_1^2}=1,\\ &\frac{y}{x}=\operatorname{tang} c\rho_2,\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire que les seuls systèmes de surfaces de révolution, à la fois orthogonales et isothermes, sont du second ordre.

## § VII.

La première des équations (28) ne représente que les ellipsoïdes de révolution autour du petit axe. Mais on peut, en changeant convenablement la constante $c$ et les paramètres, transformer les équations (27) de manière à obtenir les ellipsoïdes de révolution autour du grand axe. En effet, si l'on pose

$$c^2=-b^2,\quad p^2=r^2-b^2,\quad p_1^2=r_1^2-b^2,\quad \rho_2=-r_2\sqrt{-1}.$$

les équations (27) deviennent

$$(29)\quad \begin{cases} bx = \sqrt{r^2 - b^2}\,\sqrt{b^2 - r_1^2}\cos br_2, \\ by = \sqrt{r^2 - b^2}\,\sqrt{b^2 - r_1^2}\sin br_2, \\ bz = rr_1, \end{cases}$$

et donnent par l'élimination successive de deux des paramètres $r$, $r_1$, $r_2$,

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{z^2}{r^2} + \dfrac{x^2+y^2}{r^2-b^2} = 1, \\ \dfrac{z^2}{r_1^2} - \dfrac{x^2+y^2}{b^2-r_1^2} = 1, \\ \dfrac{y}{x} = \operatorname{tang} br_2; \end{cases}$$

or, la première de ces équations représente des ellipsoïdes de révolution autour du grand axe.

Ainsi les équations (27) comprennent implicitement les deux groupes généraux des surfaces de révolution du second ordre, à la fois orthogonales et isothermes. Si le groupe aux ellipsoïdes aplatis se présente ici plus naturellement que le système aux ellipsoïdes allongés, cela tient uniquement à la méthode adoptée pour intégrer l'équation (16). Par une autre méthode, que nous allons développer, on est conduit directement aux groupes (29) et (30), et au contraire par transformation aux groupes (27) et (28).

## § VIII.

Remontons aux équations (14) et (15), dans lesquelles $p$ ne contient que $\rho$, $p_1$ que $\rho_1$, et F est fonction de $\rho$ et $\rho_1$. En ajoutant les deux dernières équations (15), on obtient l'équation (16), qu'il s'agit d'intégrer d'une autre manière. Soient $r$ et $r_1$ deux nouvelles fonctions, l'une de $\rho$, l'autre de $\rho_1$, données par les équations

$$dr = p^2 d\rho, \quad dr_1 = p_1^2 d\rho_1,$$

d'où

$$(31)\quad \rho = \int \frac{dr}{p^2}, \quad \rho_1 = \int \frac{dr_1}{p_1^2};$$

en regardant maintenant $p$ comme fonction de $r$, $p_1$ de $r_1$, l'équation (16) se mettra sous la forme

$$\frac{d^2(p^2)}{dr^2} + \frac{d^2(p_1^2)}{dr_1^2} = 0, \tag{32}$$

et $k$ représentant une constante, on devra avoir séparément

$$\frac{d^2(p^2)}{dr^2} = 2k, \quad \frac{d^2(p_1^2)}{dr_1^2} = -2k,$$

d'où l'on conclut, A et B étant deux nouvelles constantes,

$$p^2 = kr^2 - \mathrm{A}, \quad p_1^2 = \mathrm{B} - kr_1^2,$$

et enfin

$$\rho = \int \frac{dr}{\sqrt{kr^2 - \mathrm{A}}}, \quad \rho_1 = \int \frac{dr_1}{\sqrt{\mathrm{B} - kr_1^2}}.$$

Si l'on pose

$$r = \varpi\sqrt{\mathrm{A}}, \quad r_1 = \varpi_1\sqrt{\mathrm{B}}, \quad k = \frac{1}{b^2},$$

les équations précédentes deviennent

$$\frac{\sqrt{\mathrm{A}}}{b}\rho = \int \frac{d\varpi}{\sqrt{\varpi^2 - b^2}}, \quad \frac{\sqrt{\mathrm{B}}}{b^2}\rho_1 = \int \frac{d\varpi_1}{\sqrt{b^2 - \varpi_1^2}};$$

or, on peut prendre pour paramètres $\frac{\sqrt{\mathrm{A}}}{b^2}\rho$, $\frac{\sqrt{\mathrm{B}}}{b^2}\rho_1$, sans que les paramètres différentiels du second ordre cessent d'être nuls; on ne diminuera donc pas la généralité du cas actuel, en prenant

$$\left\{\begin{array}{ll} \rho = \int \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}}, & \rho_1 = \int \frac{dr_1}{\sqrt{b^2 - r_1^2}}, \\ p = \sqrt{r^2 - b^2}, & p_1 = \sqrt{b^2 - r_1^2}. \end{array}\right. \tag{33}$$

Ces valeurs vérifient l'équation (16). Si l'on regarde F comme fonction de $r$ et $r_1$, l'équation (14) et les deux dernières équations (15) donnent, en réduisant,

$$r\frac{d\mathrm{F}}{dr} + r_1\frac{d\mathrm{F}}{dr_1} = \mathrm{F},$$
$$\frac{1}{r}\frac{d\mathrm{F}}{dr} + \frac{1}{r_1}\frac{d\mathrm{F}}{dr_1} = 0,$$

et conduisent, par un calcul déjà fait, § IV, à

$$F = \sqrt{r^2 - r_1^2}, \tag{34}$$

forme qui vérifie aussi la première des équations (15).

On a enfin, pour les valeurs de $h$, $h_1$, $h_2$, qu'il s'agissait de trouver,

$$\left\{\begin{aligned} &h = \frac{1}{\sqrt{r^2 - b^2}\sqrt{r^2 - r_1^2}}, \quad h_1 = \frac{1}{\sqrt{b^2 - r_1^2}\sqrt{r^2 - r_1^2}}, \quad h_2 = \frac{1}{\sqrt{r^2 - b^2}\sqrt{b^2 - r_1^2}}, \\ &\int_b^r \frac{dr}{r^2 - b^2} = \rho, \qquad \int_0^{r_1} \frac{dr_1}{b^2 - r_1^2} = \rho_1; \end{aligned}\right. \tag{35}$$

à l'aide de ces valeurs on peut calculer les six courbures (3); conclure de leurs propriétés le système d'axes rectilignes qu'il convient de choisir; intégrer les équations (5), en suivant identiquement la marche développée aux §§ V et VI, et l'on arrive alors aux équations (29) et (30).

## § IX.

Abordons maintenant le cas général, c'est-à-dire l'intégration des équations (9) et (10), sans supposer qu'aucune des six courbures soit généralement nulle. $Q$, $Q_1$, $Q_2$ sont alors respectivement fonctions de $(\rho_1, \rho_2)$, de $(\rho_2, \rho)$, de $(\rho, \rho_1)$. Posons, pour simplifier,

$$\left\{\begin{aligned} Q &= A\frac{dQ}{d\rho_1} = B\frac{dQ}{d\rho_2}, \\ Q_1 &= A_1\frac{dQ_1}{d\rho_2} = B_1\frac{dQ_1}{d\rho}, \\ Q_2 &= A_2\frac{dQ_2}{d\rho} = B_2\frac{dQ_2}{d\rho_1}. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Les équations (9) se transforment ainsi,

$$\left\{\begin{aligned} AA_1 + BB_2 &= AB, \\ A_1A_2 + B_1B &= A_1B_1, \\ A_2A + B_2B_1 &= A_2B_2; \end{aligned}\right. \tag{37}$$

d'où l'on conclut, en ajoutant les deux premières respectivement multipliées par $B_1$ et $A$,

$$AA_1A_2 + BB_1B_2 = 0. \tag{38}$$

D'après les relations (36), $A$ et $B$ ne contiennent pas $\rho$, $A_1$ et $B_1$ pas $\rho_1$, $A_2$ et $B_2$ non $\rho_2$. Or, les équations (37), ayant lieu pour toutes les valeurs de $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$, auront encore lieu lorsque l'on y fera, ou $\rho = 0$, ou $\rho_1 = 0$, ou $\rho_2 = 0$. Désignons ainsi qu'il suit les valeurs que prennent $A, B, A_1, B_1, A_2, B_2$, quand l'une des variables qu'elles contiennent est nulle :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Pour } \rho=0: \; A=A,\; B=B,\; A_1=\alpha_2,\; B_1=b_2,\; A_2=a_1,\; B_2=\beta_1; \\ \text{Pour } \rho_1=0: \; A=a_2,\; B=\beta_2,\; A_1=A_1,\; B_1=B_1,\; A_2=\alpha,\; B_2=b; \\ \text{Pour } \rho_2=0: \; A=\alpha_1,\; B=b_1,\; A_1=a,\; B_1=\beta,\; A_2=A_2,\; B_2=B_2. \end{array}\right. \tag{39}$$

$a, \alpha, b, \beta$, ne contiennent que $\rho$; $a_1, \alpha_1, b_1, \beta_1$, que $\rho_1$; $a_2, \alpha_2, b_2, \beta_2$, que $\rho_2$. Les équations (37) deviendront alors

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{Pour } \rho=0. & \text{Pour } \rho_1=0. & \text{Pour } \rho_2=0. \\ A\alpha_2+B\beta_1=AB, & a_2A_1+\beta_2 b=a_2\beta_2, & \alpha_1 a+b_1B_2=\alpha_1 b_1, \\ \alpha_2 a_1+b_2B=\alpha_2 b_2, & A_1\alpha+B_1\beta_2=A_1B_1, & aA_2+\beta b_1=a\beta, \\ a_1A+\beta_1 b_2=a_1\beta_1, & \alpha a_2+bB_1=\alpha b, & A_2\alpha_1+B_2b_1=A_2B_2. \end{array}\right. \tag{40}$$

Parmi ces neuf équations, celles, au nombre de six, qui ne contiennent qu'une des fonctions $A, B, A_1, B_1, A_2, B_2$, donnent pour les valeurs de ces fonctions

$$\left\{\begin{array}{lll} A=\dfrac{\beta_1}{a_1}(a_1-b_2), & A_1=-\dfrac{\beta_2}{a_2}(b-a_2), & A_2=\dfrac{\beta}{a}(a-b_1), \\ B=-\dfrac{\alpha_2}{b_2}(a_1-b_2), & B_1=\dfrac{\alpha}{b}(b-a_2), & B_2=-\dfrac{\alpha_1}{b_1}(a-b_1), \end{array}\right. \tag{41}$$

et les trois autres équations (40) sont vérifiées par ces valeurs.

L'équation (38) devant être satisfaite, il faudra que l'on ait

$$\frac{\beta\beta_1\beta_2}{aa_1a_2} = \frac{\alpha\alpha_1\alpha_2}{bb_1b_2}. \tag{42}$$

## § X.

Les valeurs (41), substituées dans les relations (3), donnent

$$(43)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{Q}\dfrac{dQ}{d\rho_1} = \dfrac{1}{A} = \dfrac{a_1}{(a_1-b_2)\beta_1}, & \dfrac{1}{Q}\dfrac{dQ}{d\rho_2} = \dfrac{1}{B} = -\dfrac{b_2}{(a_1-b_2)\alpha_2}, \\ \dfrac{1}{Q_1}\dfrac{dQ_1}{d\rho_2} = \dfrac{1}{A_1} = -\dfrac{a_2}{(b-a_2)\beta_2}, & \dfrac{1}{Q_1}\dfrac{dQ_1}{d\rho_2} = \dfrac{1}{B_1} = \dfrac{b}{(b-a_2)\alpha}, \\ \dfrac{1}{Q_2}\dfrac{dQ_2}{d\rho} = \dfrac{1}{A_2} = \dfrac{a}{(a-b_1)\beta}, & \dfrac{1}{Q_2}\dfrac{dQ_2}{d\rho_1} = \dfrac{1}{B_2} = -\dfrac{b_1}{(a-b_1)\alpha_1}; \end{cases}$$

ce qui conduit aux relations différentielles suivantes, comme conditions d'intégrabilité :

$$\frac{a_1}{\beta_1}\frac{db_2}{d\rho_2} = \frac{b_2}{\alpha_2}\frac{da_1}{d\rho_1},\quad \frac{a_2}{\beta_2}\frac{db}{d\rho} = \frac{b}{\alpha}\frac{da_2}{d\rho_2},\quad \frac{a}{\beta}\frac{db_1}{d\rho_1} = \frac{b_1}{\alpha_1}\frac{da}{d\rho};$$

d'où l'on conclut

$$(44)\quad \begin{cases} \dfrac{b_2}{\alpha_2} = i\dfrac{db_2}{d\rho_2}, & \dfrac{b}{\alpha} = i_1\dfrac{db}{d\rho}, & \dfrac{b_1}{\alpha_1} = i_2\dfrac{db_1}{d\rho_1}, \\ \dfrac{a_1}{\beta_1} = i\dfrac{da_1}{d\rho_1}, & \dfrac{a_2}{\beta_2} = i_1\dfrac{da_2}{d\rho_2}, & \dfrac{a}{\beta} = i_2\dfrac{da}{d\rho}, \end{cases}$$

$i$, $i_1$, $i_2$ étant nécessairement constants.

De ces valeurs (44) on déduit, par l'intégration des équations (43),

$$(45)\quad Q = (a_1 - b_2)^i,\quad Q_1 = (b - a_2)^{i_1},\quad Q_2 = (a - b_1)^{i_2};$$

en outre, ces mêmes valeurs (44), combinées avec la relation nécessaire (42), donnent

$$\frac{db}{d\rho}\frac{db_1}{d\rho_1}\frac{db_2}{d\rho_2} = \frac{da}{d\rho}\frac{da_1}{d\rho_1}\frac{da_2}{d\rho_2},$$

équation qui, pour être satisfaite, exige que l'on ait

$$(46)\quad \begin{cases} a = m\mathrm{f}, & a_1 = m_1\mathrm{f}_1, & a_2 = m_2\mathrm{f}_2, \\ b = n\mathrm{f}, & b_1 = n_1\mathrm{f}_1, & b_2 = n_2\mathrm{f}_2, \end{cases}$$

f ne contenant que $\rho$, $\mathrm{f}_1$ que $\rho_1$, $\mathrm{f}_2$ que $\rho_2$ [*]; $m$, $n$, $m_1$, $n_1$, $m_2$, $n_2$

[*] On pourrait penser que les valeurs (46) ne sont pas les plus générales, et qu'il

étant des constantes liées entre elles par la relation

$$(47)\qquad mm_1m_2 = nn_1n_2.$$

Par ces valeurs (46) les fonctions Q, $Q_1$, $Q_2$ (45) se présentent sous la forme

$$Q = (m_1\mathrm{f}_1 - n_2\mathrm{f}_2)^i,\quad Q_1 = (n\mathrm{f} - m_2\mathrm{f}_2)^{i_1},\quad Q_2 = (m\mathrm{f} - n_1\mathrm{f}_1)^{i_2};$$

mais, pour que ces valeurs vérifient réellement les équations (9), il faut que $i_2 = i_1 = i$. En effet, lorsqu'on les substitue dans la première (9), par exemple, on trouve

$$i(i_2nn_1n_2 - i_1mm_1m_2)\mathrm{f} + i_1(i-i_2)n_1m_1m_2\mathrm{f}_1 + i_2(i_1-i)m_2n_1n_2\mathrm{f}_2 = 0;$$

et, comme $nn_1n_2 = mm_1m_2$ (47), cette équation ne peut être satisfaite, quels que soient f, $\mathrm{f}_1$, $\mathrm{f}_2$, que si l'on a $i_2 = i_1 = i$.

---

manque une constante dans chacun des groupes $(a, b)$ $(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2)$; mais cette plus grande généralité n'est qu'apparente. En effet, si l'on pose

$$a = m\mathrm{f} + r_2,\quad a_1 = m_1\mathrm{f}_1 + r,\quad a_2 = m_2\mathrm{f}_2 - r_1,$$
$$b = n\mathrm{f},\qquad b_1 = n_1\mathrm{f}_1,\qquad b_2 = n_2\mathrm{f}_2,$$

$m$, $m_1$, $m_2$, $n$, $n_1$, $n_2$ vérifiant nécessairement la relation (47), et les trois autres constantes $r$, $r_1$, $r_2$ étant arbitraires, les valeurs de Q, $Q_1$, $Q_2$ (45) deviennent

$$Q = (m_1\mathrm{f}_1 - n_2\mathrm{f}_2 + r)^i,\quad Q_1 = (n\mathrm{f} - m_2\mathrm{f}_2 + r_1)^{i_1},\quad Q_2 = (m\mathrm{f} - n_1\mathrm{f}_1 + r_2)^{i_2}.$$

Pour que ces valeurs puissent vérifier les trois équations (9), quels que soient f, $\mathrm{f}_1$, $\mathrm{f}_2$, il faut d'abord, comme le texte le démontre, que les exposants $i$, $i_1$, $i_2$ soient égaux, et ensuite que les constantes $r$, $r_1$, $r_2$ soient liées par les équations

$$m_2n_1r - n_1n_2r_1 + m_1m_2r_2 = 0,\quad m_2mr - mn_2r_1 + n_2nr_2 = 0,\quad nn_1r - mm_1r_1 + m_1nr_2 = 0.$$

Or, on satisfait généralement à ces relations en prenant

$$r = m_1\alpha_1 - n_2\alpha_2,\quad r_1 = n\alpha - m_2\alpha_2,\quad r_2 = m\alpha - n_1\alpha_1,$$

$\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ étant trois nouvelles constantes; d'où résulte

$$Q = [m_1(\mathrm{f}_1+\alpha_1) - n_2(\mathrm{f}_2+\alpha_2)]^i,\quad Q_1 = [n(\mathrm{f}+\alpha) - m_2(\mathrm{f}_2+\alpha_2)]^i,\quad Q_2 = [m(\mathrm{f}+\alpha) - n_1(\mathrm{f}_1+\alpha_1)]^i,$$

ou plus simplement les valeurs (48), puisque, les fonctions f, $\mathrm{f}_1$, $\mathrm{f}_2$ étant indéterminées, on peut supprimer les constantes $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$.

Donc enfin, les formes les plus générales des fonctions $Q$, $Q_1$, $Q_2$, qui puissent vérifier les équations (9), sont

$$(48)\quad Q = (m_1\mathrm{f}_1 - n_2\mathrm{f}_2)^i,\quad Q_1 = (n\mathrm{f} - m_2\mathrm{f}_2)^i,\quad Q_2 = (m\mathrm{f} - n_1\mathrm{f}_1)^i,$$

dans lesquelles $m$, $m_1$, $m_2$, $n$, $n_1$, $n_2$ sont des constantes liées entre elles par la relation (47), $\mathrm{f}$ une fonction de $\rho$, $\mathrm{f}_1$ de $\rho_1$, $\mathrm{f}_2$ de $\rho_2$.

Il s'agit maintenant de déterminer les fonctions $\mathrm{f}$, $\mathrm{f}_1$, $\mathrm{f}_2$, l'exposant $i$, et les constantes $m$, $m_1$, $m_2$, $n$, $n_1$, $n_2$, de telle sorte que les valeurs (48) vérifient les équations différentielles (10).

## § XI.

Posons, pour simplifier,

$$(49)\left\{\begin{array}{lll} m_1\mathrm{f}_1 - n_2\mathrm{f}_2 = q, & n\mathrm{f} - m_2\mathrm{f}_2 = q_1, & m\mathrm{f} - n_1\mathrm{f}_1 = q_2; \\ Q = q^i, & Q_1 = q_1^i, & Q_2 = q_2^i; \\ \dfrac{d\mathrm{f}}{d\rho} = \mathrm{f}',\ \dfrac{d^2\mathrm{f}}{d\rho^2} = \mathrm{f}''; & \dfrac{d\mathrm{f}_1}{d\rho_1} = \mathrm{f}'_1,\ \dfrac{d^2\mathrm{f}_1}{d\rho_1^2} = \mathrm{f}''_1; & \dfrac{d\mathrm{f}_2}{d\rho_2} = \mathrm{f}'_2,\ \dfrac{d^2\mathrm{f}_2}{d\rho_2^2} = \mathrm{f}''_2. \end{array}\right.$$

Les équations (10), développées, deviennent alors

$$(50)\left\{\begin{array}{l} q^{2i}\left(m\mathrm{f}'' - \dfrac{m^2}{q_2}\mathrm{f}'^2 - \dfrac{imn}{q_1}\mathrm{f}'^2\right) - q_1^{2i}\left(n_1\mathrm{f}''_1 + \dfrac{n_1^2}{q_2}\mathrm{f}'^2_1 - \dfrac{im_1n_1}{q}\mathrm{f}'^2_1\right) + q_2^{2i+1}\dfrac{im_2n_2}{qq_1}\mathrm{f}'^2_2 = 0, \\ q^{2i}\left(n\mathrm{f}'' - \dfrac{n^2}{q_1}\mathrm{f}'^2 - \dfrac{imn}{q_2}\mathrm{f}'^2\right) - q_1^{2i+1}\dfrac{im_1n_1}{q_2q}\mathrm{f}'^2_1 - q_2^{2i}\left(m_2\mathrm{f}''_2 + \dfrac{m_2^2}{q_1}\mathrm{f}'^2_1 + \dfrac{im_2n_2}{q}\mathrm{f}'^2_2\right) = 0, \\ q^{2i+1}\dfrac{imn}{q_1q_2}\mathrm{f}'^2 + q_1^{2i}\left(m_1\mathrm{f}''_1 - \dfrac{m_1^2}{q}\mathrm{f}'^2_1 + \dfrac{im_1n_1}{q_2}\mathrm{f}'^2_1\right) - q_2^{2i}\left(n_2\mathrm{f}''_2 + \dfrac{n_2^2}{q}\mathrm{f}'^2_2 + \dfrac{im_2n_2}{q_1}\mathrm{f}'^2_2\right) = 0. \end{array}\right.$$

On peut poser

$$\mathrm{f}'^2 = F,\quad \mathrm{f}'^2_1 = F_1,\quad \mathrm{f}'^2_2 = F_2,$$

et regarder $F$ comme fonction de $\mathrm{f}$, $F_1$ de $\mathrm{f}_1$, $F_2$ de $\mathrm{f}_2$, d'où

$$(51)\left\{\begin{array}{l} \rho = \displaystyle\int\frac{d\mathrm{f}}{\sqrt{F}},\quad \rho_1 = \int\frac{d\mathrm{f}_1}{\sqrt{F_1}},\quad \rho_2 = \int\frac{d\mathrm{f}_2}{\sqrt{F_2}}, \\ \mathrm{f}'' = \frac{1}{2}\dfrac{dF}{d\mathrm{f}},\quad \mathrm{f}''_1 = \frac{1}{2}\dfrac{dF_1}{d\mathrm{f}_1},\quad \mathrm{f}''_2 = \frac{1}{2}\dfrac{dF_2}{d\mathrm{f}_2}. \end{array}\right.$$

Les équations (50) deviennent alors

$$(52)\quad\begin{cases} mq^{2i-1}\left(q_1\dfrac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{f}}-\dfrac{2mq_1}{q_2}\mathrm{F}-2in\,\mathrm{F}\right)-nq_1^{2i+1}\left(q\dfrac{d\mathrm{F}_1}{d\mathrm{f}_1}+\dfrac{2n_1q}{q_2}-2im_1\mathrm{F}_1\right)+2im_2n_2q_2^{2i+1}\mathrm{F}_2=0,\\ nq^{2i-1}\left(q_2\dfrac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{f}}-\dfrac{2nq_2}{q_1}\mathrm{F}-2im\mathrm{F}\right)-2im_1n_1q_1^{2i+1}\mathrm{F}_1-m_2q_2^{2i+1}\left(q\dfrac{d\mathrm{F}_2}{d\mathrm{f}_2}+\dfrac{2m_2q}{q_1}\mathrm{F}_2+2in_2\mathrm{F}_2\right)=0,\\ 2imnq^{2i-1}\mathrm{F}+m_1q_1^{2i+1}\left(q_2\dfrac{d\mathrm{F}_1}{d\mathrm{f}_1}-\dfrac{2m_1q_2}{q}\mathrm{F}_1+2in_1\mathrm{F}_1\right)-n_2q_2^{2i+1}\left(q\dfrac{d\mathrm{F}_2}{d\mathrm{f}_2}+\dfrac{2n_2q_1}{q}\mathrm{F}_2+2im_2\mathrm{F}_2\right)=0.\end{cases}$$

Si l'on ajoute ces trois équations, après les avoir multipliées, la première par $nn_2q_2$, la seconde par $-mn_2q_1$, la troisième par $mm_2q$, les termes en $\frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{f}}$, $\frac{d\mathrm{F}_1}{d\mathrm{f}_1}$, $\frac{d\mathrm{F}_2}{d\mathrm{f}_2}$ se détruisent; de plus, à l'aide de la relation (47) et de l'identité $mn_2q_1=nn_2q_2+mm_2q$, on met facilement le résultat sous la forme

$$(53)\qquad 2nm_2(2i-1)\left(m_2q^{2i+2}\mathrm{F}+\frac{mm_1}{n}\frac{n_1n_2}{m_2}q_1^{2i+2}\mathrm{F}_1+n_2^2q_2^{2i+2}\mathrm{F}_2\right)=0.$$

Or, d'après la relation (47),

$$\frac{mm_1}{n}=\frac{n_1n_2}{m_2},$$

et le facteur

$$\left[m^2q^{2i+2}\mathrm{f}'^2+\left(\frac{n_1n_2}{m_2}\right)^2q_1^{2i+2}\mathrm{f}'^2_1\qquad {}^2_2q_2^{2i+2}\mathrm{f}'^2_2\right]$$

est essentiellement positif; l'équation (53) ne peut donc être satisfaite que par l'annulation du facteur $(2i-1)$.

Ainsi $i=\frac{1}{2}$, et l'on a

$$(54)\qquad \mathrm{Q}=\sqrt{m_1\mathrm{f}_1-n_2\mathrm{f}_2},\quad \mathrm{Q}_1=\sqrt{n\mathrm{f}-m_2\mathrm{f}_2},\quad \mathrm{Q}_2=\sqrt{m\mathrm{f}-n_1\mathrm{f}_1}.$$

Faisant donc $i=\frac{1}{2}$, dans les équations (52), elles deviennent

$$(55)\quad\begin{cases} mq\left[\dfrac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{f}}-\left(\dfrac{2m}{q_2}+\dfrac{n}{q_1}\right)\mathrm{F}\right]-n_1q_1\left[\dfrac{d\mathrm{F}_1}{d\mathrm{f}_1}+\left(\dfrac{2n_1}{q_2}-\dfrac{m_1}{q}\right)\mathrm{F}_1\right]+m_2n_2\dfrac{q_2^2}{qq_1}\mathrm{F}_2=0,\\ nq\left[\dfrac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{f}}-\left(\dfrac{2n}{q_1}+\dfrac{m}{q_2}\right)\mathrm{F}\right]-m_1n_1\dfrac{q_1^2}{q_2q}\mathrm{F}_1-m_2q_2\left[\dfrac{d\mathrm{F}_2}{d\mathrm{f}_2}+\left(\dfrac{2m_2}{q_1}+\dfrac{n_2}{q}\right)\mathrm{F}_2\right]=0,\\ mn\dfrac{q^2}{q_1q_2}\mathrm{F}+m_1q_1\left[\dfrac{d\mathrm{F}_1}{d\mathrm{f}_1}-\left(\dfrac{2m_1}{q}-\dfrac{n_1}{q_2}\right)\mathrm{F}_1\right]-n_2q_2\left[\dfrac{d\mathrm{F}_2}{d\mathrm{f}_2}+\left(\dfrac{2n_2}{q}+\dfrac{m_2}{q_1}\right)\mathrm{F}_2\right]=0,\end{cases}$$

et l'équation (53) étant maintenant identique, l'une des équations (55) est une conséquence des deux autres.

Le problème se trouve actuellement ramené à l'intégration des équations (55), ou à la détermination des fonctions F de f, $F_1$ de $f_1$, $F_2$ de $f_2$, qui puissent vérifier ces équations (55), dans lesquelles $q$, $q_1$, $q_2$ ont, en f, $f_1$, $f_2$, les valeurs (49).

## § XII.

On peut admettre que $F_2$, fonction de $f_2$, s'annule pour une certaine valeur $f_2 = \varphi_2$, $\varphi_2$ étant constant. Par cette valeur $\varphi_2$ de $f_2$, $q$ devient $(m_1 f_1 - n_2\varphi_2)$ ou fonction de $f_1$ seul, $q_1$ devient $(n\mathrm{f} - m_2\varphi_2)$ ou fonction de f seul, et la première équation (55) donne

$$(56)\qquad (m\mathrm{f} - n_1 f_1)\left(m\,\frac{d\,\dfrac{F}{n\mathrm{f}-m_2\varphi_2}}{d\mathrm{f}} - n_1\,\frac{d\,\dfrac{F_1}{m_1 f_1 - n_2\varphi_2}}{df_1}\right) = 2m^2\,\frac{F}{n\mathrm{f}-m_2\varphi_2} + 2n_1^2\,\frac{F_1}{m_1 f_1 - n_2\varphi_2}.$$

Or la première équation (55) doit être satisfaite pour toute valeur de $f_2$; les fonctions F et $F_1$, qui sont indépendantes de cette variable, doivent donc vérifier l'équation (56).

Soit posé, pour simplifier,

$$\frac{d\,\dfrac{F}{n\mathrm{f}-m_2\varphi_2}}{d\mathrm{f}} = \mathfrak{F},\qquad \frac{d\,\dfrac{F_1}{m_1 f_1 - n_2\varphi_2}}{df_1} = \mathfrak{F}_1;$$

l'équation (56) peut s'écrire ainsi

$$(m\mathrm{f} - n_1 f_1)(m\mathfrak{F} - n_1\mathfrak{F}_1) = 2m^2\int\mathfrak{F}d\mathrm{f} + 2n_1^2\int\mathfrak{F}_1\,df_1,$$

et si on la différentie successivement par rapport à f et à $f_1$, on trouve

$$\frac{d\mathfrak{F}}{d\mathrm{f}} = -\frac{d\mathfrak{F}_1}{df_1} = \frac{m\mathfrak{F}+n_1\mathfrak{F}_1}{m\mathrm{f}-n_1 f_1};$$

or, la valeur commune de ces trois quantités ne peut être qu'une constante, puisque la première doit être indépendante de $f_1$, et la seconde de f; donc les deux coefficients différentiels

$$\frac{d^2\,\dfrac{F}{n\mathrm{f}-m_2\varphi_2}}{d\mathrm{f}^2},\qquad \frac{d^2\,\dfrac{F_1}{m_1 f_1 - n_2\varphi_2}}{df_1^2},$$

sont constants et de signes contraires. D'où il suit que F et $F_1$ sont des polynômes du troisième degré, l'un en f, l'autre en $f_1$, respectivement divisibles par $(nf - m_2\varphi_2)$ et $(m_1 f_1 - n_2\varphi_2)$; $F_2$ l'étant par $(f_2 - \varphi_2)$.

On démontrerait de la même manière, à l'aide de la seconde équation (55), que $F_1$ étant divisible par $(f_1 - \varphi_1)$, $F_2$ et F sont respectivement divisibles par $(m_1\varphi_1 - n_2 f_2)$ et $(mf - n_1\varphi_1)$; et, à l'aide de la troisième équation (55), que F étant divisible par $(f - \varphi)$, $F_1$ et $F_2$ sont respectivement divisibles par $(m\varphi - n_1 f_1)$ et $(n\varphi - m_2 f_2)$. De plus, les différentielles secondes des quotients obtenus par ces divisions sont constantes, et l'on doit avoir

$$(57)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\dfrac{F}{nf - m_2\varphi_2}}{df^2} + \frac{d^2\dfrac{F_1}{m_1 f_1 - n_2\varphi_2}}{df_1^2} = 0,\\ &\frac{d^2\dfrac{F_2}{m_1\varphi_1 - n_2 f_2}}{df_2^2} + \frac{d^2\dfrac{F}{mf - n_1\varphi_1}}{df^2} = 0,\\ &\frac{d^2\dfrac{F_1}{m\varphi - n_1 f_1}}{df_1^2} + \frac{d^2\dfrac{F_2}{n\varphi - m_2 f_2}}{df_2^2} = 0.\end{aligned}\right.$$

Les fonctions F, $F_1$, $F_2$ sont donc nécessairement de la forme

$$\begin{aligned} F &= A\,(f - \varphi)(mf - n_1\varphi_1)(nf - m_2\varphi_2),\\ F_1 &= A_1(f_1 - \varphi_1)(m_1 f_1 - n_2\varphi_2)(m\varphi - n_1 f_1),\\ F_2 &= A_2(f_2 - \varphi_2)(n\varphi - m_2 f_2)(m_1\varphi_1 - n_2 f_2),\end{aligned}$$

et, pour que les relations (57) soient satisfaites, il faut que les constantes A, $A_1$, $A_2$ soient telles que

$$A m = A_1 n_1,\quad A_2 m_2 = A n,\quad A_1 m_1 = A_2 n_2,$$

conditions qui seront remplies en prenant

$$A = n_1 n_2\lambda,\quad A_1 = mn_2\lambda,\quad A_2 = mm_1\lambda;$$

la constante $\lambda$ qui disparaîtrait comme facteur commun, lors de la vérification des équations (55), peut être prise égale à l'unité.

Ainsi les valeurs générales de F, $F_1$, $F_2$, ou les intégrales des équations (55), doivent être

$$(58)\quad \begin{cases} F = n_1 n_2 (f - \varphi)(mf - n_1\varphi_1)(nf - m_2\varphi_2), \\ F_1 = mn_2 (f_1 - \varphi_1)(m_1 f_1 - n_2\varphi_2)(m\varphi - n_1 f_1), \\ F_2 = mm_1 (f_2 - \varphi_2)(n\varphi - m_2 f_2)(m_1\varphi_1 - n_2 f_2); \end{cases}$$

$\varphi$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ étant les trois constantes introduites par l'intégration. On peut supposer que ces constantes sont les limites inférieures des intégrales (51), en sorte qu'elles correspondent respectivement aux valeurs zéro des paramètres $\rho$, $\rho_1$, $\rho_2$.

## § XIII.

Mais il est nécessaire de vérifier que les fonctions (58) rendent identiques les équations (55). Pour faire plus commodément cette vérification, posons

$$f - \varphi = p, \quad f_1 - \varphi_1 = p_1, \quad f_2 - \varphi_2 = p_2,$$

d'où

$$\begin{aligned} mf - n_1\varphi_1 &= q_2 + n_1 p_1, & nf - m_2\varphi_2 &= q_1 + m_2 p_2, \\ m_1 f_1 - n_2\varphi_2 &= q + n_2 p_2, & m\varphi - n_1 f_1 &= q_2 - mp, \\ n\varphi - m_2 f_2 &= q_1 - np, & m_1\varphi_1 - n_2 f_2 &= q - m_1 p_1; \end{aligned}$$

les fonctions (58) pourront s'écrire ainsi

$$(59)\quad \begin{cases} F = n_1 n_2 p\,(q_2 + n_1 p_1)(q_1 + m_2 p_2), \\ F_1 = m n_2 p_1 (q + n_2 p_2)(q_2 - m p), \\ F_2 = m m_1 p_2 (q_1 - n p)(q - m_1 p_1), \end{cases}$$

et l'on déduira aisément

$$(60)\quad \begin{cases} \dfrac{dF}{df} = n_1 n_2 [(q_2 + n_1 p_1)(q_1 + m_2 p_2) + m p (q_1 + m_2 p_2) + n p (q_2 + n_1 p_1)], \\ \dfrac{dF_1}{df} = m n_2 [(q + n_2 p_2)(q_2 - m p) + m_1 p_1 (q_2 - m p) - n_1 p_1 (q + n_2 p_2)]. \end{cases}$$

Les valeurs (59) et (60) étant substituées dans la première des équations (55), on trouve, après plusieurs réductions et la suppression du facteur commun $mn_2p_2$.

$$
(61)\quad \left\{ \begin{aligned} & m_2 n_1 q \left[ q_2 + n_1 p_1 - mp - \frac{2.mp.n_1p_1}{q_2} - \frac{np(q_2+n_1p_1)}{q_1} \right] \\ & - n_1 n_2 q_1 \left[ q_2 + n_1 p_1 - mp - \frac{2.mp.n_1p_1}{q_2} - \frac{m_1p_1(q_2-mp)}{q} \right] \\ & \qquad + m_1 m_2 q_2^2 \frac{(q_1-np)(q-m_1p_1)}{qq_1} = 0. \end{aligned} \right.
$$

On peut remplacer, dans le dernier terme, $m_1m_2q_2$ par sa valeur identique $(n_1n_2q_1 - m_2n_1q)$, le produit $\frac{(q_1-np)(q-m_1p_1)}{qq_1}$ par son développement $\left(1 - \frac{np}{q_1} - \frac{m_1p_1}{q} + \frac{np.m_1p_1}{qq_1}\right)$; puis, réduisant, s'aidant de la relation (47) et supprimant le facteur commun $n_1pp_1$, l'équation (61) devient

$$
(62)\quad 2m\left(\frac{n_1n_2q_1 - m_2n_1q}{q_2}\right) = m_2\left(\frac{nn_1q + nm_1q_2}{q_1}\right) + n_2\left(\frac{mm_1q_1 - nm_1q_2}{q}\right).
$$

Mais l'on a identiquement, par les valeurs (49) de $q$, $q_1$, $q_2$,

$$
\frac{n_1n_2q_1 - m_2n_1q}{q_2} = m_1m_2, \qquad \frac{nn_1q + nm_1q_2}{q_1} = mm_1, \qquad \frac{mm_1q_1 - nm_1q_2}{q} = nn_1,
$$

ce qui réduit l'équation (62) à $2mm_1m_2 = mm_1m_2 + nn_1n_2$, ou à la relation (47). Ainsi les fonctions (58) vérifient la première des équations (55), et l'on s'assurerait de la même manière qu'elles vérifient les deux autres.

## § XIV.

En résumé, on a les intégrales completes des équations (9) et (10) en prenant

$$
Q = \sqrt{m\mathrm{f} - n_2\mathrm{f}_2}, \quad Q_1 = \sqrt{n\mathrm{f} - m_2\mathrm{f}_2}, \quad Q_2 = \sqrt{m\mathrm{f} - n_1\mathrm{f}_1}, \quad (mm_1m_2 = nn_1n_2,
$$

$$
(63)\quad \left\{ \begin{aligned} \rho &= \int_{\varphi}^{\mathrm{f}} \frac{d\mathrm{f}}{\sqrt{n_1n_2(\mathrm{f}-\varphi)(m\mathrm{f}-n_1\varphi_1)(n\mathrm{f}-m_2\varphi_2)}}, \\ \rho_1 &= \int_{\varphi_1}^{\mathrm{f}_1} \frac{d\mathrm{f}_1}{\sqrt{mn_2(\mathrm{f}_1-\varphi_1)(m_1\mathrm{f}_1-n_2\varphi_2)(m\varphi-n_1\mathrm{f}_1)}}, \\ \rho_2 &= \int_{\varphi_2}^{\mathrm{f}_2} \frac{d\mathrm{f}_2}{\sqrt{mm_1(\mathrm{f}_2-\varphi_2)(n\varphi-m_2\mathrm{f}_2)(m_1\varphi_1-n_2\mathrm{f}_2)}}; \end{aligned} \right.
$$

d'où l'on conclut, pour les paramètres différentiels du premier ordre des surfaces orthogonales toutes isothermes,

$$(64)\quad \begin{cases} h = \dfrac{d\rho}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{n\mathrm{f} - m_2\mathrm{f}_2}\sqrt{m\mathrm{f} - n_1\mathrm{f}_1}}, \\ h_1 = \dfrac{d\rho_1}{ds_1} = \dfrac{1}{\sqrt{m\mathrm{f} - n_1\mathrm{f}_1}\sqrt{m_1\mathrm{f}_1 - n_2\mathrm{f}_2}}, \\ h_2 = \dfrac{d\rho_2}{ds_2} = \dfrac{1}{\sqrt{m_1\mathrm{f}_1 - n_2\mathrm{f}_2}\sqrt{n\mathrm{f} - m_2\mathrm{f}_2}}, \end{cases}$$

$ds$, $ds_1$, $ds_2$ étant pris sur les intersections, ou sur les lignes de courbure des surfaces conjuguées.

D'après l'ordre de grandeur adopté, $\mathrm{f}_2$ est numériquement moindre que $\mathrm{f}_1$, qui est lui-même plus petit que $\mathrm{f}$; la limite inférieure $\varphi_2$ peut donc être prise égale à zéro, et l'on aura

$$\rho = \int_{\varphi}^{\mathrm{f}} \frac{k\,d\mathrm{f}}{\sqrt{\dfrac{nn_1n_2m}{k}\,k\mathrm{f}(k\mathrm{f} - k\varphi)\left(k\mathrm{f} - k\dfrac{n_1}{m}\varphi_1\right)}},$$

$$\rho_1 = \int_{\varphi_1}^{\mathrm{f}} \frac{k_1\,d\mathrm{f}_1}{\sqrt{\dfrac{mm_1n_1n_2}{k_1}\,k_1\mathrm{f}_1(k_1\mathrm{f}_1 - k_1\varphi_1)\left(k_1\dfrac{m}{n_1}\varphi - k_1\mathrm{f}_1\right)}},$$

$$\rho_2 = \int_{0}^{\mathrm{f}_2} \frac{k_2\,d\mathrm{f}_2}{\sqrt{\dfrac{mm_1m_2n_2}{k_2}\,k_2\mathrm{f}_2\left(k_2\dfrac{n}{m_2}\varphi - k_2\mathrm{f}_2\right)\left(k_2\dfrac{m_1}{n_2}\varphi_1 - k_2\mathrm{f}_2\right)}};$$

$k$, $k_1$, $k_2$ étant des indéterminées, dont on peut disposer de telle sorte que les trois coefficients de $\varphi$ soient égaux, ainsi que ceux de $\varphi_1$.

En effet, ces conditions sont

$$k = k_1\frac{m}{n_1} = k_2\frac{n}{m_2}, \qquad k\frac{n_1}{m} = k_1 = k_2\frac{m_1}{n_2};$$

le second groupe pouvant se mettre sous la forme $k = k_1\dfrac{m}{n_1} = k_2\dfrac{mm_1}{n_1n_2}$, ne diffère pas du premier, puisque, d'après la relation (47), on a

$$\frac{mm_1}{n_1n_2} = \frac{n}{m_2};$$

et il suffira de prendre

$$k = mm_1, \quad k_1 = m_1 n_1, \quad k_2 = n_1 n_2,$$

pour vérifier à la fois les deux groupes. On aura, en adoptant ces valeurs des indéterminées $k$, $k_1$, $k_2$ :

$$\rho = \int_\varphi^{\mathrm{f}} \frac{m m_1\, d\mathrm{f}}{\sqrt{m m_2\, m m_1 \mathrm{f}\,(m m_1 \mathrm{f} - m m_1 \varphi)\,(m m_1 \mathrm{f} - m_1 n_1 \varphi_1)}},$$

$$\rho_1 = \int_{\varphi_1}^{\mathrm{f}_1} \frac{m_1 n_1\, d\mathrm{f}_1}{\sqrt{m n_2\, m_1 n_1 \mathrm{f}_1\,(m_1 n_1 \mathrm{f}_1 - m_1 n_1 \varphi_1)\,(m m_1 \varphi - m_1 n_1 \mathrm{f}_1)}},$$

$$\rho_2 = \int_0^{\mathrm{f}_2} \frac{n_1 n_2\, d\mathrm{f}_2}{\sqrt{n n_2\, n_1 n_2 \mathrm{f}_2\,(m m_1 \varphi - n_1 n_2 \mathrm{f}_2)\,(n_1 m_1 \varphi_1 - n_1 n_2 \mathrm{f}_2)}}.$$

Si l'on pose maintenant

$$(65) \qquad \begin{cases} m m_1 \mathrm{f} = \lambda^2 p^2, & m_1 n_1 \mathrm{f}_1 = \lambda^2 p_1^2, \quad n_1 n_2 \mathrm{f}_2 = \lambda^2 p_2^2, \\ m m_1 \varphi = \lambda^2 c^2, & m_1 n_1 \varphi_1 = \lambda^2 b^2, \end{cases}$$

$\lambda$ étant constant et indéterminé, il vient

$$(66) \qquad \begin{cases} \dfrac{\lambda \sqrt{m m_2}}{2}\, \rho = \displaystyle\int_c^p \frac{dp}{\sqrt{p^2 - c^2}\,\sqrt{p^2 - b^2}}, \\ \dfrac{\lambda \sqrt{m n_2}}{2}\, \rho_1 = \displaystyle\int_b^{p_1} \frac{dp_1}{\sqrt{c^2 - p_1^2}\,\sqrt{p_1^2 - b^2}}, \\ \dfrac{\lambda \sqrt{n n_2}}{2}\, \rho_2 = \displaystyle\int_0^{p_2} \frac{dp_2}{\sqrt{c^2 - p_2^2}\,\sqrt{b^2 - p_2^2}}; \end{cases}$$

et les mêmes valeurs de f, $\mathrm{f}_1$, $\mathrm{f}_2$ (65), substituées dans les formules (64), donnent

$$(67) \qquad \begin{cases} \lambda^2 \sqrt{\dfrac{m_2}{n_1 n_2 m_1}}\, \dfrac{d\rho}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{p^2 - p_1^2}\,\sqrt{p^2 - p_2^2}}, \\ \lambda^2 \sqrt{\dfrac{1}{n_1 m_1}}\, \dfrac{d\rho_1}{ds_1} = \dfrac{1}{\sqrt{p^2 - p_1^2}\,\sqrt{p_1^2 - p_2^2}}, \\ \lambda^2 \sqrt{\dfrac{n}{n_1 m m_1}}\, \dfrac{d\rho_2}{ds_2} = \dfrac{1}{\sqrt{p^2 - p_2^2}\,\sqrt{p_1^2 - p_2^2}}. \end{cases}$$

Or il existe une valeur de la constante $\lambda$, telle que les coefficients de $\rho$ et $d\rho$, de $\rho_1$ et $d\rho_1$, de $\rho_2$ et $d\rho_2$, sont respectivement égaux dans les équations (66) et (67); cette valeur est

$$(68)\qquad \lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{n_1 n_2 m m_1},$$

car elle donne identiquement

$$\lambda\sqrt{\frac{m_2}{n_1 n_2 m_1}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{m m_2},\quad \lambda\sqrt{\frac{1}{n_1 m_1}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{m n_2},\quad \lambda\sqrt{\frac{n}{m m_1 n_1}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{n n_2}\,;$$

si donc on prend pour nouveaux paramètres les anciens, respectivement multipliés par $\frac{\lambda\sqrt{mm_2}}{2}$, $\frac{\lambda\sqrt{mn_2}}{2}$, $\frac{\lambda\sqrt{nn_2}}{2}$, $\lambda$ ayant la valeur (68), on aura définitivement

$$(69)\left\{\begin{aligned}
&\int_c^p \frac{dp}{\sqrt{p^2-b^2}\sqrt{p^2-c^2}} = \rho,\quad \int_b^{p_1} \frac{dp_1}{\sqrt{p_1^2-b^2}\sqrt{c^2-p_1^2}} = \rho_1,\quad \int_0^{p_2} \frac{dp_2}{\sqrt{b^2-p_2^2}\sqrt{c^2-p_2^2}} = \rho_2,\\
&\frac{d\rho}{ds} = h = \frac{1}{\sqrt{p^2-p_1^2}\sqrt{p^2-p_2^2}},\quad \frac{d\rho_1}{ds_1} = h_1 = \frac{1}{\sqrt{p_1^2-p_2^2}\sqrt{p^2-p_1^2}},\quad \frac{d\rho_2}{ds_2} = h_2 = \frac{1}{\sqrt{p^2-p_2^2}\sqrt{p_1^2-p_2^2}},
\end{aligned}\right.$$

pour représenter tous les systèmes de surfaces orthogonales et isothermes.

## § XV.

Il ne s'agit plus que d'obtenir les équations des mêmes surfaces en coordonnées rectilignes. Les valeurs (69) substituées dans les formules (3) donnent

$$(70)\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{c} = \frac{p_1\sqrt{p_1^2-b^2}\sqrt{c^2-p_1^2}}{\sqrt{p^2-p_2^2}\,(p^2-p_1^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{1}{c_1} = \frac{p_2\sqrt{b^2-p_2^2}\sqrt{c^2-p_2^2}}{\sqrt{p^2-p_1^2}\,(p_1^2-p_2^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{1}{c_2} = -\frac{p\sqrt{p^2-b^2}\sqrt{p^2-c^2}}{\sqrt{p_1^2-p_2^2}\,(p^2-p_2^2)^{\frac{3}{2}}},\\
&\frac{1}{\gamma} = \frac{p_2\sqrt{b^2-p_2^2}\sqrt{c^2-p_2^2}}{\sqrt{p^2-p_1^2}\,(p^2-p_2^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{1}{\gamma_1} = -\frac{p\sqrt{p^2-b^2}\sqrt{p^2-c^2}}{\sqrt{p_1^2-p_2^2}\,(p^2-p_2^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{1}{\gamma_2} = -\frac{p_1\sqrt{p_1^2-b^2}\sqrt{c^2-p_1^2}}{\sqrt{p^2-p_2^2}\,(p_1^2-p_2^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}\right.$$

Or les deux courbures $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{c_1}$ des surfaces $\rho_2$ sont nulles, quels que soient $p$ et $p_1$, pour $p_2 = 0$; les deux courbures $\frac{1}{\gamma_2}$, $\frac{1}{c}$ des surfaces $\rho_1$ sont nulles, quels que soient $p_2$ et $p$, pour $p_1 = b$; les deux courbures $\frac{1}{\gamma_1}$, $\frac{1}{c_2}$ des surfaces $\rho$ sont nulles, quels que soient $p_1$ et $p_2$, pour $p = c$. Les surfaces conjuguées isothermes comprennent donc trois plans, correspondant aux valeurs zéro des paramètres, ou à $p_2 = 0$, $p_1 = b$, $p = c$. Ces plans sont nécessairement orthogonaux, et on peut les prendre respectivement pour plans coordonnés des $yz$, $zx$, $xy$, dont les équations sont

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

c'est-à-dire que $x$ devra être nul, quels que soient $\rho$ et $\rho_1$, pour $\rho_2 = 0$ ou $p_2 = 0$; que $y$ devra être nul, quels que soient $\rho_2$ et $\rho$, pour $\rho_1 = 0$, $p_1 = b$; enfin que $z$ devra être nul, quels que soient $\rho_1$ et $\rho_2$, pour $\rho = 0$, ou $p = c$.

Cela posé, les trois premières équations (5), transformées en $p$, $p_1$ $p_2$, à l'aide des valeurs (69), deviennent

$$(71) \qquad \left\{\begin{aligned} &(p^2 - p_1^2)\frac{d^2\varphi}{dp\,dp_1} + p_1\frac{d\varphi}{dp} - p\frac{d\varphi}{dp_1} = 0,\\ &(p^2 - p_2^2)\frac{d^2\varphi}{dp_2\,dp} - p\frac{d\varphi}{dp_2} + p_2\frac{d\varphi}{dp} = 0,\\ &(p_1^2 - p_2^2)\frac{d^2\varphi}{dp_1\,dp_2} + p_2\frac{d\varphi}{dp_1} - p_1\frac{d\varphi}{dp_2} = 0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose $\varphi = \mathrm{P}\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$, $\mathrm{P}$, $\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_2$ étant respectivement fonctions de $p$, $p_1$, $p_2$, les trois équations (71) exigent que

$$p^2 - \frac{p\mathrm{P}}{\left(\frac{d\mathrm{P}}{dp}\right)} = p_1^2 - \frac{p_1\mathrm{P}_1}{\left(\frac{d\mathrm{P}_1}{dp_1}\right)} = p_2^2 - \frac{p_2\mathrm{P}_2}{\left(\frac{d\mathrm{P}_2}{dp_2}\right)};$$

et comme la première de ces trois quantités ne pourrait contenir que $p$, la seconde que $p_1$, la troisième que $p_2$, leur valeur commune est nécessairement une constante A; on a donc séparément

$$\frac{d\mathrm{P}}{\mathrm{P}} = \frac{p\,dp}{p^2 - \mathrm{A}}, \qquad \frac{d\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}_1} = \frac{p_1\,dp_1}{p_1^2 - \mathrm{A}}, \qquad \frac{d\mathrm{P}_2}{\mathrm{P}_2} = \frac{p_2\,dp_2}{p_2^2 - \mathrm{A}},$$

d'où

$$\mathrm{P} = \sqrt{p^2 - \mathrm{A}}, \quad \mathrm{P}_1 = \sqrt{p_1^2 - \mathrm{A}}, \quad \mathrm{P}_2 = \sqrt{p_2^2 - \mathrm{A}}.$$

Il suit de là que l'intégrale générale des équations (71) peut être mise sous la forme

(72) $$\varphi = \Sigma\sqrt{\mathrm{B}(p^2 - \mathrm{A})(p_1^2 - \mathrm{A})(p_2^2 - \mathrm{A})},$$

les deux constantes A et B variant d'un terme à l'autre de la série. Il faut maintenant déterminer ces constantes, de telle sorte que $\varphi$ donne successivement les fonctions cherchées $x$, $y$, $z$, en $p$, $p_1$, $p_2$.

## § XVI.

Pour $x$, il faut que $p_2 = 0$ l'annule, quels que soient $p$ et $p_1$; ce qui exige que, dans l'équation (72), toutes les constantes A soient nulles; tous les termes de la série se réunissent alors en un seul de la forme $pp_1p_2\Sigma\sqrt{\mathrm{B}}$; et l'on a, en représentant $\Sigma\sqrt{\mathrm{B}}$ par $\frac{1}{g_2}$,

$$x = \frac{1}{g_2}\,pp_1p_2;$$

or, si l'on substitue cette valeur de $x$ à la place de $\varphi$ dans la quatrième équation (5), qui, transformée en $p$, $p_1$, $p_2$, est

(73) $$\left\{\begin{aligned} &(p_1^2 - p_2^2)(p^2 - b^2)(p^2 - c^2)\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 \\ &+ (p^2 - p_2^2)(p_1^2 - b^2)(c^2 - p_1^2)\left(\frac{d\varphi}{dp_1}\right)^2 \\ &+ (p^2 - p_1^2)(b^2 - p_2^2)(c^2 - p_2^2)\left(\frac{d\varphi}{dp_2}\right)^2 \\ &= (p_1^2 - p_2^2)(p^2 - p_2^2)(p^2 - p_1^2): \end{aligned}\right.$$

sa vérification exige que $g_2 = bc$; on a donc

(74) $$bcx = pp_1p_2.$$

Pour $y$, il faut que $p_1 = b$ l'annule, quels que soient $p_2$ et $p$; ce qui exige que, dans $\varphi$ (72), toutes les constantes A soient égales à $b^2$; tous les termes de la série se réunissent alors en un seul; et l'on a, en représentant $\Sigma\sqrt{-\mathrm{B}}$ par $\frac{1}{g_1}$,

$$y = \frac{1}{g_1}\sqrt{p^2 - b^2}\;\sqrt{p_1^2 - b^2}\;\sqrt{b^2 - p_2^2};$$

or, cette valeur de $\varphi$ ne vérifie l'équation (73) que si l'on prend

$$g_1 = b\sqrt{c^2 - b^2};$$

on a donc

$$(75)\qquad b\sqrt{c^2 - b^2}.y = \sqrt{p^2 - b^2}\sqrt{p_1^2 - b^2}\sqrt{b^2 - p_2^2}.$$

Enfin, pour $z$, il faut que $p = c$ l'annule, quels que soient $p_1$ et $p_2$; ce qui exige que, dans $\varphi$ (72), toutes les constantes A soient égales à $c^2$; tous les termes de la série se réunissent alors en un seul; et l'on a, en représentant $\Sigma\sqrt{B}$ par $\frac{1}{g}$,

$$z = \frac{1}{g}\sqrt{p^2 - c^2}\sqrt{c^2 - p_1^2}\sqrt{c^2 - p_2^2};$$

or, cette valeur de $\varphi$ ne vérifie l'équation (73) que si l'on prend

$$g = c\sqrt{c^2 - b^2};$$

on a donc

$$(76)\qquad c\sqrt{c^2 - b^2}.z = \sqrt{p^2 - c^2}\sqrt{c^2 - p_1^2}\sqrt{c^2 - p_2^2}.$$

Si entre les équations (74), (75), (76), on élimine successivement $p_1$ et $p_2$, $p_2$ et $p$, $p$ et $p_1$, on obtient, en coordonnées rectilignes, pour les équations séparées des systèmes conjugués,

$$(77)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{p^2 - b^2} + \frac{z^2}{p^2 - c^2} = 1,\\ &\frac{x^2}{p_1^2} + \frac{y^2}{p_1^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - p_1^2} = 1,\\ &\frac{x^2}{p_2^2} - \frac{y^2}{b^2 - p_2^2} - \frac{z^2}{c^2 - p_2^2} = 1.\end{aligned}\right.$$

D'où il résulte, enfin, que les seules surfaces toutes isothermes, qui ne sont ni cylindriques, ni coniques, ni de révolution, sont des surfaces du second degré homofocales.

## § XVII.

Les propriétés du système de surfaces orthogonales représenté par les équations (69) ou (77) ont été suffisamment étudiées dans le Mémoire sur les surfaces isothermes, déjà cité. Les constantes ou les demi-distances focales $b$ et $c$ sont les seules indéterminées dont on puisse disposer. On peut, par exemple, faire en sorte qu'un ellipsoïde donné, ayant pour demi-axes A, B, C, fasse partie du système : il suffira de prendre

$$b^2 = A^2 - B^2, \quad c^2 = A^2 - C^2,$$

et l'ellipsoïde proposé sera représenté par la première équation (77) quand le paramètre $p$ atteindra la valeur particulière A. Si l'ellipsoïde donné a deux axes égaux, ou même s'il se réduit à une sphère, les équations (69) ou (77) peuvent pareillement le comprendre; c'est-à-dire que ces équations s'étendent aux deux systèmes de révolution représentés par les groupes (28) et (30), et même au système de surfaces coniques signalé au § III.

En effet, pour déduire des équations générales (69) et (77) le système de surfaces de révolution représenté par les équations (20) et (28), il faut d'abord poser

$$p_2 = b \sin c\theta,$$

puis, après cette transformation, faire $b = 0$. S'il s'agit de reproduire le système des surfaces de révolution (35) et (30), il faut poser

$$p_1 = \sqrt{b^2 + (c^2 - b^2)\sin^2 c\theta},$$

puis faire $b = c$, et à l'aide de quelques changements de notation, on retrouve les équations (35) et (30).

Enfin, pour passer au système de surfaces sphériques et coniques qui correspond aux équations (12) et (13), il faut poser d'abord

$$b = \varepsilon\beta, \quad c = \varepsilon\gamma, \quad p = -r, \quad p_1 = \varepsilon\varpi_1, \quad p_2 = \varepsilon\varpi_2,$$
$$\varepsilon\rho_1 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon\rho_2 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon h_1 = \eta_1, \quad \varepsilon h_2 = \eta_2;$$

par cette transformation, les équations (69) et (77) deviennent

$$(78)\quad\left\{\begin{aligned}
&\rho=\int\frac{-dr}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2\beta^2}\sqrt{r^2-\varepsilon^2\gamma^2}}, && h=\frac{1}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2\varpi_1^2}\sqrt{r^2-\varepsilon^2\varpi_2^2}},\\
&\varepsilon_1=\int\frac{d\varpi_1}{\sqrt{\varpi_1^2-\beta^2}\sqrt{\gamma^2-\varpi_1^2}}, && \eta_1=\frac{1}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2\varpi_1^2}\sqrt{\varpi_1^2-\varpi_2^2}},\\
&\varepsilon_2=\int\frac{d\varpi_2}{\sqrt{\beta^2-\varpi_2^2}\sqrt{\gamma^2-\varpi_2^2}}, && \eta_2=\frac{1}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2\varpi_2^2}\sqrt{\varpi_1^2-\varpi_2^2}};\\
&\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2-\varepsilon^2\beta^2}+\frac{z^2}{r^2-\varepsilon^2\gamma^2}=1,\\
&\frac{x^2}{\varpi_1^2}+\frac{y^2}{\varpi_1^2-\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2-\varpi_1^2}=\varepsilon^2,\\
&\frac{x^2}{\varpi_2^2}-\frac{y^2}{\beta^2-\varpi_2^2}-\frac{z^2}{\gamma^2-\varpi_2^2}=\varepsilon^2,
\end{aligned}\right.$$

et si l'on fait $\varepsilon=0$, on trouve

$$(79)\quad\left\{\begin{aligned}
&\rho=\frac{1}{r}, && h=\frac{1}{r^2}, && x^2+y^2+z^2=r^2,\\
&\varepsilon_1=\int_\beta^{\varpi_1}\frac{d\varpi_1}{\sqrt{\varpi_1^2-\beta^2}\sqrt{\gamma^2-\varpi_1^2}}, && \eta_1=\frac{1}{r\sqrt{\varpi_1^2-\varpi_2^2}}, && \frac{x^2}{\varpi_1^2}+\frac{y^2}{\varpi_1^2-\beta^2}=\frac{z^2}{\gamma^2-\varpi_1^2},\\
&\varepsilon_2=\int_0^{\varpi_2}\frac{d\varpi_2}{\sqrt{\beta^2-\varpi_2^2}\sqrt{\gamma^2-\varpi_2^2}}, && \eta_2=\eta_1, && \frac{x^2}{\varpi_2^2}=\frac{y^2}{\beta^2-\varpi_2^2}+\frac{z^2}{\gamma^2-\varpi_2^2};
\end{aligned}\right.$$

équations qui représentent des sphères concentriques, conjuguées à des cônes du second degré orthogonaux. Les constantes $\beta$ et $\gamma$ restent indéterminées, en sorte qu'une même famille de sphères concentriques peut être conjuguée à une infinité de doubles familles de cônes isothermes. En faisant

$$\beta=0,\quad \text{ou}\quad \beta=\gamma,$$

on obtient particulièrement le système sphérique orthogonal, dont les paramètres sont le rayon, la latitude et la longitude.

## § XVIII.

Les lieux géométriques du second ordre, dont le centre est à l'infini, possèdent aussi leurs surfaces orthogonales toutes isothermes; pour déduire ce système des équations générales (69) et (77), il faut poser d'abord

$$(80)\quad \left\{\begin{array}{lll} p^2 - m^2 = m\lambda, & p_1^2 - m^2 = m\lambda_1, & p_2^2 - m^2 = m\lambda_2; \\ b^2 - m^2 = m\beta, & c^2 - m^2 = m\gamma, & x = m + x'; \\ m\rho = \varepsilon, & m\rho_1 = \varepsilon_1, & m\rho_2 = \varepsilon_2, \\ mh = \eta, & mh_1 = \eta_1, & mh_2 = \eta_2; \end{array}\right.$$

$m$ étant une constante indéterminée. Par cette transformation les équations (69) et (77) deviennent

$$(81)\quad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon = \frac{1}{2}\int_\gamma^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{1+\frac{\lambda}{m}}\sqrt{\lambda-\beta}\sqrt{\lambda-\gamma}}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{\lambda-\lambda_1}\sqrt{\lambda-\lambda_2}}, \\ \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\int_\beta^{\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{\sqrt{1+\frac{\lambda_1}{m}}\sqrt{\lambda_1-\beta}\sqrt{\gamma-\lambda_1}}, \quad \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}\sqrt{\lambda-\lambda_1}}, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{\sqrt{1+\frac{\lambda_2}{m}}\sqrt{\beta-\lambda_2}\sqrt{\gamma-\lambda_2}}, \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda-\lambda_2}\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}}; \\ \frac{2x'}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda(\lambda-\beta)} + \frac{z^2}{\lambda(\lambda-\gamma)} + \frac{1}{m}\left(\frac{x'^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda-\beta} + \frac{z^2}{\lambda-\gamma}\right) = 1, \\ \frac{2x'}{\lambda_1} + \frac{y^2}{\lambda_1(\lambda_1-\beta)} - \frac{z^2}{\lambda_1(\gamma-\lambda_1)} + \frac{1}{m}\left(\frac{x'^2}{\lambda_1} + \frac{y^2}{\lambda_1-\beta} - \frac{z^2}{\gamma-\lambda_1}\right) = 1, \\ \frac{2x'}{\lambda_2} - \frac{y^2}{\lambda_2(\beta-\lambda_2)} - \frac{z^2}{\lambda_2(\gamma-\lambda_2)} + \frac{1}{m}\left(\frac{x'^2}{\lambda_2} - \frac{y^2}{\beta-\lambda_2} - \frac{z^2}{\lambda_2-\gamma}\right) = 1; \end{array}\right.$$

et si l'on fait $\frac{1}{m} = 0$, on obtient

$$(82)\quad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon = \frac{1}{2}\int_\gamma^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda-\beta}\sqrt{\lambda-\gamma}}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{\lambda-\lambda_1}\sqrt{\lambda-\lambda_2}}, \quad \frac{2x'}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda(\lambda-\beta)} + \frac{z^2}{\lambda(\lambda-\gamma)} = 1, \\ \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\int_\beta^{\lambda_1} \frac{d\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1-\beta}\sqrt{\gamma-\lambda_1}}, \quad \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}\sqrt{\lambda-\lambda_1}}, \quad \frac{2x'}{\lambda_1} + \frac{y^2}{\lambda(\lambda_1-\beta)} - \frac{z^2}{\lambda_1(\gamma-\lambda_1)} = 1, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{\sqrt{\beta-\lambda_2}\sqrt{\gamma-\lambda_2}}, \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda-\lambda_2}\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}}, \quad \frac{2x'}{\lambda_2} - \frac{y^2}{\lambda_2(\beta-\lambda_2)} - \frac{z^2}{\lambda_2(\gamma-\lambda_2)} = 1. \end{array}\right.$$

Les surfaces conjuguées sont alors trois familles de paraboloïdes, ayant mêmes foyers, et leurs axes sur la même droite. Les paraboloïdes aux paramètres $\varepsilon$ et $\varepsilon_2$ sont elliptiques, et dirigés en sens contraires; ceux au paramètre $\varepsilon_1$ sont hyperboliques.

Les fonctions $\lambda$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, déterminées par les procédés ordinaires du calcul intégral, de telle sorte que $\lambda = \gamma$ pour $\varepsilon = 0$, $\lambda_1 = \beta$ pour $\varepsilon_1 = 0$, et $\lambda_2 = 0$ pour $\varepsilon_2 = 0$, sont

$$(83)\quad \begin{cases} \lambda = \gamma\left(\dfrac{e^{\varepsilon}+e^{-\varepsilon}}{2}\right)^2 - \beta\left(\dfrac{e^{\varepsilon}-e^{-\varepsilon}}{2}\right)^2, \\ \lambda_1 = \beta\cos^2\varepsilon_1 + \gamma\sin^2\varepsilon_1, \\ \lambda_2 = 2\sqrt{\beta\gamma}\left(\dfrac{e^{\varepsilon_2}+e^{-\varepsilon_2}}{2}\right)\left(\dfrac{e^{\varepsilon_2}-e^{-\varepsilon_2}}{2}\right) - (\beta+\gamma)\left(\dfrac{e^{\varepsilon_2}-e^{-\varepsilon_2}}{2}\right)^2. \end{cases}$$

Les fonctions $x'$, $y$, $z$, en $\lambda$, $\lambda_1$, $\lambda_2$, obtenues, soit par l'élimination, à l'aide des relations (82), troisième colonne, soit mieux en substituant les valeurs (80) dans les équations (74), (75) et (76), et faisant $\frac{1}{m} = 0$, sont

$$(84)\quad \begin{cases} 2x' = \lambda + \lambda_1 + \lambda_2 - \beta - \gamma, \\ y\sqrt{\gamma - \beta} = \sqrt{\lambda - \beta}\sqrt{\lambda_1 - \beta}\sqrt{\beta - \lambda_2}, \\ z\sqrt{\gamma - \beta} = \sqrt{\lambda - \gamma}\sqrt{\gamma - \lambda_1}\sqrt{\gamma - \lambda_2}. \end{cases}$$

Le nouveau système de surfaces orthogonales du second ordre, toutes isothermes, qui vient d'être défini, se distingue de celui qui comprend les ellipsoïdes, en ce que les fonctions qui expriment les températures sont ici plus simples, ou d'une transcendance moins élevée : en effet, dans le système paraboloïdal, comme pour les ellipsoïdes de révolution, ces fonctions sont exponentielles et circulaires, tandis qu'elles sont elliptiques pour l'ellipsoïde à trois axes inégaux.