JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. MOLINS

De la détermination, sous forme intégrable, des équations des développées des courbes à double courbure

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 379-390.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__379_0>

DE LA DÉTERMINATION,

SOUS FORME INTÉGRABLE,

DES ÉQUATIONS DES DÉVELOPPÉES DES COURBES A DOUBLE COURBURE;

Par H. MOLINS,

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Monge a fait voir le premier qu'une courbe quelconque a une infinité de développées, dont il a donné la construction avec la manière de former leurs équations. Ces équations n'étant pas sous forme intégrable, Lancret fit ensuite connaître une méthode par laquelle il les obtenait sous cette forme. Elle repose sur l'emploi d'un plan touchant de la courbe, en l'assujettissant à faire un angle donné avec le plan osculateur. Comme l'équation de ce plan est extrêmement compliquée, le procédé lui-même exige de longs calculs qui le rendent peu praticable. La marche que nous suivons nous a paru remédier à cet inconvénient et donner une solution assez simple de la question. Nous établissons d'abord, pour les courbes à double courbure, quelques relations générales applicables à la théorie des développées, et dont la première servira à former leurs équations.

1. Considérons un point quelconque O d'une courbe à double courbure, et plaçons-y l'origine des coordonnées, en prenant pour axe des x la tangente en ce point, pour axe des y la direction du rayon du cercle osculateur, et pour axe des z la perpendiculaire au plan osculateur. Soient

$$y = \varphi x, \quad z = \psi x,$$

les équations de la courbe; nous supposerons que l'on prenne x pour variable indépendante, ce qui donnera

$$d^2x = 0.$$

La tangente au point O a pour équations

$$y' = \frac{dy}{dx} x', \quad z' = \frac{dz}{dx} x',$$

et comme elle sert d'axe de x, on aura en ce point

$$dy = 0, \quad dz = 0.$$

En outre, le plan osculateur au point O a pour équation

$$Xx' + Yy' + Zz' = 0,$$

les coefficients ayant ici pour valeurs

$$X = 0, \quad Y = -dx\, d^2z, \quad Z = dx\, d^2y,$$

et puisque ce plan sert de plan des x, y, on aura évidemment

$$d^2z = 0.$$

Il suit de là que l'on a au point O,

$$ds = dx, \quad d^2s = 0,$$

et si l'on différentie les expressions générales de X, Y, Z, on trouvera que l'on a en ce même point

$$dX = 0, \quad dY = -dx\, d^3z, \quad dZ = dx\, d^3y.$$

Cela posé, soient α, β, γ les coordonnées du centre du cercle osculateur au point O, on trouvera que leurs expressions générales donnent, en vertu des valeurs précédentes,

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{dx^2}{d^2y}, \quad \gamma = 0,$$

de sorte que le rayon de ce cercle est

$$\rho = \frac{dx^2}{d^2y}.$$

Soient, en second lieu, x', y', z' les coordonnées du point d'intersection de trois plans normaux consécutifs, point que Monge appelle centre de courbure sphérique, parce qu'il est le centre de la sphère qui passerait par quatre points consécutifs de la courbe; on trouvera que leurs valeurs relatives au point O sont

$$x' = 0, \quad y' = \frac{dx^2}{d^2y}, \quad z' = -\frac{dx^2\,d^3y}{d^2y\,d^3z}.$$

Appelons H la distance du centre de courbure sphérique au plan osculateur; elle est visiblement égale à z', et l'on a

$$\mathrm{H} = -\frac{dx^2\,d^3y}{d^2y\,d^3z}.$$

Soit enfin ω l'angle de torsion de la courbe au point O, on trouvera

$$\omega = \frac{d^3z}{d^2y},$$

et pour la différence de deux rayons de courbure consécutifs,

$$d\rho = -\frac{dx^2\,d^3y}{(d^2y)^2}.$$

Maintenant, si l'on multiplie entre elles les valeurs de H et ω, on obtient

$$\mathrm{H}\omega = -\frac{dx^2\,d^3y}{(d^2y)^2},$$

ce qui est la valeur de $d\rho$. Donc on a cette relation générale,

$$d\rho = \mathrm{H}\omega,$$

qui peut s'énoncer ainsi : « Le rapport de la différence de deux rayons » de courbure consécutifs à l'angle de torsion est égal à la distance du » centre de courbure sphérique au plan osculateur. »

2. Les coordonnées du centre du cercle osculateur sont données par la formule

$$\alpha - x = ds^2 . \frac{\mathrm{Y}dz - \mathrm{Z}dy}{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2},$$

et par deux autres analogues. Si on les différentie, on trouvera pour les valeurs de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ relatives au point O,

$$d\alpha = 0, \quad d\beta = -\frac{dx^2\,d^3y}{(d^2y)^2}, \quad d\gamma = \frac{dx^2\,d^3z}{(d^2y)^2},$$

et par suite, pour la valeur de l'élément de la courbe lieu des centres de courbure, que nous désignerons par $d\sigma$,

$$d\sigma = \sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2} = \frac{dx^2 \sqrt{(d^3y)^2 + (d^3z)^2}}{(d^2y)^2}.$$

Mais la formule

$$\rho = \frac{dx^2}{d^2y}$$

donne

$$d^2y = \frac{dx^2}{\rho},$$

valeur qui, portée dans les formules

$$\omega = \frac{d^3z}{d^2y}, \quad d\rho = -\frac{dx^2 d^3y}{(d^2y)^2},$$

leur fait prendre la forme

$$\omega = \frac{\rho d^3z}{dx^2}, \quad d\rho = -\frac{\rho^2 d^3y}{dx^2},$$

d'ou

$$d^3y = -\frac{d\rho}{\rho^2}dx^2, \quad d^3z = \frac{\omega}{\rho}dx^2.$$

Substituant ces valeurs de d^2y, d^3y, d^3z dans l'expression de $d\sigma$, on obtient cette nouvelle relation générale

$$d\sigma = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2\omega^2}.$$

Si la courbe proposée était plane, ω serait nul et l'on aurait la relation connue $d\sigma = d\rho$ qui lie entre elles cette courbe et la courbe lieu des centres des cercles osculateurs qui en est la développée. Mais lorsque la courbe est à double courbure, la formule précédente prouve que $d\sigma$ n'est pas égal à $d\rho$, ce qui démontre d'une nouvelle manière cette proposition, que le lieu des centres des cercles osculateurs n'est pas une développée de la courbe proposée. Enfin, si dans cette formule on porte la valeur $d\rho = \mathrm{H}\omega$, on obtient cette autre relation

$$\frac{d\sigma}{\omega} = \sqrt{\mathrm{H}^2 + \rho^2}.$$

Si l'on observe que la quantité $\sqrt{H^2 + \rho^2}$ exprime la distance du point O de la courbe proposée au point d'intersection de trois plans normaux consécutifs, ou, ce qui revient au même, le rayon de courbure sphérique, on pourra énoncer ainsi la relation précédente : « Le rapport de » l'élément différentiel de la courbe lieu des centres de courbure à l'angle » de torsion est égal à la longueur du rayon de courbure sphérique. »

3. Les valeurs que nous avons trouvées pour $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, d^3y, d^3z donnent

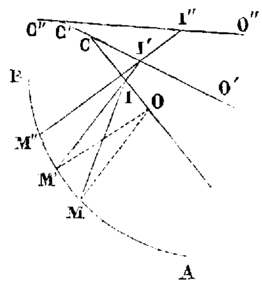
$$d\alpha = 0, \quad \frac{d\gamma}{d\beta} = -\frac{d^3z}{d^3y} = \frac{\rho\omega}{d\rho},$$

ce qui montre que la tangente à la courbe lieu des centres de courbure est contenue dans le plan normal au point O, et de plus, qu'elle fait avec le rayon du cercle osculateur un angle dont la tangente est égale à $\frac{\rho\omega}{d\rho}$. Comme cette quantité n'est pas nulle dans les courbes à double courbure, on en conclut que le rayon du cercle osculateur n'est pas tangent au lieu des centres de courbure, et cela peut encore servir à voir que cette courbe n'est pas une développée de la courbe proposée. On peut encore remarquer que l'expression de $\frac{d\gamma}{d\beta}$ devient, en y mettant $H\omega$ à la place de $d\rho$,

$$\frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{\rho}{H},$$

quantité qui représente aussi la cotangente de l'angle que forme avec le rayon de courbure ρ le rayon de courbure sphérique $\sqrt{H^2 + \rho^2}$. Donc on peut énoncer la proposition suivante : « L'angle que fait la » tangente à la courbe lieu des centres des cercles osculateurs avec le » rayon du cercle osculateur est le complément de l'angle que fait avec » ce même rayon le rayon de courbure sphérique. »

4. Cherchons maintenant les équations des développées d'une courbe quelconque à double courbure AB. Concevons que l'on ait construit la surface développable lieu des intersections successives des plans normaux; on sait que toutes les développées sont situées sur cette surface. Soient M, M', M'' divers points consécutifs de la courbe, CO l'intersection des plans normaux en M, M', C'O' celle des plans



normaux en M', M'', etc. Pour construire une développée quelconque, on prendra à volonté sur la droite CO un point I qu'on regardera comme le point de la développée qui répond au point M, et pour avoir le point suivant de cette courbe, on mènera la droite M'I contenue dans le plan OCO' qui est le plan normal au point M'; le point I' où cette droite rencontre C'O' est le second point de la développée, lequel répond à M'. Pareillement on joindra I'M'' qu'on prolongera jusqu'à la rencontre de C''O'' au point I'' qui est le point de la développée correspondant à M'', et ainsi de suite. On nomme rayons de la développée les diverses longueurs MI, M'I', M''I'',... qui sont les distances des points de cette courbe aux points correspondants de la courbe proposée. Nous désignerons par ρ_1 le rayon MI qui répond au point M, et voyons comment il varie lorsqu'on passe de ce point au point infiniment voisin M'.

La droite CO étant l'intersection des plans normaux en M, M', il s'ensuit que le point I est le centre d'une sphère qui a un contact du second ordre avec la courbe AB au point M. Donc IM = IM', et la différence $d\rho_1$ des deux rayons consécutifs IM, I'M' est égale à II'. Or le triangle ICI' donne la proportion

$$\mathrm{II'} : \mathrm{IC} :: \sin \mathrm{ICI'} : \sin(\mathrm{ICI'} + \mathrm{CII'}),$$

d'où

$$\mathrm{II'} \times \sin(\mathrm{ICI'} + \mathrm{CII'}) = \mathrm{IC} \times \sin \mathrm{ICI'};$$

ou bien, en remarquant que II' et l'angle ICI' sont infiniment petits, et négligeant, dans le premier membre, les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier,

$$\text{II}' \times \sin \text{CII}' = \text{IC} \times \sin \text{ICI}'. \tag{1}$$

Soit O le point où la droite CO rencontre le plan osculateur relatif au point M; les droites MO, M'O sont égales entre elles et au rayon ρ du cercle osculateur; de plus, elles sont perpendiculaires à CO. On a donc par le triangle rectangle IM'O, ou son égal IMO,

$$\sin \text{M'IO} \quad \text{ou} \quad \sin \text{CII}' = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad \text{IO} = \sqrt{\rho_1^2 - \rho^2};$$

par suite, en représentant, comme plus haut, par H la longueur CO, qui est la distance du centre de courbure sphérique au plan osculateur,

$$\text{IC} = \text{H} - \sqrt{\rho_1^2 - \rho^2}.$$

Quant à l'angle ICI' qui est formé par les normales à deux plans osculateurs consécutifs, il est égal à l'angle de torsion que nous avons appelé ω.

Substituant ces diverses valeurs dans l'équation (1), et remplaçant $\sin \omega$ par ω angle infiniment petit, il vient

$$\text{II}' \text{ ou } d\rho_1 = \left(\text{H} - \sqrt{\rho_1^2 - \rho^2}\right) \cdot \frac{\omega \rho_1}{\rho} = \text{H}\omega \cdot \frac{\rho_1}{\rho} - \sqrt{\rho_1^2 - \rho^2} \cdot \frac{\omega \rho_1}{\rho}.$$

Mais nous avons trouvé la relation $d\rho = \text{H}\omega$, d'où $\omega = \frac{d\rho}{\text{H}}$; par conséquent l'équation précédente devient

$$d\rho_1 = \frac{\rho_1 d\rho}{\rho} - \sqrt{\rho_1^2 - \rho^2} \cdot \frac{\rho_1 d\rho}{\text{H}\rho},$$

et comme les valeurs de ρ, H et $d\rho$ sont déterminées au moyen des équations de la courbe donnée, cette équation est une équation différentielle qui déterminera ρ_1. Pour l'intégrer, on la mettra sous la forme suivante

$$\frac{d\rho}{\text{H}} = \frac{\rho_1 d\rho - \rho d\rho_1}{\rho_1 \sqrt{\rho_1^2 - \rho^2}} = \frac{d \cdot \frac{\rho}{\rho_1}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^2}},$$

et l'on aura pour l'intégrale

$$\arc\sin\frac{\rho}{\rho_1} = \int\frac{d\rho}{H} + C,$$

C étant une constante arbitraire, et $\frac{d\rho}{H}$ étant égal à ω. Si l'on désigne $\int\frac{d\rho}{H}$ par Ω, on aura enfin

$$(2) \qquad \rho_1 = \frac{\rho}{\sin(\Omega + C)}.$$

5. Cela posé, il est aisé, à l'aide de cette expression générale de ρ_1, d'obtenir, sous forme intégrale, les équations d'une développée quelconque. Car soient x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de la développée qui réponde au point (x, y, z) de la courbe proposée; le premier de ces points étant situé sur l'intersection de deux plans normaux consécutifs, on aura ces deux équations

$$(3) \qquad (x' - x)dx + (y' - y)dy + (z' - z)dz = 0,$$
$$(4) \qquad (x' - x)d^2x + (y' - y)d^2y + (z' - z)d^2z = ds^2;$$

d'un autre côté l'on a

$$\rho_1^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

ou bien, en mettant pour ρ_1 sa valeur donnée par l'équation (2),

$$(5) \qquad \frac{\rho^2}{\sin^2(\Omega + C)} = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2.$$

Au moyen des équations (3), (4), (5), on déterminerait le point (x', y', z') de la développée qui répond au point (x, y, z) de la courbe proposée; mais, si entre ces trois équations on élimine la variable indépendante dont x, y, z sont des fonctions que déterminent les équations de cette dernière courbe, on aura en quantités finies les équations de la développée. Les diverses valeurs que l'on pourra attribuer à C, répondront au nombre infini de développées que possède une courbe quelconque.

6. Dans le cas où la courbe donnée est plane, le triangle infiniment petit CII' cesse d'exister, puisque les intersections successives des plans normaux sont des droites parallèles; on doit par conséquent examiner séparément ce cas particulier. Or, on remarquera que le point M′ et les centres O, O′, de deux cercles osculateurs consécutifs, sont en ligne droite, et que cette droite M′ OO′ est la projection du rayon de développée M′ II′. Par suite OO′ ou $d\rho$ est la projection de II′ ou $d\rho_1$ sur le plan de la courbe, de même que OM′ ou ρ est la projection de M′ I ou ρ_1; donc on a la proportion

$$d\rho_1 : d\rho :: \rho_1 : \rho,$$

d'où

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1} = \frac{d\rho}{\rho},$$

et en intégrant et désignant par C une constante arbitraire, $\rho_1 = C\rho$. Ayant l'expression de ρ_1, on procédera comme plus haut. Ainsi, en supposant que le plan de la courbe serve de plan des x, y, et que x soit la variable indépendante, les équations de l'intersection des deux plans normaux consécutifs seront

$$x - x' + (y - y')\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - y')\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

à quoi l'on joindra l'équation

$$\rho_1^2 \quad \text{ou} \quad C^2\rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z'^2.$$

On mettra enfin pour y et ρ leurs valeurs en fonction de x, et l'élimination de x entre ces trois équations donnera celles d'une développée quelconque. Lorsqu'on fera $C = 1$, on aura visiblement $z' = 0$, et la développée sera plane. On remarquera encore que le rapport constant $\frac{\rho}{\rho_1}$ exprime le sinus de l'angle que forme le rayon ρ_1 tangent à la développée avec la direction des génératrices de la surface cylindrique lieu de toutes les développées. Donc ces développées sont des hélices.

7. Appliquons la méthode précédente à la recherche des développées de l'hélice tracée sur un cylindre circulaire droit; nous retrouverons par une voie analytique des résultats qu'on obtient ordinairement par des considérations géométriques (*voir* les *Leçons d'analyse* de Navier). Si l'on prend pour axe des z l'axe du cylindre, et pour plan des x, y le plan de la base, en ayant soin de faire passer l'axe des x

par la trace de l'hélice sur ce plan, les équations de cette courbe seront

$$x = \mathrm{R} \cos \frac{z}{\mathrm{R}a}, \quad y = \mathrm{R} \sin \frac{z}{\mathrm{R}a},$$

R étant le rayon du cylindre, et a la cotangente de l'angle constant que font les tangentes de l'hélice avec les génératrices. Les équations (3), (4) de l'intersection de deux plans normaux consécutifs deviennent

$$(6) \qquad x' \sin \frac{z}{\mathrm{R}a} - y' \cos \frac{z}{\mathrm{R}a} = a(z' - z),$$

$$(7) \qquad x' \cos \frac{z}{\mathrm{R}a} + y' \sin \frac{z}{\mathrm{R}a} = -\mathrm{R}a^2.$$

L'angle de torsion ω étant ici égal à $\frac{dz}{\mathrm{R}\sqrt{1+a^2}}$, on aura pour la quantité Ω qui est égale à $\int \omega$,

$$\Omega = \frac{z + \mathrm{C}}{\mathrm{R}\sqrt{1+a^2}},$$

C étant une constante arbitraire; et l'équation (5) deviendra, en mettant pour ρ sa valeur $\mathrm{R}(1 + a^2)$,

$$\frac{\mathrm{R}^2(1+a^2)^2}{\sin^2 \frac{z+\mathrm{C}}{\mathrm{R}\sqrt{1+a^2}}} = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

ou bien, en mettant pour x, y leurs valeurs données par les équations de l'hélice, et pour x', y' leurs valeurs tirées des équations (6), (7),

$$\frac{\mathrm{R}^2(1+a^2)}{\sin^2 \frac{z+\mathrm{C}}{\mathrm{R}\sqrt{1+a^2}}} = (z' - z)^2 + \mathrm{R}^2(1 + a^2),$$

d'où

$$(8) \qquad z' - z = \pm \mathrm{R}\sqrt{1+a^2} \operatorname{cotang} \frac{z+\mathrm{C}}{\mathrm{R}\sqrt{1+a^2}}.$$

L'élimination de z entre les équations (6), (7), (8) donnerait les équations d'une développée quelconque; pour cela on ferait la somme des carrés des équations (6), (7), et l'on aurait

$$x'^2 + y'^2 = a^2(z' - z)^2 + \mathrm{R}^2 a^4,$$

d'où

$$(9) \qquad a(z' - z) = \pm \sqrt{x'^2 + y'^2 - \mathrm{R}^2 a^4}.$$

Il ne resterait qu'à porter la valeur de z en x', y', z', qui se déduit de là immédiatement, dans les équations (7), (8); on aurait en quantités finies les équations de la développée. D'ailleurs on voit que l'équation (7), après cette substitution, deviendrait celle de la surface développable enveloppe des plans normaux. Mais il est préférable, pour la discussion, de garder les équations (7), (8), (9), qui déterminent chaque point (x', y', z') de la développée correspondant au point (x, y, z) de l'hélice. Seulement on remplacera l'équation (8) par celle qu'on obtient en égalant les valeurs de $z' - z$ que donnent les équations (8) et (9),

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 - \mathrm{R}^2 a^4} = \mathrm{R}a\sqrt{1+a^2}\,\mathrm{cotang}\,\frac{z+\mathrm{C}}{\mathrm{R}\sqrt{1+a^2}}. \tag{10}$$

Le radical du premier membre devrait être pris avec l'un ou l'autre des signes $\pm$, selon que la cotangente sera positive ou négative.

Soient r et ψ les coordonnées polaires qui déterminent la projection du point (x', y', z') sur le plan des x, y; on aura

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = r, \quad \frac{x'}{r} = \cos\psi, \quad \frac{y'}{r} = \sin\psi,$$

et les équations (7), (9), (10) prendront la forme

$$\cos\left(\psi - \frac{z}{\mathrm{R}a}\right) = -\frac{\mathrm{R}a^2}{r}, \tag{11}$$

$$z' = z \pm \frac{1}{a}\sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2 a^4}, \tag{12}$$

$$\frac{\sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2 a^4}}{\mathrm{R}a\sqrt{1+a^2}} = \mathrm{cotang}\,\frac{z+\mathrm{C}}{\mathrm{R}\sqrt{1+a^2}}. \tag{13}$$

L'équation (13) détermine r quand on se donne z; par suite, les deux autres feront connaître ψ et z', et le point (x', y', z') de la développée sera déterminé. On remarquera que le double signe que renferme l'équation (12) tient à ce que les diverses branches de la développée sont situées alternativement sur les nappes supérieure et inférieure de la surface développable lieu des intersections successives des plans normaux. Il est d'ailleurs facile de distinguer l'un et l'autre cas d'après la position de la portion d'hélice dont on cherche la développée.

Si l'on pose

$$\frac{z+\mathrm{C}}{\mathrm{R}\sqrt{1+a^2}} = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2},$$

k étant un nombre entier quelconque, on aura en vertu des équations (11), (12), (13),

$$r = \mathrm{R}a^2, \quad z' = z, \quad \psi = \pi + \frac{z}{\mathrm{R}a},$$

valeurs qui déterminent un point situé sur l'hélice arête de rebroussement de la surface précédente. Donc la développée coupe cette courbe en une infinité de points dont les distances au plan de la base du cylindre sont données par la formule

$$z' = -\mathrm{C} + \mathrm{R}\sqrt{1 + a^2}\,(2k + 1).\frac{\pi}{2}.$$

La différence des valeurs de ψ qui répondent à deux de ces points supposés consécutifs est constante et égale à $\pi\,\dfrac{\sqrt{1 + a^2}}{a}$, et l'arc de cette hélice compris entre les mêmes points est égal à $\pi\mathrm{R}(1 + a^2)$.

Si l'on pose, en second lieu,

$$\frac{z + \mathrm{C}}{\mathrm{R}\sqrt{1 + a^2}} = k\pi,$$

on voit, par les équations (12) et (13), que r et z' sont infinis, et par l'équation (11) que l'on a

$$\psi = \frac{z}{\mathrm{R}a} + \frac{1}{2}\pi.$$

Cette valeur de ψ détermine la direction de la projection d'une des asymptotes de la développée sur le plan des x, y, et elle montre en même temps que cette projection est tangente au cercle qui sert de base au cylindre donné. En outre, la branche suivante de la développée a même asymptote que la première, car la direction de la projection de cette asymptote serait déterminée par

$$\psi = \frac{z}{\mathrm{R}a} + \frac{3}{2}\pi.$$

Il y a donc une infinité de branches dans la développée, dont chacune est réunie à la précédente par un point de rebroussement, et a avec la suivante une asymptote commune.