JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

U.-J. LE VERRIER

Recherches sur l'orbite de mercure et sur ses perturbations. Détermination de la masse de Vénus et du diamètre du soleil

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 273-359.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__273_0>

RECHERCHES

SUR L'ORBITE DE MERCURE ET SUR SES PERTURBATIONS.

DÉTERMINATION DE LA MASSE DE VÉNUS

ET DU DIAMÈTRE DU SOLEIL;

PAR U.-J. LE VERRIER.

Adeò ut cœlestis hic Mercurius non minùs astronomos torserit, quàm terrestris alchimistas eludat.
(RICCIOLI, *Almagest. nov.* lib. VII, sect. III, cap. I.)

1. Nulle planète n'a demandé aux astronomes plus de soins et de peines que Mercure, et ne leur a donné en récompense tant d'inquiétudes, tant de contrariétés : en les comparant à celles dont le mercure terrestre était la source pour les alchimistes, Riccioli n'a fait qu'émettre l'opinion de tous les astronomes de son temps, et celle de ses prédécesseurs. « Si je connaissais quelqu'un, disait Mœstlinus, qui s'occupât » de Mercure, je me croirais obligé de lui écrire pour lui conseiller » charitablement de mieux employer son temps. » Les astronomes qui, depuis Mœstlinus et Riccioli, ont eu le malheur de s'attacher à la théorie de Mercure, Lalande en particulier, ont dû plus d'une fois se ranger à leur avis.

L'immense difficulté que Mercure a présentée aux anciens astronomes venait surtout de ce que la planète, plongée durant le jour dans les rayons du Soleil, ne pouvait être vue que le soir et le matin dans les vapeurs de l'horizon : en sorte qu'avant l'invention et le perfectionnement des lunettes, il était impossible de l'observer hors de ses élongations. Copernic, empêché par les brouillards de la Vistule, et par la longue durée des crépuscules en été, ne put jamais parvenir à voir Mercure. L'astronome Schouer est cité pour avoir fait à Nuremberg quelques observations de Mercure.

On n'avait donc sur cette planète qu'un petit nombre de données fort peu précises, pour arriver à la détermination d'une orbite très-excentrique. Il n'en résulta pas cependant de grands inconvénients jusqu'en l'année 1631. Les Tables et les observations, avant cette époque, étaient également mauvaises : le tout pouvait marcher ensemble, dans les mêmes limites d'erreur. Mais lorsque, après avoir construit ses Tables rudolphines, Kœpler en vint à prédire, en 1627, un passage de Mercure sur le Soleil pour le 7 novembre 1631, il comprit parfaitement qu'on allait se trouver désormais dans un grand embarras : qu'on serait obligé d'annoncer des phénomènes susceptibles d'être observés avec la plus grande précision, en se fondant sur des Tables très-défectueuses. Et cet immortel auteur n'osa pas assurer que son calcul pût représenter le lieu de Mercure dans ses conjonctions, avec une précision de plus d'un jour.

Kœpler mourut en 1631, quelques jours avant l'époque qu'il avait fixée pour un passage de Vénus sur le Soleil. Ce passage ne fut pas observé. Mais celui de Mercure arriva comme il avait été prédit, et fut aperçu en plusieurs points de l'Europe. Gassendi l'observa à la chambre obscure. Lorsque, le 7 novembre au matin, les nuages vinrent à se dissiper, Gassendi remarqua, sur l'image du Soleil, un point noir, très-net, qu'il prit pour une tache solaire. On attribuait alors à Mercure un diamètre de trois minutes, tandis que la tache avait un diamètre à peine sensible. Gassendi la compara aux bords du Soleil, dans l'intention de lui rapporter ensuite la position de Mercure s'il venait à paraître sur le disque du Soleil. Plusieurs fois, à différents intervalles, il reprit cette mesure; et ce fut en voyant que la prétendue tache avait un mouvement propre très-rapide, qu'il comprit enfin que Mercure était sous ses yeux. Gassendi écrivit à Schickard pour lui rendre compte de son observation : « Plus heureux, dit-il, que tous ces philosophes hermétiques, occupés à chercher *Mercurium in sole* (c'est-à-dire la pierre philosophale), je l'ai trouvé, je l'ai contemplé là où personne avant moi ne l'avait vu. »

L'observation de Gassendi apprit que les Tables de Ptolomée étaient en erreur de $4^\circ 25'$; les Tables prussiennes de Reinhold de 5°; celles de Longomontanus de $7^\circ 13'$; celles de Lansberg de $1^\circ 21'$; et enfin les Tables rudolphines de $14' 24''$.

A l'occasion du passage de 1651, Skakerlœus entreprit un voyage aux grandes Indes, qui n'a servi à rien. Halley fut plus heureux, et en 1677 il fit à Sainte-Hélène la première observation complète d'un passage de Mercure sur le Soleil.

Hevelius observa avec soin le passage de 1661. Cependant Cassini fils, pour expliquer les erreurs des Tables de son père, s'en prit à l'emploi de l'observation d'Hevelius.

La Hire, dont les Tables paraissaient exactes suivant des observations méridiennes, prédit pour le 5 mai 1707 un passage de Mercure sur le Soleil, visible à Paris. Le 5 mai, le Soleil se lève dans tout son éclat, fournit sa course entière sans que le plus léger nuage l'obscurcisse, et Mercure ne paraît pas sur son disque. Le passage eut lieu dans la nuit, et fut entrevu le 6 au matin par Rœmer, à Copenhague.

En mai 1720, de l'Isle attendit vainement un passage indiqué par les Éphémérides, et qui n'eut pas lieu.

Lors du passage de 1753, Lalande alla observer à Meudon, afin de procurer à Louis XV la satisfaction de voir Mercure sur le Soleil. Les Tables de la Hire indiquaient l'entrée sur le disque du Soleil pour le 5 mai au soir; et celles de Halley pour le 6 mai à $6^h 30^m$ du matin. Elle eut réellement lieu le 6 à $2^h 30^m$ du matin.

Après un grand nombre d'essais infructueux sur la théorie de Mercure, Lalande se décide à apprendre le grec, afin de discuter de nouveau les observations qui nous ont été transmises par l'Almageste. Il espère enfin n'avoir plus qu'à jouir du fruit de ses longs travaux, lorsque le passage du 4 mai 1786 vient durement lui apprendre que Mercure est bien toujours cette planète qui, suivant l'opinion de Tycho-Brahé, n'est propre qu'à décrier la réputation des astronomes. « Au » lever du Soleil, dit Delambre, il pleuvait; tous les astronomes de » Paris étaient à leurs lunettes; mais, fatigués d'attendre, ils quittèrent » leur poste une demi-heure après le moment de la sortie calculée » (par les Tables de Lalande), ne conservant plus aucune espé» rance.... Je pris le parti d'attendre jusqu'après le moment in-

» diqué par les Tables de Halley; mais je n'eus pas besoin de tant » de constance. L'observation arriva plus tard de trois quarts d'heure » (53 minutes) que suivant Lalande, mais trois quarts d'heure plus » tôt que suivant Halley. Le Monnier et Pingré, Lalande et son » neveu, Méchain, Cassini et ses trois adjoints, trompés par l'annonce, » avaient tous manqué l'observation. Je leur montrai la mienne le » soir même; ils ne voulaient presque pas y croire. Ce fut la pre- » mière observation que j'eus l'occasion de porter à l'Académie des » Sciences, et c'est de là que je date ma carrière d'astronome ob- » servateur. »

Lalande, toutefois, ne se rebuta pas, et il eut la satisfaction de prédire les passages de 1789, 1799 et 1802, avec plus d'exactitude.

M. de Lindenau s'est occupé de Mercure en 1813. Mais cet astronome ne me paraît pas avoir été heureux dans ses recherches. Un peu de soin l'aurait garanti des fautes nombreuses qu'on y rencontre.

La théorie de Mercure peut être reprise aujourd'hui avec avantage. Les observations méridiennes de cette planète ont été multipliées depuis quarante ans; et, grâce au zèle et à l'habileté persévérante de ses astronomes, l'Observatoire de Paris en possède plus qu'aucun autre de l'Europe. Dans ces derniers temps, depuis 1836 jusqu'en 1842, deux cents observations complètes de Mercure ont été faites, nombre prodigieux si l'on considère la difficulté qu'on a de voir cette planète dans nos climats, et qui a exigé qu'on en saisît attentivement toutes les occasions. Aussi n'est-il pas douteux qu'on en trouverait à peine la moitié autant dans les autres observatoires de l'Europe, quoique je me plaise d'ailleurs à reconnaître leur juste renommée.

Pour la précision, la prééminence appartient encore à la France, et de beaucoup. La discussion d'un grand nombre d'observations du Soleil m'a fait voir que l'erreur moyenne de chacune d'elles ne dépassait pas $\frac{1}{17}$ de seconde de temps à l'Observatoire de Paris. C'est un admirable résultat de la perfection des observations, et dont on a d'autant plus droit d'être fier, qu'il serait facile d'indiquer tel autre lieu dans lequel on observe aussi avec zèle et habileté, et où cependant l'erreur commise est à peu près du double.

Je dois à la libéralité scientifique de l'illustre directeur de notre Observatoire, M. Arago, d'avoir pu puiser sans réserve dans ces précieux recueils, encore inédits. J'ai fait tous mes efforts pour que l'exactitude de la théorie ne restât pas au-dessous de la précision des observations qui m'étaient confiées.

§ Ier.

Éléments provisoires de l'orbite de Mercure. Diamètre et masse de la planète.

2. Le moyen mouvement, admis dans les Tables de M. de Lindenau, pour une année commune de 365 jours, et par rapport à l'équinoxe mobile, est de $49^s 23^\circ 43' 3'',613$; et par suite, ce mouvement en une année julienne est de $49^s 24^\circ 44' 26'',752$. La précession des équinoxes est supposée de $50'',11$.

J'adopterai, dans la suite de ce travail, la valeur suivante de la précession annuelle,

$$50'',2235 + t.0'',000244,$$

le temps t étant compté à partir du 1er janvier 1800. Cette précession surpassant celle des Tables actuelles de Mercure de $0'',1135$, la différence devra être ajoutée au moyen mouvement annuel de la planète par rapport aux équinoxes, et ainsi le moyen mouvement pour une année julienne deviendra égal à $49^s 24^\circ 44' 26'',8655$. C'est ce nombre dont nous aurons à chercher plus tard la correction.

3. En retranchant la précession du moyen mouvement de Mercure rapporté à l'équinoxe, nous trouverons pour son moyen mouvement sidéral, exprimé en secondes sexagésimales, $5\,381\,016'',642$. Pour en déduire le demi-grand axe a de l'orbite, appelons n'' et n les moyens mouvements sidéraux de la Terre et de Mercure, m'' et m les masses respectives de ces deux planètes. Nous aurons

$$a = \left(\frac{n''}{n}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{m - m''}{3}\right);$$

n'' est égal à $1\,295\,977'',382$. Suivant ce que nous dirons plus bas de la masse de Mercure, et d'après la masse connue de la Terre, $(m'' - m)$ est égal à 0,000 002 16. On en déduit

$$a = 0,387\,098\,7.$$

On lit à la page 31 des anciennes Tables : « *Semi-axis major* » $a = 0,387\,093\,8.$ » On voit que les deux dernières décimales de ce nombre sont inexactes.

4. *Époque pour l'an* 1800.

Les Tables donnent la longitude moyenne égale à $3^s\,18^\circ\,4'\,48'',3$, pour le midi du 31 décembre 1799, temps moyen de l'Observatoire du Séeberg. Nous la réduirons au midi moyen de l'Observatoire de Paris, en lui ajoutant $5'\,43'',6$. De plus, pour nous conformer aux usages du Bureau des Longitudes de France, nous transporterons l'époque de chaque année au minuit moyen qui la sépare de l'année précédente, en ajoutant à la longitude moyenne, déterminée pour le midi moyen du 31 décembre 1799, le mouvement pour douze heures, qui est de $2^\circ\,2'\,46'',3$. Nous obtiendrons ainsi l'époque ε suivante,

$$\varepsilon = 3^s\,20^\circ\,13'\,18'',2.$$

5. *Excentricité et longitude du périhélie.*

La Table VI de l'équation du centre, donnée par M. de Lindenau, suppose l'excentricité suivante, en 1800,

$$e = 0,205\,617\,9.$$

On lit cependant à la page 31 : « *Excentricitas* 1800 = 0,205 616 3. » Les deux dernières décimales sont inexactes.

La longitude du périhélie, au 1er janvier 1800, a pour valeur

$$\varpi = 2^s\,14^\circ\,20'\,5'',8.$$

6. *Inclinaison et longitude du nœud.*

Leurs valeurs φ et θ sont, d'après les Tables, pour le 1er janvier 1800, les suivantes,

$$\varphi = 7^\circ\,0'\,5'',9,$$
$$\theta = 1^s\,15^\circ\,57'\,9'',0.$$

7. *Diamètre de la planète.*

On peut le déduire avec précision de l'intervalle de temps qui sépare le contact intérieur et le contact extérieur, lorsque la planète, dans ses passages, quitte le disque du Soleil. On peut aussi l'obtenir par des mesures micrométriques pendant la durée du passage. Il paraît être très-exactement de 3″,34 à la distance moyenne.

Je l'ai supposé, il est vrai, de 3″,23 à cette distance, dans la discussion des différents passages de la planète sur le Soleil; mais il n'en résultera aucun inconvénient: je ne considérerai que les contacts intérieurs, et j'introduirai comme inconnue dans les équations de condition la correction qu'on doit apporter à la différence des demi-diamètres du Soleil et de Mercure pour faire concorder les observations de l'entrée et de la sortie. On pourra donc toujours restituer à Mercure tel diamètre qu'on voudra, pour en déduire la valeur la plus exacte du diamètre du Soleil qu'il convient d'employer dans les observations des passages.

8. *Masse.*

En comparant les masses de la Terre, de Jupiter et de Saturne à leurs volumes, on a remarqué que les densités de ces planètes étaient à peu près en raison inverse de leurs moyennes distances au Soleil. Cette loi n'est pas vraie pour Vénus et Uranus. En l'étendant, toutefois, à Mercure, on en déduirait la densité de cette planète, et par suite sa masse, puisque son volume se conclut du diamètre apparent observé à la distance moyenne. On trouverait ainsi que la masse de la planète est à peu près un deux-millionième de celle du Soleil.

Dans plusieurs recherches, j'ai réduit cette masse à $\frac{1}{3\,000\,000}$, en considération des perturbations qu'elle a fait éprouver à la comète d'Encke, dans son passage au périhélie en 1838. Suivant M. Encke, la masse de Mercure serait encore plus faible, et égale à $\frac{1}{5\,000\,000}$ de la masse du Soleil. Nous conclurons donc seulement que cette masse est fort petite, et qu'elle ne peut avoir aucune influence sensible sur le calcul du grand axe de l'orbite.

§ II.

Formules employées au calcul des perturbations.

9. J'ai déterminé les inégalités des éléments et des coordonnées elliptiques par la méthode de la variation des constantes arbitraires. Le grand nombre d'acceptions sous lesquelles les différents auteurs ont souvent pris un même élément, m'oblige, quel que soit mon désir d'abréger, à bien préciser le sens des quantités que j'emploierai.

Désignons par m la masse de la planète troublée, par a le demi-grand axe de son orbite, par e son excentricité, par φ l'inclinaison du plan de l'orbite sur un plan fixe qui sera celui de l'écliptique en 1800.

Menons dans le plan fixe, par le centre du Soleil, une droite invariable pour servir d'origine aux longitudes projetées sur ce plan, et supposons que cette droite soit la ligne des équinoxes au 1er janvier 1800. Désignons par θ la longitude du nœud ascendant de m, comptée à partir de cette ligne.

Si dans le plan de l'orbite de m nous reportons, à partir du nœud ascendant et dans le sens rétrograde, un angle égal à θ, nous obtiendrons une droite dont la position sera toujours facile à retrouver, malgré les déplacements de l'orbite; nous la prendrons pour servir d'origine aux longitudes dans l'orbite. Nous représenterons par ε la longitude de l'époque au 1er janvier 1800, comptée à partir de cette origine; ϖ sera la longitude du périhélie dans l'orbite, rapportée à la même origine.

Enfin, désignons par les mêmes lettres, mais affectées d'un accent, les éléments de la planète perturbatrice, en sorte que m', a',... soient sa masse, son demi-grand axe, etc.....

Je prendrai pour la fonction perturbatrice, provenant de l'action de m' sur m, l'expression suivante

$$R = (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos v)^{-\frac{1}{2}} - \frac{r\cos v}{r'^2},$$

r et r' étant les rayons vecteurs des deux planètes, et v l'angle compris entre ces rayons vecteurs.

Si nous considérons R comme fonction du temps t et des éléments a, ε, e, ϖ, φ et θ de l'orbite troublée, nous aurons les expressions suivantes de la variation différentielle seconde du moyen mouvement $\rho = nt$, et des variations différentielles des éléments elliptiques :

$$\frac{1}{m'}\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{3an^2}{\mu}\frac{dR}{d\varepsilon},$$

$$\frac{1}{m'}\frac{da}{dt} = \frac{2a^2n}{\mu}\frac{dR}{d\varepsilon},$$

$$\frac{1}{m'}\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2a^2n}{\mu}\frac{dR}{da} + \frac{an}{\mu}\frac{e}{1+(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}}\frac{dR}{de} + \frac{an}{\mu}\frac{\tang\frac{1}{2}\varphi}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{dR}{d\varphi},$$

$$\frac{1}{m'}\frac{de}{dt} = -\frac{an}{\mu}\frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{e}\frac{dR}{d\varpi} - \frac{an}{\mu}\frac{e}{1+(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}}\frac{dR}{d\varepsilon},$$

$$\frac{1}{m'}\frac{d\varpi}{dt} = \frac{an}{\mu}\frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{e}\frac{dR}{de} + \frac{an}{\mu}\frac{\tang\frac{1}{2}\varphi}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{dR}{d\varphi},$$

$$\frac{1}{m'}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{an}{\mu}\frac{(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sin\varphi}\frac{dR}{d\theta} - \frac{an}{\mu}\frac{\tang\frac{1}{2}\varphi}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{dR}{d\varepsilon} + \frac{dR}{d\varpi}\right),$$

$$\frac{1}{m'}\frac{d\theta}{dt} = \frac{an}{\mu}\frac{(1-e^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sin\varphi}\frac{dR}{d\varphi}.$$

μ représente le rapport de la somme des masses du Soleil et de la planète troublée, à la masse du Soleil.

10. En ne considérant d'abord que la première puissance des masses perturbatrices, comme on doit commencer par le faire dans tous les cas, et ce qui, d'ailleurs, suffit pour la théorie particulière de Mercure, à cause de la petitesse de ses inégalités, on pourra, dans la fonction R, remplacer r, r' et v par leurs valeurs en fonctions des éléments des orbites et du temps. La même simplification devra être apportée aux fonctions dérivées de R, qui deviendront ainsi susceptibles d'être développées par rapport aux sinus et aux cosinus des multiples des longitudes moyennes. Et cela étant fait, l'intégration des formules précédentes fera connaître les inégalités finies $\delta\rho$, δa, $\delta\varepsilon$, δe, $d\varpi$, $\delta\varphi$ et $\delta\theta$ des éléments elliptiques en fonctions du temps.

On en conclura les variations finies de la longitude v dans l'orbite, du rayon vecteur r, et de la latitude héliocentrique λ par les formules suivantes, dans lesquelles z représente l'anomalie moyenne $nt + \varepsilon - \varpi$:

$$\begin{aligned}
\delta v &= \delta\rho + \delta\varepsilon \\
&+ \left\{\left(2e - \tfrac{1}{4}e^3\right)\cos z + \left(\tfrac{5}{2}e^2 - \tfrac{11}{12}e^4\right)\cos 2z + \tfrac{13}{4}e^3\cos 3z + \tfrac{103}{24}e^4\cos 4z\right\}\delta z \\
&+ \left\{\left(2 - \tfrac{3}{4}e^2\right)\sin z + \left(\tfrac{5}{2}e - \tfrac{11}{6}e^3\right)\sin 2z + \left(\tfrac{13}{4}e^2 - \tfrac{215}{64}e^4\right)\sin 3z + \tfrac{103}{24}e^3\sin 4z\right\}\delta e;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta r &= \left\{\left(1 + \tfrac{1}{2}e^2\right) - \left(e - \tfrac{3}{8}e^3\right)\cos z - \tfrac{1}{2}e^2\cos 2z\right\}\delta a \\
&+ \left\{ae - a\left(1 - \tfrac{9}{8}e^2\right)\cos z - ae\cos 2z - \tfrac{9}{8}ae^2\cos 3z\right\}\delta e \\
&+ \left\{a\left(e - \tfrac{3}{8}e^3\right)\sin z + ae^2\sin 2z\right\}\delta z;
\end{aligned}$$

$$\delta\lambda = \sin(v - \theta)\,\delta\varphi - \cos(v - \theta)\tang\varphi\,\delta\theta.$$

Cette dernière formule suppose, selon l'usage des Tables, qu'on prenne la longitude troublée pour argument de la latitude.

11. La réduction en série de la fonction R peut s'effectuer par différentes méthodes que j'ai suivies tour à tour suivant les circonstances. On peut développer algébriquement chacun de ses termes suivant les puissances des excentricités et des inclinaisons. J'ai publié des Tables complètes et exactes des valeurs numériques des différents coefficients qui entrent dans les expressions auxquelles on est conduit par cette méthode. Ce mode de développement offre cet avantage, que la fraction R étant une fois réduite en série, on en déduit immédiatement les développements de ses dérivées partielles par la différentiation. Mais, d'un autre côté, on est obligé, pour ne pas tomber dans des longueurs inextricables, de ne conserver que ceux des termes qui peuvent devenir sensibles; c'est une élimination délicate, et dans laquelle on peut s'égarer.

On évite ce dernier inconvénient en calculant directement la valeur numérique des coefficients de la fonction perturbatrice par des intégrales doubles. C'est une marche sûre, mais très-pénible; le développement des fonctions dérivées se déduisant alors moins simplement de celui de la fonction R, même en s'aidant des relations que j'indiquerai plus bas comme moyen de vérification. On pourra souvent conserver en partie les avantages qu'offrent les deux méthodes, en les réunissant comme je vais l'indiquer sommairement.

12. Soient l' et l les longitudes moyennes $n't + \varepsilon'$ et $nt + \varepsilon$ de deux planètes m' et m, et posons, en général, pour l'expression du développement de la fonction perturbatrice :

$$R = \sum (i', i) \sin(i'l' - il) + \sum [i', i] \cos(i'l' - il).$$

Dans la méthode des intégrales doubles, on commencera par lui donner la forme

$$R = \sum A_{s,i'} \sin i'l' + \sum A_{c,i'} \cos i'l',$$

$A_{s,i'}$ et $A_{c,i'}$ étant des fonctions de la longitude vraie et du rayon vecteur de m, des éléments de l'orbite de m', et de l'inclinaison relative des orbites des deux planètes. On déterminera par interpolation les valeurs numériques de $A_{s,i'}$ et $A_{c,i'}$ pour des longitudes moyennes de m équidistantes entre elles ; puis, par une seconde interpolation, on en déduira les valeurs des différents coefficients (i', i) et $[i', i]$. La première interpolation peut être évitée, en formant l'expression algébrique des quantités $A_{s,i'}$ et $A_{c,i'}$.

Bornons-nous à la première partie de l'expression n° 9 de R, la seule qui fournisse les inégalités à longue période pour lesquelles il est surtout commode d'opérer, comme je l'indique ici. En y remplaçant le cosinus de l'angle v par sa valeur en fonction des longitudes vraies t' et t, comptées de l'intersection mutuelle des orbites, et en fonction de l'inclinaison relative Φ de ces orbites, cette expression deviendra

$$R = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos t \cos t' - 2rr' \cos\Phi \sin t \sin t')^{-\frac{1}{2}};$$

nous avons à la développer suivant les sinus et les cosinus des multiples de la longitude moyenne l', en attribuant à t et à r des valeurs particulières.

Si nous négligeons d'abord l'excentricité de m', r' et t' se réduiront à a' et à l', et en désignant par R_0 ce que devient alors R, nous aurons

$$R_0 = [a'^2 + r^2 - 2a'r\cos t(\cos l' + \cos\Phi \operatorname{tang} t \sin l')]^{-\frac{1}{2}}.$$

En posant

$$\operatorname{tang}\tau = \cos\Phi \operatorname{tang} t, \quad \text{et} \quad \frac{\cos t}{\cos\tau} = \cos\lambda,$$

il viendra plus simplement

$$R_0 = [a'^2 + r^2 - 2a'r\cos\lambda\cos(l' - \tau)]^{-\frac{1}{2}},$$

τ étant la distance de m à son nœud, projetée sur l'orbite de m', et λ la latitude de m au-dessus du plan de l'orbite de m'.

Posons actuellement,

$$\begin{aligned} K(1 + \alpha^2) &= a'^2 + r^2, \\ K\alpha &= a'r\cos\lambda, \end{aligned}$$

deux relations dont on déduira les valeurs de α et de K. La valeur de α en particulier dépendra de l'équation réciproque,

$$\alpha^2 - \frac{1}{\cos\lambda}\left(\frac{a'}{r} + \frac{r}{a'}\right)\alpha + 1 = 0.$$

Parmi les deux racines positives que fournit cette équation, on prendra celle qui est plus petite que l'unité, et l'on aura

$$R_0 = K^{-\frac{1}{2}}[1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(l' - \tau)]^{-\frac{1}{2}}.$$

On sait développer cette expression, et en posant

$$R_0 = K^{-\frac{1}{2}} \sum b_{\frac{1}{2}}^{(i')} \cos i'(l' - \tau),$$

i' ayant toutes les valeurs entières et positives, zéro compris, on trouvera pour les parties de $A_{s,i'}$ et $A_{c,i'}$ indépendantes de l'excentricité de m',

$$\begin{aligned} A_{s,i'} &= K^{-\frac{1}{2}} b_{\frac{1}{2}}^{(i')} \sin i'\tau, \\ A_{c,i'} &= K^{-\frac{1}{2}} b_{\frac{1}{2}}^{(i')} \cos i'\tau. \end{aligned}$$

La simplicité et l'exactitude du calcul sont ainsi indépendantes de l'inclinaison mutuelle des orbites.

13. Désignons actuellement par R_1 la partie de R dépendante de la première puissance de l'excentricité de m'. Nous aurons

$$R_1 = \frac{dR_0}{de'} \times e',$$

en indiquant par $\frac{dR_0}{de'}$ la dérivée de R par rapport à e', dans laquelle on a ensuite fait $e' = 0$. La différentiation de R nous donnera

$$R_1 = -\tfrac{1}{2} e' \left[a'^2 + r^2 - 2a'r\cos\lambda\cos(l' - \tau)\right]^{-\frac{3}{2}}$$
$$\times \left\{2\frac{dr'_0}{de'}r'_0 - 2r\cos t\frac{d.r'_0\cos t'_0}{de'} - 2r\sin t\cos\Phi\frac{d.r'_0\sin t'_0}{de'}\right\}.$$

On posera, comme ci-dessus,

$$\left[a'^2 + r^2 - 2a'r\cos\lambda\cos(l' - \tau)\right]^{-\frac{3}{2}} = K^{-\frac{3}{2}}\sum b_{\frac{3}{2}}^{(i')}\cos i'(l' - \tau),$$

et quant au dernier facteur de l'expression de R_1, on le trouvera, en le développant, égal à

$$\left\{\begin{array}{l} -2a'^2\cos(l' - \varpi') + 3a'\cos\varpi'.r\cos t - a'r\cos t\cos(2l' - \varpi') \\ +\cos\Phi\left[3a'\sin\varpi'.r\sin t - a'r\sin t\sin(2l' - \varpi')\right] \end{array}\right\}.$$

Il reste à porter ces expressions dans la valeur de R_1 et à les multiplier l'une par l'autre, en s'arrêtant aux termes en $i'l'$. Si, d'ailleurs, on réunit l'expression qu'on trouvera ainsi avec celle du numéro précédent, on obtiendra, pour la valeur complète des coefficients $A_{s,i'}$ et $A_{c,i'}$,

$$A_{s,i'} = K^{-\frac{1}{2}}b_{\frac{1}{2}}^{(i')}\sin i'\tau - \frac{e'}{2}a'rK^{-\frac{3}{2}}\{M\sin[(i'-1)\tau + \varpi'] + N\sin[(i'-1)\tau - \varpi']\},$$

$$A_{c,i'} = K^{-\frac{1}{2}}b_{\frac{1}{2}}^{(i')}\cos i'\tau - \frac{e'}{2}a'rK^{-\frac{3}{2}}\{M\cos[(i'-1)\tau + \varpi'] + N\cos[(i'-1)\tau - \varpi']\},$$

expressions dans lesquelles j'ai posé pour abréger,

$$M = \left\{\frac{3}{2}b_{\frac{3}{2}}^{(i')} - \frac{a'}{r\cos\lambda}b_{\frac{3}{2}}^{(i'-1)} - \frac{1}{2}b_{\frac{3}{2}}^{(i'-2)}\right\}\cos\lambda,$$
$$N = \left\{\frac{3}{2}b_{\frac{3}{2}}^{(i')} - \frac{a'}{r\cos\lambda}b_{\frac{3}{2}}^{(i'+1)} - \frac{1}{2}b_{\frac{3}{2}}^{(i'+2)}\right\}\cos\lambda.$$

Si l'on rapporte les lettres accentuées à Vénus, e' sera très-petit, et son carré sera négligeable. Les résultats précédents permettront de reconnaître simplement que les perturbations des ordres élevés sont toutes insensibles au delà du troisième, malgré la petitesse de leur argument, et malgré la grandeur de l'excentricité de Mercure.

Mais on pourra aussi rapporter les lettres accentuées à Mercure. Et alors le développement étant effectué par cette voie jusqu'à la troisième puissance de l'excentricité, on s'en servira avec avantage pour passer aux expressions des dérivées partielles de R prises par rapport aux éléments de Mercure, et dont on a besoin dans la théorie de cette planète.

14. Considérons en particulier une perturbation de la longitude moyenne, donnée par la réunion des termes semblables compris dans $\delta\rho$ et $\delta\varepsilon$, et d'un ordre élevé égal à la quantité positive $(i - i')$. Cette perturbation existera aussi dans l'anomalie moyenne : on pourrait donc l'y introduire algébriquement, et chercher par les formules du n° **10** les inégalités correspondantes de l'équation du centre et du rayon vecteur. Mais on introduirait ainsi dans ces coordonnées plusieurs inégalités qu'on ne pourrait pas réduire avec les inégalités sensibles qui proviennent des variations des autres éléments de l'orbite.

On évite cet inconvénient, et la complication des tables qui en résulterait, en réservant les inégalités de la longitude moyenne pour ajouter, dans le calcul de chaque lieu héliocentrique, leur grandeur numérique à la valeur angulaire de la longitude moyenne, et à celle de l'anomalie moyenne qui sert aux calculs de l'équation du centre et du rayon vecteur. En cela, je ne ferai que me conformer aux usages de la *Mécanique céleste*. Si l'on n'aperçoit pas toujours clairement au premier abord, et du point de vue analytique, le but que son immortel auteur s'est proposé d'atteindre dans la détermination des constantes introduites par les intégrations, on ne tarde pas à reconnaître que le calcul a sans cesse été plié avec une admirable intelligence aux exigences astronomiques. Plus on examine avec soin la forme des résultats auxquels Laplace s'est arrêté, et plus on reconnaît la nécessité de s'y astreindre.

15. Si j'insiste sur ce mérite astronomique de la *Mécanique céleste*, c'est qu'il a été souvent méconnu par les géomètres, et quelquefois même par les astronomes. On regrette d'avoir à reprocher aux Tables de Gotha, sur lesquelles sont calculées toutes les éphémérides de Mercure, des fautes telles que les suivantes.

Les perturbations à longue période, au lieu d'être appliquées à la longitude moyenne, ont été ajoutées à la longitude vraie, contrairement à ce que prescrit la *Mécanique céleste,* dans le courant du second et du sixième livre. C'est ce qu'on voit clairement dans le *paradigma calculi,* donné à la page 39. Il en peut résulter une erreur d'environ $4'',0$ sur la longitude héliocentrique; tandis qu'à la page 32 l'auteur indique qu'il n'a voulu négliger que les perturbations inférieures à $0'',5$.

La perturbation de la longitude vraie, argument VIII des Tables, dépendante de l'angle $5n' - 3n$, a été changée de signe. Il suffit, pour s'en convaincre, de comparer sa valeur inscrite à la page 32 de la Table, avec son expression donnée à la page 97 du troisième volume de la *Mécanique céleste.*

Il en est de même de la perturbation de la longitude, argument IX de la Table, dépendante de l'angle $3n'-n$. Malheureusement, d'ailleurs, ce ne sont pas de simples fautes d'impression : les Tables sont bien construites sur ces perturbations changées de signes. La somme de ces deux nouvelles erreurs peut s'élever à $5'',0$. En sorte que, par les seules inexactitudes commises par l'auteur, en empruntant les perturbations à la *Mécanique céleste,* l'erreur de la longitude héliocentrique peut être de $9'',0$. Les perturbations dues à l'action de Vénus pouvant se trouver ainsi en erreur de la moitié de leur valeur maximum, quelle confiance pourrait-on accorder à la correction de la masse de Vénus, à laquelle l'auteur les a fait concourir, et qui est tout à fait inconciliable avec la diminution observée de l'obliquité de l'écliptique? Mais c'est un sujet sur lequel j'aurai à revenir.

Enfin, les perturbations du rayon vecteur, dépendantes de la différence des moyens mouvements de Mercure et de Vénus, ont toutes été changées de signes. Voir la page 32 de la Table, et la page 96 du troisième volume de la *Mécanique céleste.*

16. En ne développant pas l'inégalité de la longitude moyenne, dépendante d'un argument $in - i'n'$ d'un ordre élevé, les inégalités de la longitude vraie qui dériveront de cet argument ne pourront provenir que de la variation de l'excentricité et de celle du périhélie. On les obtiendra sensiblement par les formules

$$\delta e = -\frac{anm'}{e}\int \frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}\,dt,$$

$$\delta\varpi = \frac{anm'}{e}\int \frac{d\mathrm{R}}{de}\,dt,$$

$$d\nu = 2\delta e \sin(nt + \varepsilon - \varpi) - 2e\delta\varpi\cos(nt + \varepsilon - \varpi).$$

Un terme quelconque de R, correspondant à l'argument $in - i'n'$, et de l'ordre le moins élevé, est toujours de la forme

$$\mathrm{M}e^h \cos(int - i'n't + i\varepsilon - i'\varepsilon' - \psi - h\varpi),$$

l'exposant h de l'excentricité étant égal au multiplicateur de $-\varpi$ sous le signe cosinus. On en déduit successivement

$$\delta e = \frac{anm'he^{h-1}\mathrm{M}}{in - i'n'}\cos(int - i'n't + i\varepsilon - i'\varepsilon' - \psi - h\varpi),$$

$$\delta\varpi = \frac{anm'he^{h-2}\mathrm{M}}{in - i'n'}\sin(int - i'n't + i\varepsilon' - \psi - h\varpi),$$

$$\delta\nu = -\frac{2anm'he^{h-1}\mathrm{M}}{in - i'n'}\sin[(i-1)nt - i'n't + (i-1)\varepsilon - i'\varepsilon' - \psi - (h-1)\varpi].$$

On voit donc que $\delta\nu$ ne renfermera aucun terme dépendant de l'argument $(i+1)n - i'n'$. Ce terme s'évanouira à cause de la forme particulière du développement de la fonction perturbatrice, et de celle des expressions différentielles des variations de l'excentricité et du périhélie. J'ai toujours eu soin de calculer les variations de l'excentricité et du périhélie indépendamment l'une de l'autre, afin d'obtenir des vérifications par la réduction à zéro de la somme des nombres qui composent le coefficient d'un des termes de la forme de ceux que nous venons de considérer.

17. La vérification précédente s'applique à l'ensemble des calculs. On pourra obtenir par le moyen suivant autant de vérifications qu'on le voudra des développements des dérivées partielles de la fonction R. Reprenons l'expression n° 9 de cette fonction; désignons le facteur $\cos\theta$ par s, et différentions par rapport à a. Nous trouverons, en remarquant que $a\frac{dr}{da}$ est égal à r,

$$a\frac{d\mathrm{R}}{da} = -\left[(r^2 + r'^2 - 2rr's)^{-\frac{3}{2}}(r - r's) + \frac{s}{r'^2}\right] r.$$

Prenons actuellement la dérivée de R par rapport à ε,

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon} = -\left[(r^2 + r'^2 - 2rr's)^{-\frac{3}{2}}(r - r's) + \frac{s}{r'^2}\right]\frac{dr}{d\varepsilon}$$
$$+\left[(r^2 + r'^2 - 2rr's)^{-\frac{3}{2}}rr' - \frac{r}{r'^2}\right]\frac{ds}{d\varepsilon}.$$

Dans cette expression le coefficient de $\frac{dr}{d\varepsilon}$ peut se remplacer par sa valeur en fonction de $a\frac{d\mathrm{R}}{da}$; et en observant d'ailleurs que s ne contient ε que parce qu'il est fonction de la longitude v de Mercure, le second terme pourra s'écrire plus simplement sous la forme $\mathrm{G}\frac{dv}{d\varepsilon}$, et l'on aura

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon} = a\frac{d\mathrm{R}}{da}\cdot\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varepsilon} + \mathrm{G}\frac{dv}{d\varepsilon}.$$

Nous trouverons de même, en conservant à la lettre G sa signification,

$$\frac{d\mathrm{R}}{de} = a\frac{d\mathrm{R}}{da}\cdot\frac{1}{r}\frac{dr}{de} + \mathrm{G}\frac{dv}{de},$$
$$\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi} = a\frac{d\mathrm{R}}{da}\cdot\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varpi} + \mathrm{G}\frac{dv}{d\varpi}.$$

On déduit des trois équations précédentes trois valeurs de G qui doivent être identiques. En les désignant par M, P, Q, leurs expressions seront les suivantes :

$$\mathrm{M} = \frac{\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon} - a\frac{d\mathrm{R}}{da}\cdot\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varepsilon}}{\frac{dv}{d\varepsilon}},$$

$$\mathrm{P} = \frac{\frac{d\mathrm{R}}{de} - a\frac{d\mathrm{R}}{da}\cdot\frac{1}{r}\frac{dr}{de}}{\frac{dv}{de}}, \qquad \mathrm{Q} = \frac{\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi} - a\frac{d\mathrm{R}}{da}\cdot\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varpi}}{\frac{dv}{d\varpi}}.$$

Pour appliquer cette remarque à la vérification des développements des dérivées partielles, il faudra attribuer à la longitude de Mercure une valeur particulière. Les dérivées de r et v ne seront plus des séries, mais bien des nombres faciles à calculer. Et alors l'égalité des quantités M, P et Q devra se vérifier séparément pour chacun des coefficients des sinus et des cosinus des multiples de la longitude moyenne de Vénus. La vérification sera très-simple si l'on attribue à la longitude moyenne de Mercure une des valeurs suivantes, 0°, 90°, 180° ou 270°. Mais le choix ne sera pas indifférent entre ces quatre positions; et il faudra prendre celle qui ne fera pas acquérir une valeur trop petite aux trois dérivées $\frac{dv}{d\varepsilon}$, $\frac{dv}{de}$, $\frac{dv}{d\varpi}$, et à l'une au moins des trois quantités $\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varepsilon}$, $\frac{1}{r}\frac{dr}{de}$ et $\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varpi}$. La longitude $l = 270°$ satisfait bien à ces conditions, et l'on trouve dans ce cas, en multipliant les quantités M, P et Q par $\frac{dv}{d\varepsilon}$, que les trois expressions

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon} + 0{,}032\, a\,\frac{d\mathrm{R}}{da},$$

$$-\,1{,}971\,\frac{d\mathrm{R}}{de} + 1{,}614\, a\,\frac{d\mathrm{R}}{da},$$

$$2{,}117\,\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi} - 0{,}068\, a\,\frac{d\mathrm{R}}{da},$$

doivent être égales entre elles.

§ III.

Variations séculaires des éléments de l'orbite.

18. J'ai traité avec détail des inégalités séculaires des orbites des sept planètes principales dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1843 et 1844. Je renverrai à cet ouvrage, ou bien au tome V du présent Recueil, page 220, pour l'expression en termes finis des éléments de l'orbite de Mercure à une époque quelconque. Ces formules générales ne nous seront ici d'aucun usage. Il est, au contraire, indispensable de rappeler les expressions des variations annuelles des éléments elliptiques, telles que je les ai obtenues dans la *Connaissance des Temps* pour 1844, en ne négligeant que les termes du cinquième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons.

Si nous substituons d'abord aux variables e et ϖ, φ et θ les arbitraires suivantes,

$$h = e \sin \varpi, \quad p = \operatorname{tang} \varphi \sin \theta,$$
$$l = e \cos \varpi, \quad q = \operatorname{tang} \varphi \cos \theta,$$

nous trouverons pour les expressions de leurs variations, en fonctions du temps t, compté à partir du 1^er^ janvier 1800 :

$$\begin{aligned} \delta h &= 0'',334\, t - 0'',000\,014\,0\, t^2, \\ \delta l &= - 1'',033\, t - 0'',000\,004\,8\, t^2, \\ \delta p &= - 0'',534\, t - 0'',000\,001\,0\, t^2, \\ \delta q &= 0'',244\, t - 0'',000\,005\,8\, t^2. \end{aligned}$$

Ces termes ont été calculés en supposant pour les différentes planètes les masses suivantes :

Vénus.......	$m' = \frac{1}{401\,847}$,	Jupiter.....	$m^{\text{IV}} = \frac{1}{1\,050}$,
La Terre.....	$m'' = \frac{1}{354\,986}$,	Saturne.....	$m^{\text{V}} = \frac{1}{3\,512}$,
Mars........	$m''' = \frac{1}{2\,680\,637}$,	Uranus.....	$m^{\text{VI}} = \frac{1}{17\,918}$.

J'ai ajouté les termes proportionnels au carré du temps, que je n'avais pas calculés dans le travail cité. Les variations de p et q sont relatives au plan de l'écliptique de 1800, et à la ligne fixe passant à cette époque par l'équinoxe du printemps.

19. Nous allons déduire des formules précédentes les variations du double de l'excentricité, et de la longitude du périhélie pour l'époque de 1800, en négligeant les termes proportionnels au carré du temps, ce qui suffira toujours aux usages astronomiques; à moins qu'on ne voulût remonter aux observations qui nous ont été transmises par Ptolémée, ce qu'on ferait alors aisément au moyen des valeurs de δh, δl, δp et δq. Nous avons, pour calculer $2\delta e$ et $\delta\varpi$, les relations suivantes :

$$2\,\delta e = \frac{2h}{e}\,\delta h + \frac{2l}{e}\,\delta l,$$
$$\delta\varpi = \frac{l}{e^2}\,\delta h - \frac{h}{e^2}\,\delta l.$$

Il nous sera de plus nécessaire de connaître les corrections que ces variations subiraient par des changements apportés aux masses perturbatrices adoptées dans le numéro précédent. Si nous désignons par ν', ν'', ν''', ν^{IV}, ν^{V} les rapports des changements que pourraient réclamer les masses de Vénus, la Terre..., aux masses mêmes des planètes, nous obtiendrons :

$$2\,\delta e = 0'',0850\,t + (0'',056\,\nu' + 0'',022\,\nu'' - 0'',001\,\nu''' + 0'',007\,\nu^{\text{IV}} + 0'',001\,\nu^{\text{V}}) \times t,$$
$$\delta\varpi = 5'',278\;\; t + (2'',81\;\; \nu' + 0'',83\;\; \nu'' + 0'',03\;\; \nu''' + 1'',52\;\; \nu^{\text{IV}} + 0'',08\;\; \nu^{\text{V}}) \times t.$$

20. Nous pourrions semblablement calculer les mouvements de l'inclinaison et du nœud de la planète sur l'écliptique de 1800. Mais comme c'est à l'écliptique mobile que nous rapportons les positions des astres, il est préférable de déterminer les changements qu'éprouve l'orbite de Mercure par rapport à cette écliptique. Si nous désignons par φ_1 et θ_1 l'inclinaison de l'orbite, et la longitude de son nœud ascendant, rapportées à l'écliptique mobile, les variations de ces éléments seront données par les formules suivantes,

$$\delta\varphi_1 = (\delta p - \delta p'')\sin\theta + (\delta q - \delta q'')\cos\theta,$$
$$\delta\theta_1 = (\delta p - \delta p'')\frac{\cos\theta}{\operatorname{tang}\varphi} - (\delta q - \delta q'')\frac{\sin\theta}{\operatorname{tang}\varphi};$$

$\delta p''$ et $\delta q''$ se rapportent au mouvement de l'écliptique vraie par rapport au plan fixe de 1800, et l'on a

$$\delta p'' = 0'',0627, \quad \delta q'' = -\,0'',4755\ [*].$$

En tenant d'ailleurs compte des changements qu'on devrait apporter à ces nombres par suite de corrections introduites dans les masses perturbatrices, on trouvera

$$\delta\varphi_1 = \quad 0'',0711\,t + (-0'',001\,\nu - 0'',003\,\nu' - 0'',013\,\nu'' + 0'',079\,\nu^{\text{IV}} + 0'',009\,\nu^{\text{V}})\,t,$$
$$\delta\theta_1 = -\,7'',585\,t + (-0'',07\,\nu - 4'',09\,\nu' - 0'',92\,\nu'' - 0'',11\,\nu''' - 2'',28\,\nu^{\text{IV}} - 0'',11\,\nu^{\text{V}})\,t.$$

---

[*] Je viens de voir avec plaisir, dans un Rapport de M. Struve sur un Mémoire de M. Peters, que ces nombres s'accordent aussi bien qu'on peut le désirer avec la variation observée de l'obliquité de l'écliptique. Nouvelle preuve que la masse de Vénus est bien déterminée, et qu'on ne doit pas l'augmenter énormément comme l'a fait M. de Lindenau. Voir les *Astronomische Nachrichten*, n° 486, pages 89 et 90.

Le mouvement séculaire de l'inclinaison relative est fort différent de celui qu'on avait obtenu en s'arrêtant aux premières puissances des excentricités et des inclinaisons, et que M. de Lindenau (page 31) porte, par l'accroissement de la masse de Vénus, jusqu'à 18″,38; tandis que je trouve seulement 7″,11. Je ne puis toutefois douter en aucune façon du nombre que je donne ici, et que j'ai déterminé par deux procédés entièrement distincts l'un de l'autre, savoir, par des développements algébriques et ensuite par interpolation.

§ IV.

Variations périodiques des éléments de l'orbite et des coordonnées héliocentriques.

21. Les changements considérables que les termes d'ordre supérieur apportent au mouvement de l'inclinaison relative, à cause de la grandeur de l'excentricité de Mercure, et du voisinage de Vénus, doivent nous faire craindre qu'il n'en soit de même dans le calcul des perturbations périodiques. Et, en effet, plusieurs termes du second ordre sont aussi sensibles que ceux du premier, bien que leurs arguments ne soient pas plus petits. Je dois donc, afin de convaincre le lecteur que je n'ai rien négligé d'important, rapporter tous les développements relatifs aux perturbations que Vénus produit dans le mouvement de Mercure. Les séries relatives aux actions de la Terre, de Jupiter et de Saturne étant très-convergentes, je ne les traiterai pas avec le même détail, et je me bornerai à donner pour ces planètes les perturbations que leur action m'a fournies. Mars et Uranus n'ont aucune influence sensible.

Perturbations produites par Vénus.

22. L'excentricité de cette planète étant très-petite, on reconnaît aisément, par les formules du n° **13**, qu'elle n'a aucune influence sur les perturbations de Mercure, si ce n'est sur celle à longue période, dépendante de l'argument $5n' - 2n$, et qu'elle affecte légèrement. Je calculerai ce terme à part, de manière à ne laisser aucun doute à son égard; et alors, dans les développements généraux qui vont suivre, je pourrai supposer nulle l'excentricité de Vénus. Je ne négligerai, au contraire, aucune puissance de l'excentricité de Mercure, ou de l'inclinaison relative qui puisse influer sur les décimales conservées : c'est ce qui importait surtout, à cause de la grandeur de l'excentricité de Mercure.

Soient toujours l' et l les longitudes moyennes de Vénus et de Mercure. Pour éviter l'emploi des décimales, je donnerai les expressions de $100\,000\,\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}$, $1\,000\,a\,\frac{d\mathrm{R}}{da}$, $1\,000\,\frac{d\mathrm{R}}{de}$ et $10\,000\,\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}$. Désignant, d'ailleurs, les sinus et cosinus par les seules lettres S et C, nous aurons :

$$
\begin{aligned}
100\,000\,\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon} = {} & \\
& - 1\,720\,\mathrm{S}(0l'-1l) + 296\,\mathrm{S}(0l'-2l) + 36\,\mathrm{S}(0l'-3l) \\
+ 0\,\mathrm{C}(0l'-0l) & - 5\,682\,\mathrm{C}(0l'-1l) + 216\,\mathrm{C}(0l'-2l) + 54\,\mathrm{C}(0l'-3l) \\[1ex]
+ 10\,812\,\mathrm{S}(1l'-1l) & - 964\,\mathrm{S}(1l'-2l) + 417\,\mathrm{S}(1l'-3l) + 0\,\mathrm{S}(1l'-4l) \\
- 40\,\mathrm{C}(1l'-1l) & - 2\,612\,\mathrm{C}(1l'-2l) + 45\,\mathrm{C}(1l'-3l) + 72\,\mathrm{C}(1l'-4l) \\
& + 0\,\mathrm{S}(1l'+0l) + 595\,\mathrm{S}(1l'+1l) - 52\,\mathrm{S}(1l'+2l) \\
& + 0\,\mathrm{C}(1l'+0l) + 523\,\mathrm{C}(1l'+1l) - 36\,\mathrm{C}(1l'+2l) \\[1ex]
+ 62\,470\,\mathrm{S}(2l'-2l) & + 4\,140\,\mathrm{S}(2l'-3l) - 3\,592\,\mathrm{S}(2l'-4l) - 875\,\mathrm{S}(2l'-5l) + 114\,\mathrm{S}(2l'-6l) \\
- 300\,\mathrm{C}(2l'-2l) & + 15\,477\,\mathrm{C}(2l'-3l) + 2\,396\,\mathrm{C}(2l'-4l) - 740\,\mathrm{C}(2l'-5l) - 264\,\mathrm{C}(2l'-6l) \\
& - 5\,856\,\mathrm{S}(2l'-1l) + 0\,\mathrm{S}(2l'+0l) - 187\,\mathrm{S}(2l'+1l) + 6\,\mathrm{S}(2l'+2l) \\
& + 20\,987\,\mathrm{C}(2l'-1l) + 0\,\mathrm{C}(2l'+0l) + 84\,\mathrm{C}(2l'+1l) - 4\,\mathrm{C}(2l'+2l) \\[1ex]
+ 36\,105\,\mathrm{S}(3l'-3l) & + 3\,576\,\mathrm{S}(3l'-4l) - 3\,630\,\mathrm{S}(3l'-5l) - 936\,\mathrm{S}(3l'-6l) + 91\,\mathrm{S}(3l'-7l) \\
- 309\,\mathrm{C}(3l'-3l) & + 13\,244\,\mathrm{C}(3l'-4l) + 2\,340\,\mathrm{C}(3l'-5l) - 834\,\mathrm{C}(3l'-6l) - 329\,\mathrm{C}(3l'-7l) \\
& - 7\,292\,\mathrm{S}(3l'-2l) - 4\,192\,\mathrm{S}(3l'-1l) + 0\,\mathrm{S}(3l'+0l) + 5\,\mathrm{S}(3l'+1l) \\
& + 26\,422\,\mathrm{C}(3l'-2l) - 2\,658\,\mathrm{C}(3l'-1l) + 0\,\mathrm{C}(3l'+0l) - 39\,\mathrm{C}(3l'+1l) \\[1ex]
+ 17\,728\,\mathrm{S}(4l'-4l) & + 2\,530\,\mathrm{S}(4l'-5l) - 3\,006\,\mathrm{S}(4l'-6l) - 882\,\mathrm{S}(4l'-7l) + 160\,\mathrm{S}(4l'-8l) \\
- 256\,\mathrm{C}(4l'-4l) & + 9\,270\,\mathrm{C}(4l'-5l) + 1\,902\,\mathrm{C}(4l'-6l) - 756\,\mathrm{C}(4l'-7l) - 304\,\mathrm{C}(4l'-8l) \\
& - 6\,144\,\mathrm{S}(4l'-3l) - 7\,246\,\mathrm{S}(4l'-2l) + 828\,\mathrm{S}(4l'-1l) + 0\,\mathrm{S}(4l'+0l) \\
& + 22\,590\,\mathrm{C}(4l'-3l) - 4\,506\,\mathrm{C}(4l'-2l) - 700\,\mathrm{C}(4l'-1l) + 0\,\mathrm{C}(4l'+0l) \\[1ex]
+ 7\,295\,\mathrm{S}(5l'-5l) & + 1\,560\,\mathrm{S}(5l'-6l) - 2\,233\,\mathrm{S}(5l'-7l) - 704\,\mathrm{S}(5l'-8l) + 117\,\mathrm{S}(5l'-9l) + 120\,\mathrm{S}(5l'-10l) \\
- 165\,\mathrm{C}(5l'-5l) & + 5\,670\,\mathrm{C}(5l'-6l) + 1\,407\,\mathrm{C}(5l'-7l) - 552\,\mathrm{C}(5l'-8l) - 279\,\mathrm{C}(5l'-9l) + 90\,\mathrm{C}(5l'-10l) \\
& - 4\,296\,\mathrm{S}(5l'-4l) - 8\,007\,\mathrm{S}(5l'-3l) + 1\,756\,\mathrm{S}(5l'-2l) + 87\,\mathrm{S}(5l'-1l) + 0\,\mathrm{S}(5l'+0l) \\
& + 16\,004\,\mathrm{C}(5l'-4l) - 4\,917\,\mathrm{C}(5l'-3l) - 1\,522\,\mathrm{C}(5l'-2l) + 215\,\mathrm{C}(5l'-1l) + 0\,\mathrm{C}(5l'+0l)
\end{aligned}
$$

$$\begin{array}{l}
+\ 2262\,\mathrm{S}(6l'-6l)+\ 833\,\mathrm{S}(6l'-7l)-1456\,\mathrm{S}(6l'-8l)-\ 558\,\mathrm{S}(6l'-9l)+120\,\mathrm{S}(6l'-10l)+\ 66\,\mathrm{S}(6l'-11l)\\
-\ 102\,\mathrm{C}(6l'-6l)+3{,}094\,\mathrm{C}(6l'-7l)+\ 904\,\mathrm{C}(6l'-8l)-\ 441\,\mathrm{C}(6l'-9l)-240\,\mathrm{C}(6l'-10l)+\ 11\,\mathrm{C}(6l'-11l)\\
\qquad\qquad -\ 2615\,\mathrm{S}(6l'-5l)-7112\,\mathrm{S}(6l'-4l)+2304\,\mathrm{S}(6l'-3l)+232\,\mathrm{S}(6l'-2l)-\ 48\,\mathrm{S}(6l'-1l)\\
\qquad\qquad +\ 9990\,\mathrm{C}(6l'-5l)-4300\,\mathrm{C}(6l'-4l)-2049\,\mathrm{C}(6l'-3l)+540\,\mathrm{C}(6l'-2l)+\ 3\,\mathrm{C}(6l'-1l)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
-\ 440\,\mathrm{S}(8l'-8l)+\ 207\,\mathrm{S}(8l'-9l)-\ 460\,\mathrm{S}(8l'-10l)-\ 187\,\mathrm{S}(8l'-11l)+108\,\mathrm{S}(8l'-12l)+\ 65\,\mathrm{S}(8l'-13l)\\
-\ 64\,\mathrm{C}(8l'-8l)+\ 648\,\mathrm{C}(8l'-9l)+\ 270\,\mathrm{C}(8l'-10l)-\ 198\,\mathrm{C}(8l'-11l)-144\,\mathrm{C}(8l'-12l)+\ 0\,\mathrm{C}(8l'-13l)\\
\qquad\qquad -\ 707\,\mathrm{S}(8l'-7l)-3816\,\mathrm{S}(8l'-6l)+2125\,\mathrm{S}(8l'-5l)+468\,\mathrm{S}(8l'-4l)-255\,\mathrm{S}(8l'-3l)\\
\qquad\qquad +\ 2828\,\mathrm{C}(8l'-7l)-2238\,\mathrm{C}(8l'-6l)-1960\,\mathrm{C}(8l'-5l)+992\,\mathrm{C}(8l'-4l)+\ 30\,\mathrm{C}(8l'-3l)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
-\ 132\,\mathrm{S}(10l'-12l)+\ 16\,\mathrm{S}(10l'-16l)\\
+\ 120\,\mathrm{C}(10l'-12l)+\ 32\,\mathrm{C}(10l'-16l)\\
-1400\,\mathrm{S}(10l'-8l)+\ 36\,\mathrm{S}(10l'-4l)\\
-\ 800\,\mathrm{C}(10l'-8l)-\ 96\,\mathrm{C}(10l'-4l).
\end{array}$$

$$1\,000\,a\,\frac{d\mathrm{R}}{da}=$$

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad +\ 166\,\mathrm{S}(0l'-1l)-\ 8\,\mathrm{S}(0l'-2l)\\
+\ 324\,\mathrm{C}(0l'-0l)-\ 52\,\mathrm{C}(0l'-1l)+\ 0\,\mathrm{C}(0l'-2l)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
+\ 2\,\mathrm{S}(1l'-1l)+\ 58\,\mathrm{S}(1l'-2l)-\ 4\,\mathrm{S}(1l'-3l)+\ 0\,\mathrm{S}(1l'-4l)\\
+\ 386\,\mathrm{C}(1l'-1l)-\ 23\,\mathrm{C}(1l'-2l)+\ 4\,\mathrm{C}(1l'-3l)-\ 1\,\mathrm{C}(1l'-4l)\\
\qquad\qquad -\ 206\,\mathrm{S}(1l'+0l)+\ 22\,\mathrm{S}(1l'+1l)+\ 0\,\mathrm{S}(1l'+2l)\\
\qquad\qquad -\ 61\,\mathrm{C}(1l'+0l)-\ 26\,\mathrm{C}(1l'+1l)+\ 1\,\mathrm{C}(1l'+2l)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
+\ 5\,\mathrm{S}(2l'-2l)-\ 96\,\mathrm{S}(2l'-3l)-\ 14\,\mathrm{S}(2l'-4l)+\ 2\,\mathrm{S}(2l'-5l)\\
+\ 747\,\mathrm{C}(2l'-2l)+\ 24\,\mathrm{C}(2l'-3l)-\ 16\,\mathrm{C}(2l'-4l)-\ 4\,\mathrm{C}(2l'-5l)\\
\qquad\qquad -\ 522\,\mathrm{S}(2l'-1l)+\ 68\,\mathrm{S}(2l'+0l)+\ 4\,\mathrm{S}(2l'+1l)\\
\qquad\qquad -\ 148\,\mathrm{C}(2l'-1l)-\ 98\,\mathrm{C}(2l'+0l)+\ 8\,\mathrm{C}(2l'+1l)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
+\ 3\,\mathrm{S}(3l'-3l)-\ 101\,\mathrm{S}(3l'-4l)-\ 15\,\mathrm{S}(3l'-5l)+\ 3\,\mathrm{S}(3l'-6l)\\
+\ 415\,\mathrm{C}(3l'-3l)+\ 26\,\mathrm{C}(3l'-4l)-\ 20\,\mathrm{C}(3l'-5l)-\ 6\,\mathrm{C}(3l'-6l)\\
\qquad\qquad -\ 459\,\mathrm{S}(3l'-2l)+\ 97\,\mathrm{S}(3l'-1l)+\ 17\,\mathrm{S}(3l'+0l)\\
\qquad\qquad -\ 128\,\mathrm{C}(3l'-2l)-\ 152\,\mathrm{C}(3l'-1l)+\ 24\,\mathrm{C}(3l'+0l)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
+\ 4\,\mathrm{S}(4l'-4l)-\ 77\,\mathrm{S}(4l'-5l)-\ 13\,\mathrm{S}(4l'-6l)+\ 5\,\mathrm{S}(4l'-7l)\\
+\ 199\,\mathrm{C}(4l'-4l)+\ 18\,\mathrm{C}(4l'-5l)-\ 20\,\mathrm{C}(4l'-6l)-\ 6\,\mathrm{C}(4l'-7l)\\
\qquad\qquad -\ 337\,\mathrm{S}(4l'-3l)+\ 103\,\mathrm{S}(4l'-2l)+\ 33\,\mathrm{S}(4l'-1l)\\
\qquad\qquad -\ 92\,\mathrm{C}(4l'-3l)-\ 164\,\mathrm{C}(4l'-2l)+\ 40\,\mathrm{C}(4l'-1l)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr}
+\ 3\,S(5l'-5l) & -\ 50\,S(5l'-6l) & -\ 11\,S(5l'-7l) & +\ 4\,S(5l'-8l)\\
+\ 81\,C(5l'-5l) & +\ 13\,C(5l'-6l) & -\ 15\,C(5l'-7l) & -\ 7\,C(5l'-8l)\\
 & -\ 220\,S(5l'-4l) & +\ 91\,S(5l'-3l) & +\ 42\,S(5l'-2l)\\
 & -\ 59\,C(5l'-4l) & -147\,C(5l'-3l) & +\ 49\,C(5l'-2l)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr}
+\ 2\,S(6l'-6l) & -\ 28\,S(6l'-7l) & -\ 5\,S(6l'-8l) & +\ 4\,S(6l'-9l)\\
+\ 25\,C(6l'-6l) & +\ 6\,C(6l'-7l) & -\ 10\,C(6l'-8l) & -\ 6\,C(6l'-9l)\\
 & -\ 130\,S(6l'-5l) & +\ 71\,S(6l'-4l) & +\ 46\,S(6l'-3l)\\
 & -\ 32\,C(6l'-5l) & -116\,C(6l'-4l) & +\ 52\,C(6l'-3l).
\end{array}$$

$$1\,000\,\frac{d\mathrm{R}}{de} =$$

$$\begin{array}{rrrr}
 & +\ 288\,S(0l'-1l) & +\ 2\,S(0l'-2l) & +\ 0\,S(0l'-3l)\\
+116\,C(0l'-0l) & -\ 88\,C(0l'-1l) & +\ 2\,C(0l'-2l) & +\ 4\,C(0l'-3l)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr}
+\ 4\,S(1l'-1l) & +\ 61\,S(1l'-2l) & +\ 5\,S(1l'-3l) & -\ 1\,S(1l'-4l)\\
+125\,C(1l'-1l) & -\ 23\,C(1l'-2l) & +\ 7\,C(1l'-3l) & +\ 1\,C(1l'-4l)\\
 & -\ 297\,S(1l'+0l) & +\ 45\,S(1l'+1l) & +\ 1\,S(1l'+2l)\\
 & -\ 87\,C(1l'+0l) & -\ 69\,C(1l'+1l) & +\ 1\,C(1l'+2l)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr}
+\ 3\,S(2l'-2l) & -\ 201\,S(2l'-3l) & -\ 49\,S(2l'-4l) & +\ 21\,S(2l'-5l)\\
-249\,C(2l'-2l) & +\ 53\,C(2l'-3l) & -\ 82\,C(2l'-4l) & -\ 23\,C(2l'-5l)\\
 & -1\,005\,S(2l'-1l) & +221\,S(2l'+0l) & +\ 17\,S(2l'+1l)\\
 & -\ 281\,C(2l'-1l) & -362\,C(2l'+0l) & +\ 27\,C(2l'+1l)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr}
+\ 3\,S(3l'-3l) & -\ 96\,S(3l'-4l) & -\ 34\,S(3l'-5l) & +\ 18\,S(3l'-6l)\\
-285\,C(3l'-3l) & +\ 26\,C(3l'-4l) & -\ 59\,C(3l'-5l) & -\ 20\,C(3l'-6l)\\
 & -\ 566\,S(3l'-2l) & +250\,S(3l'-\ l) & +\ 72\,S(3l'+0l)\\
 & -\ 154\,C(3l'-2l) & -411\,C(3l'-\ l) & +\ 84\,C(3l'+0l)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr}
+\ 0\,S(4l'-4l) & -\ 26\,S(4l'-5l) & -\ 21\,S(4l'-6l) & +\ 14\,S(4l'-7l)\\
-231\,C(4l'-4l) & +\ 6\,C(4l'-5l) & -\ 36\,C(4l'-6l) & -\ 16\,C(4l'-7l)\\
 & -\ 258\,S(4l'-3l) & +201\,S(4l'-2l) & +106\,S(4l'-1l)\\
 & -\ 70\,C(4l'-3l) & -338\,C(4l'-2l) & +120\,C(4l'-1l)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr}
+\ 0\,S(5l'-5l) & +\ 6\,S(5l'-6l) & -\ 9\,S(5l'-7l) & +\ 10\,S(5l'-8l)\\
-156\,C(5l'-5l) & -\ 2\,C(5l'-6l) & -\ 16\,C(5l'-7l) & -\ 14\,C(5l'-8l)\\
 & -\ 86\,S(5l'-4l) & +135\,S(5l'-3l) & +110\,S(5l'-2l)\\
 & -\ 22\,C(5l'-4l) & -230\,C(5l'-3l) & +122\,C(5l'-2l)
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rrrr}
+\ 0\,S(6l'-6l) + & 17\,S(6l'-7l) - & 2\,S(6l'-8l) + & 5\,S(6l'-9l) \\
-\ 91\,C(6l'-6l) - & 4\,C(6l'-7l) - & 5\,C(6l'-8l) - & 18\,C(6l'-9l) \\
 - & 9\,S(6l'-5l) + & 80\,S(6l'-4l) + & 95\,S(6l'-3l) \\
 - & 2\,C(6l'-5l) - & 137\,C(6l'-4l) + & 104\,C(6l'-3l).
\end{array}
$$

$$10\,000\,\frac{dR}{d\varpi} =$$

$$
\begin{array}{rrrr}
 & +\ 148\,S(0l'-1l) - & 10\,S(0l'-2l) + & 0\,S(0l'-3l) \\
-\ 6\,C(0l'-0l) + & 576\,C(0l'-1l) + & 4\,C(0l'-2l) - & 4\,C(0l'-3l)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrr}
-\ 4\,S(1l'-1l) + & 18\,S(1l'-2l) - & 16\,S(1l'-3l) + & 0\,S(1l'-4l) \\
-\ 16\,C(1l'-1l) + & 129\,C(1l'-2l) + & 22\,C(1l'-3l) - & 7\,C(1l'-4l) \\
 - & 142\,S(1l'+0l) - & 144\,S(1l'+1l) + & 8\,S(1l'+2l) \\
 + & 549\,C(1l'+0l) - & 86\,C(1l'+1l) + & 1\,C(1l'+2l)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrr}
-\ 8\,S(2l'-2l) - & 158\,S(2l'-3l) + & 186\,S(2l'-4l) + & 50\,S(2l'-5l) \\
-\ 5\,C(2l'-2l) - & 493\,C(2l'-3l) - & 106\,C(2l'-4l) + & 53\,C(2l'-5l) \\
 - & 570\,S(2l'-1l) - & 728\,S(2l'+0l) + & 38\,S(2l'+1l) \\
 + & 2\,111\,C(2l'-1l) - & 448\,C(2l'+0l) - & 35\,C(2l'+1l)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrr}
-\ 16\,S(3l'-3l) - & 104\,S(3l'-4l) + & 139\,S(3l'-5l) + & 42\,S(3l'-6l) \\
-\ 16\,C(3l'-3l) - & 321\,C(3l'-4l) - & 98\,C(3l'-5l) + & 45\,C(3l'-6l) \\
 - & 358\,S(3l'-2l) - & 855\,S(3l'-\ l) + & 160\,S(3l'+0l) \\
 + & 1\,329\,C(3l'-2l) - & 508\,C(3l'-\ l) - & 149\,C(3l'+0l)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrr}
-\ 2\,S(4l'-4l) - & 62\,S(4l'-5l) + & 101\,S(4l'-6l) + & 30\,S(4l'-7l) \\
-\ 6\,C(4l'-4l) - & 185\,C(4l'-5l) - & 62\,C(4l'-6l) + & 33\,C(4l'-7l) \\
 - & 204\,S(4l'-3l) - & 729\,S(4l'-2l) + & 236\,S(4l'-1l) \\
 + & 753\,C(4l'-3l) - & 446\,C(4l'-2l) - & 221\,C(4l'-1l)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrr}
+\ 12\,S(5l'-5l) - & 31\,S(5l'-6l) + & 51\,S(5l'-7l) + & 5\,S(5l'-8l) \\
-\ 9\,C(5l'-5l) - & 95\,C(5l'-6l) - & 32\,C(5l'-7l) + & 21\,C(5l'-8l) \\
 - & 93\,S(5l'-4l) - & 543\,S(5l'-3l) + & 259\,S(5l'-2l) \\
 + & 389\,C(5l'-4l) - & 322\,C(5l'-3l) - & 235\,C(5l'-2l)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrr}
+\ 1\,S(6l'-6l) - & 21\,S(6l'-7l) + & 34\,S(6l'-8l) - & 3\,S(6l'-9l) \\
+\ 2\,C(6l'-6l) - & 46\,C(6l'-7l) - & 30\,C(6l'-8l) + & 24\,C(6l'-9l) \\
 - & 47\,S(6l'-5l) - & 364\,S(6l'-4l) + & 223\,S(6l'-3l) \\
 + & 196\,C(6l'-5l) - & 222\,C(6l'-4l) - & 202\,C(6l'-3l).
\end{array}
$$

23. En substituant les expressions précédentes dans les formules du n° **9**, et en intégrant par rapport au temps, nous trouverons les perturbations suivantes de la longitude moyenne, du grand axe, de l'excentricité et du périhélie. Pour les deux premiers éléments, je négligerai ici les termes dont la valeur absolue est au-dessous de 0'',10; je négligerai pour l'excentricité ceux dont la valeur absolue est au-dessous de 0'',05; et dans la position du périhélie ceux dont la valeur absolue est inférieure à 0'',25. Dans mes minutes, l'exactitude a été poussée plus loin, afin d'avoir exactement les perturbations de la longitude et du rayon vecteur.

$$
\begin{aligned}
\delta\rho + \delta\varepsilon = &- 3'',30\, t \\
&+ 0'',43 \sin(l'-l) - 0'',00 \cos(l'-l) \\
&+ 0'',06 \sin l' \qquad\quad - 0'',19 \cos l' \\
&+ 0'',50 \sin(2l'-2l) - 0'',00 \cos(2l'-2l) \\
&- 0'',98 \sin(2l'-l) + 3'',52 \cos(2l'-l) \\
&+ 0'',15 \sin(3l'-3l) - 0'',00 \cos(3l'-3l) \\
&- 0'',13 \sin(3l'-2l) + 0'',44 \cos(3l'-2l) \\
&- 0'',52 \sin(3l'-l) - 0'',33 \cos(3l'-l) \\
&- 0'',04 \sin(4l'-3l) + 0'',16 \cos(4l'-3l) \\
&- 0'',36 \sin(4l'-2l) - 0'',23 \cos(4l'-2l) \\
&- 0'',10 \sin(5l'-3l) - 0'',06 \cos(5l'-3l) \\
&+ 6'',19 \sin(5l'-2l) - 5'',36 \cos(5l'-2l);
\end{aligned}
$$

$$
\delta a = - 0'',15 \sin(2l'-l) - 0'',04 \cos(2l'-l);
$$

$$
\begin{aligned}
\delta e = &\quad 0'',02\, t \\
&- 0'',05 \sin l \qquad\quad - 0'',01 \cos l \\
&- 0'',13 \sin l' \qquad\quad - 0'',03 \cos l' \\
&+ 0'',94 \sin(2l'-l) + 0'',26 \cos(2l'-l) \\
&+ 0'',06 \sin 2l' \qquad\quad - 0'',09 \cos 2l' \\
&+ 0'',16 \sin(3l'-2l) + 0'',04 \cos(3l'-2l) \\
&+ 0'',28 \sin(3l'-l) - 0'',47 \cos(3l'-l) \\
&+ 0'',05 \sin(4l'-3l) + 0'',01 \cos(4l'-3l) \\
&- 0'',10 \sin(4l'-2l) + 0'',16 \cos(4l'-2l) \\
&+ 0'',04 \sin(4l'-l) + 0'',04 \cos(4l'-l) \\
&- 0'',03 \sin(5l'-3l) + 0'',05 \cos(5l'-3l) \\
&- 0'',53 \sin(5l'-2l) - 0'',59 \cos(5l'-2l);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\varpi = \ & 2'',86\, t \\
& - 0'',08 \sin l \qquad + 0'',27 \cos l \\
& - 0'',21 \sin l' \qquad + 0'',72 \cos l' \\
& + 1'',22 \sin (2l' - l) - 4'',38 \cos (2l' - l) \\
& - 0'',44 \sin 2l' \qquad - 0'',27 \cos 2l' \\
& + 0'',18 \sin (3l' - 2l) - 0'',65 \cos (3l' - 2l) \\
& - 2'',23 \sin (3l' - l) - 1'',35 \cos (3l' - l) \\
& + 0'',74 \sin (4l' - 2l) + 0'',44 \cos (4l' - 2l) \\
& + 0'',20 \sin (4l' - l) - 0'',18 \cos (4l' - l) \\
& - 2'',71 \sin (5l' - 2l) + 2'',45 \cos (5l' - 2l).
\end{aligned}
$$

Je n'ai conservé dans la valeur de $\delta\rho + \delta\varepsilon$ aucun terme dépendant de la longitude moyenne de Mercure. L'action de Vénus y introduit la perturbation

$$0'',010 \sin l - 0'',094 \cos l,$$

négligeable à cause de sa petitesse, et qu'on devrait d'ailleurs omettre quand même elle serait plus considérable. Cette perturbation peut se confondre, en effet, avec l'équation du centre du mouvement purement elliptique, en altérant un peu les valeurs de l'excentricité et de la longitude du périhélie qui y correspondraient. Or l'observation directe donne ces éléments ainsi modifiés. On peut donc laisser de côté la perturbation dont l'argument serait la longitude de Mercure, tant qu'elle n'est pas assez grande pour que la correction qu'elle apporte aux éléments elliptiques puisse influer sur le second terme de l'équation du centre.

Le terme proportionnel au temps $- 3'',30\, t$, qui entre dans la valeur de $\delta\rho + \delta\varepsilon$, affecte directement la longitude moyenne et l'anomalie moyenne de la planète. Nous pourrons nous dispenser de le conserver, pourvu que nous empruntions aux observations le moyen mouvement destiné au calcul de la longitude : mais nous augmenterons ce moyen mouvement de $3'',30$ avant de le faire servir au calcul du grand axe de l'orbite.

Dans les termes $\delta e = 0'',02\, t$, et $\delta\varpi = 2'',86\, t$, nous retrouvons les inégalités séculaires de l'excentricité et du périhélie. Les expressions rapportées plus haut supposent $\delta e = 0'',028\, t$ et $\delta\varpi = 2'',81\, t$. La petite différence, qui serait, au reste, sans inconvénient dans la pratique, provient de ce que, dans le calcul des inégalités périodiques, qui nous a donné l'occasion de revenir sur ces nombres, l'approximation des coefficients n'a pas dû être poussée aussi loin que le réclamait la détermination rigoureuse des inégalités séculaires. Et c'est même par cette raison qu'il y a avantage à traiter ces dernières à part.

Enfin l'inégalité à longue période

$$6'',19 \sin(5l'-2l) - 5'',36 \cos(5l'-2l),$$

comprise dans $\delta\rho + \delta\varepsilon$, ne devra pas être appliquée au développement des inégalités de la longitude vraie, suivant ce qui a été expliqué au nº **14**. Il en serait de même des inégalités à longues périodes dépendantes des arguments $(8l' - 3l)$ et $(10l' - 4l)$ si elles avaient été assez grandes pour qu'on dût les conserver. Je les ai trouvées égales à

$$-\ 0'',09 \sin(8l'-3l) + 0'',01 \cos(8l'-3l),$$
$$0'',03 \sin(10l'-4l) - 0'',08 \cos(10l'-4l).$$

On voit qu'on peut les considérer comme insensibles. Mais elles ne sont pas tellement petites qu'on fût certain, avant tout calcul, qu'elles étaient sans influence. Il est bon de s'assurer, une fois au moins, qu'on n'a négligé aucun terme important.

24. J'ai dit plus haut que l'inégalité du moyen mouvement, dépendante de l'argument $(5l' - 2l)$, était un peu influencée par l'excentricité de Vénus. Achevons de la déterminer. Pour ne laisser aucun nuage, j'ai recalculé complétement cette perturbation par interpolation, en conservant l'excentricité de Vénus; puis, faisant la différence avec la première valeur obtenue dans le numéro précédent, j'ai vérifié que cette différence était égale à la valeur qu'on lui trouve en la déterminant algébriquement.

La perturbation calculée directement, et sans rien négliger, a pour expression

$$6'',29 \sin(5l'-2l) - 4'',07 \cos(5l'-2l).$$

D'autre part, les termes de R qui fournissent la partie dépendante de l'excentricité de Vénus, sont, en omettant l'inclinaison des orbites, les suivants :

$$\frac{e'e^2}{16a'}\left[396\, b_{\frac{1}{2}}^{(4)} + 184\,\alpha\,\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha} + 25\,\alpha^2\,\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^2} + \alpha^3\,\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{d\alpha^3}\right]\cos(5l' - 2l - \varpi' - 2\varpi),$$

$$-\frac{e'^2e}{16a'}\left[402\, b_{\frac{1}{2}}^{(3)} + 193\,\alpha\,\frac{db_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha} + 26\,\alpha^2\,\frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^2} + \alpha^3\,\frac{d^3b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{d\alpha^3}\right]\cos(5l' - 2l - 2\varpi' - \varpi).$$

En les réduisant en nombres, différentiant par rapport à ε, et substituant dans la première formule du n° **9**, on obtient la perturbation

$$0'',11\,\sin(5l'-2l) + 1'',33\,\cos(5l'-2l).$$

Telle est effectivement la différence qu'on trouve en retranchant de l'expression complète de la perturbation celle qu'on avait d'abord obtenue en négligeant e'.

25. Les expressions $\delta\rho + \delta\varepsilon$, δe et $\delta\varpi$, substituées dans la première formule du n° **10**, donnent les inégalités de la longitude vraie, dans lesquelles j'omettrai seulement celles qui sont au-dessous de $0'',1$ et qui ne peuvent pas se réduire avec d'autres plus sensibles dans une même Table :

$$\delta v = \left\{\begin{array}{l} \ 0'',73\,\sin(l'-l) \\ -\ 2'',15\,\sin(2l'-2l) \\ -\ 0'',47\,\sin(3l'-3l) \\ +\ 0'',05\,\sin(4l'-4l) \end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{ll} +\ 0'',07\,\sin l' & -\ 0'',29\,\cos l' \\ +\ 0'',65\,\sin 2l' & +\ 0'',40\,\cos 2l' \\ -\ 0'',09\,\sin 3l' & +\ 0'',07\,\cos 3l' \end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{ll} +\ 0'',04\,\sin(l'-2l) & +\ 0'',18\,\cos(l'-2l) \\ +\ 0'',12\,\sin(2l'-4l) & -\ 0'',07\,\cos(2l'-4l) \end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{ll} -\ 1'',03\,\sin(2l'-l) & +\ 3'',70\,\cos(2l'-l) \\ -\ 0'',45\,\sin(4l'-2l) & -\ 0'',27\,\cos(4l'-2l) \end{array}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&- 0'',14 \sin(2l'-3l) - 0'',54 \cos(2l'-3l)\\
&- 0'',39 \sin(3l'-2l) + 1'',35 \cos(3l'-2l)\\
&- 0'',04 \sin(3l'-4l) - 0'',14 \cos(3l'-4l)\\
&+ 0'',09 \sin(4l'-3l) - 0'',31 \cos(4l'-3l)\\
&- 0'',10 \sin(5l'-4l) + 0'',33 \cos(5l'-4l)\\
&- 0'',49 \sin(3l'-\ l) - 0'',31 \cos(3l'-\ l)\\
&+ 1'',18 \sin(5l'-3l) + 0'',77 \cos(5l'-3l)\\
&+ 0'',14 \sin(2l'+\ l) - 0'',13 \cos(2l'+\ l).
\end{aligned}
$$

La seconde formule du n° **10** donnerait ensuite les inégalités du rayon vecteur. Je n'ai trouvé ainsi que des différences insensibles avec les perturbations qui sont rapportées dans la *Mécanique céleste;* et je ne m'y arrêterai pas pour le moment.

26. Il me resterait à présenter toutes les formules relatives aux actions de la Terre, de Jupiter et de Saturne. Mais, comme je l'ai déjà dit, les séries sont ici très-convergentes; ce qui fait que je m'écarte peu des résultats de la *Mécanique céleste*. Je préfère donc supprimer ces détails, et grouper dans un seul tableau tout ce qui concerne la théorie de Mercure.

Ajoutons qu'aucune planète ne produit de perturbation sensible dans le mouvement de Mercure en latitude.

§ V.

Résumé des expressions variables des éléments de l'ellipse, et des perturbations qu'il convient de conserver dans la comparaison de la théorie avec les observations.

27. Les expressions des longitudes seront, dans la suite de ce travail, rapportées à la ligne des équinoxes, mobile en vertu de la précession. Il faudra leur ajouter, quand on les comparera aux étoiles, le terme proportionnel au carré du temps, que je ne vais pas écrire. Mais les arguments des perturbations resteront toujours réglés sur le mouvement sidéral, compté du 1er janvier 1800.

Expression de la longitude moyenne,

$$110^\circ\, 13'\, 18'',2 + 5\,381\,066'',8655 \times t;$$

Demi-grand axe,

$$a = 0{,}387\,0984.$$

Ce nombre diffère un peu de celui qu'on lit au n° **3**. Cela tient à ce que l'action des différentes planètes diminue de $7''$ le mouvement sidéral apparent de Mercure. Et ici nous avons tenu compte de cette perturbation, conformément à une remarque du n° **23**, tandis qu'il nous était impossible de le faire au moment de la première approximation, lorsque la quantité de chaque perturbation nous était inconnue.

Expressions de l'excentricité en secondes de degré, et de la longitude du périhélie,

$$\begin{aligned} e &= \frac{0{,}2056179}{\sin 1''} + 0'',0425.t, \\ \varpi &= 74^\circ 20' 5'',8 + 55'',502.t; \end{aligned}$$

Inclinaison φ_1 et longitude θ_1 du nœud ascendant, comptées sur l'écliptique mobile,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 7^\circ\ 0' 5'',9 + 0'',0711.t, \\ \theta_1 &= 45^\circ 57' 9'',0 + 42'',638.t; \end{aligned}$$

Perturbations de la longitude moyenne,

$$\begin{array}{ll} \text{Argument I.} & 7'',49 \sin(5l' - 2l - 32^\circ 54'); \\ \text{Argument II.} & 0'',67 \sin(4l'' - l - 20^\circ 12'); \end{array}$$

Perturbations de la longitude vraie,

$$\begin{array}{ll} \text{Argument III.} & \left\{ \begin{array}{l} -\ 3'',84 \sin(2l' - l - 74^\circ 27') \\ -\ 0'',52 \sin(4l' - 2l + 30^\circ 57'); \end{array} \right. \\ \text{Argument IV.} & \left\{ \begin{array}{l} \ 0'',73 \sin(l' - l) \\ -\ 2'',15 \sin(2l' - 2l) \\ -\ 0'',47 \sin(3l' - 3l) \\ +\ 0'',05 \sin(4l' - 4l); \end{array} \right. \\ \text{Argument V.} & -\ 3'',29 \sin(2l^{\text{iv}} - l - 75^\circ 17'); \\ \text{Argument VI.} & \left\{ \begin{array}{l} \ 0'',65 \sin(l^{\text{iv}} - l) \\ -\ 0'',94 \sin(2l^{\text{iv}} - 2l); \end{array} \right. \\ \text{Argument VII.} & -\ 1'',41 \sin(3l' - 2l - 73^\circ 53'); \end{array}$$

$$\text{Argument VIII.} \qquad 1'',41 \sin(5l' - 3l + 33°8');$$

$$\text{Argument IX.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \ 0'',30 \sin(l' - 76°25') \\ +\ 0'',76 \sin(2l' + 31°36') \\ -\ 0'',11 \sin(3l' - 37°53'); \end{array} \right.$$

$$\text{Argument X.} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\ 0'',57 \sin(l^{\text{iv}} + 21°44') \\ +\ 0'',50 \sin(2l^{\text{iv}} + 30°53'); \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\ 0'',41 \sin(2l'' - l - 74°21') \\ +\ 0'',21 \sin(4l'' - 2l + 44°26'); \end{array} \right.$$

$$-\ 0'',58 \sin(3l' - l + 32°19')$$
$$-\ 0'',56 \sin(2l' - 3l + 75°27')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ 0'',21 \sin(l'' - l) \\ -\ 0'',24 \sin(2l'' - 2l) \\ +\ 0'',02 \sin(3l'' - 3l); \end{array} \right.$$

$$-\ 0'',40 \sin(2l^{\text{v}} - l - 74°21').$$

Perturbations du rayon vecteur,

$$\text{Argument IV.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \ 0,000\,000\,39 \cos(l' - l) \\ +\ 0,000\,001\,99 \cos(2l' - 2l) \\ -\ 0,000\,000\,39 \cos(3l' - 3l); \end{array} \right.$$

$$\text{Argument V.} \qquad -\ 0,000\,003\,00 \cos(2l^{\text{iv}} - l - 74°21');$$

$$\text{Argument VII.} \qquad -\ 0,000\,001\,12 \cos(3l' - 2l - 74°44');$$

$$\text{Argument VIII.} \qquad 0,000\,001\,22 \cos(5l' - 3l + 28°37').$$

Je ne conserve dans les Tables usuelles que les perturbations correspondantes aux dix premiers arguments. Cela est plus que suffisant pour la construction des éphémérides journalières. On fera bien toutefois de tenir compte des autres inégalités dans le calcul des passages de Mercure sur le Soleil. Il n'y aura aucune difficulté à déterminer directement leurs valeurs.

L'expression des perturbations qui, dans le n° 25, renfermait en général le sinus et le cosinus d'un même argument, ne présente plus ici que des sinus pour la longitude et des cosinus pour le rayon vecteur. C'est une transformation connue.

§ VI.

Remarques sur les Tables de Mercure de M. de Lindenau.

28. Le changement apporté par l'auteur à la masse de Vénus domine tout son travail. Il la suppose égale à $\frac{1}{349440}$, plus grande de $(\frac{1}{8})^{ème}$ que la masse admise plus haut, et qui est donnée par la variation de l'obliquité de l'écliptique. Par là, les mouvements séculaires du nœud et du périhélie sont considérablement altérés. La correction du mouvement du périhélie réagit ensuite sur la détermination du moyen mouvement, à cause de l'influence prédominante des anciens passages de la planète sur le Soleil: ils ont été pour la plupart observés en un même point de l'orbite. L'auteur arrive à cette détermination de la masse de Vénus par une moyenne entre trois nombres qui sont, au reste, loin de s'accorder. L'un est fourni par la considération du mouvement du nœud; l'autre par la considération des perturbations périodiques dues à l'action de Vénus; le troisième est donné par la détermination de la variation séculaire de l'aphélie. Examinons successivement chacun de ces résultats.

29. Si nous tenons pour constants tous les calculs de l'auteur, nous admettrons avec lui, *page* 9 *des Tables,* que le mouvement annuel du nœud, *déduit des latitudes observées,* dans les passages de Mercure sur le Soleil, est égal à 42″,502. Retranchant la précession employée dans ces Tables, 50″,11, il nous restera pour le mouvement sidéral du nœud, dû à l'action de toutes les planètes, et déduit de l'observation,

$$-\ 7'',608.$$

D'autre part, j'ai trouvé théoriquement, n° **20**, en admettant la masse ordinaire de Vénus, pour le mouvement sidéral du nœud,

$$-\ 7'',585,$$

quantité qui ne s'éloigne de la précédente que de 0″,023. Cette différence ne produit que 2″,3 sur la longitude du nœud en cent ans. Elle correspond à une variation de 0″,1 dans la latitude géocentrique, lors des passages de novembre, qui sont les seuls dans lesquels la latitude ait été observée anciennement. Si donc il y avait quelque chose à conclure de cette détermination du mouvement du nœud, c'était que la masse ordinairement reçue est fort exacte.

L'erreur de M. de Lindenau est venue ici de ce qu'ayant trouvé que le mouvement théorique du nœud, déduit de la considération des seuls termes du premier ordre, était trop petit, il s'en est pris à la masse de Vénus. Mais si cet auteur avait eu la précaution de calculer les termes du troisième ordre qui entrent dans les inégalités séculaires, il aurait reconnu qu'ils donnaient au mouvement du nœud toute la précision désirable, sans qu'on ait besoin de toucher à la masse de Vénus.

30. Par la considération des perturbations périodiques, l'auteur arrive à la masse suivante,

$$m' = \frac{1}{344000}.$$

Une masse est proportionnelle à l'étendue des perturbations qu'elle détermine, toutes circonstances étant égales d'ailleurs. J'ai fait voir, au n° **15**, combien l'auteur s'est trompé en empruntant à la *Mécanique céleste* l'expression des perturbations produites par Vénus. La détermination de la masse précédente ne saurait donc avoir aucun sens.

31. Enfin, par la considération du mouvement de l'aphélie, l'auteur obtient la masse suivante de Vénus,

$$m' = \frac{1}{318000}.$$

Et dès l'abord ce nouveau résultat se critique par lui-même. Il est de toute évidence que cette masse de Vénus est énormément trop forte. Delambre qui, au jugement des astronomes, avait déjà donné une masse trop grande, ne l'avait cependant portée qu'à $\frac{1}{357000}$. M. de Lindenau lui-même l'a bien senti, et il a cherché à atténuer les effets de cette détermination autant qu'il l'a pu. Pour composer la masse définitive qu'il a adoptée pour Vénus, il a pris la moitié de la masse donnée par les inégalités périodiques, le quart seulement de celle donnée par le mouvement séculaire du nœud, et le quart également de la masse donnée par le mouvement séculaire de l'aphélie. Pourquoi donc accorder plus de confiance au nombre déterminé par la considération des inégalités périodiques qu'à chacun de ceux qu'on déduit des inégalités séculaires, lorsque les premières sont petites et les autres considérables? On trouverait beaucoup de raisons pour en agir tout autrement, et l'on n'en voit qu'une seule pour suivre la marche arbitraire de l'auteur, savoir, la nécessité d'échapper aux conséquences d'une détermination erronée.

32. En résumé, la masse adoptée par M. de Lindenau se compose :

1°. Du quart d'une masse $\frac{1}{379\,000}$, inexacte parce que le rapport du mouvement du nœud à la masse de Vénus n'avait pas été déterminé avec assez de précision ;

2°. De la moitié d'une masse $\frac{1}{344\,000}$, calculée par la considération de perturbations périodiques complétement fausses ;

3°. Du quart d'une masse $\frac{1}{318\,000}$, dont l'inexactitude est démontrée par sa grandeur même.

Je dirai, dès à présent, qu'ayant introduit la correction de la masse de Vénus comme inconnue, dans mes équations de condition, je l'ai trouvée très-petite, et au-dessous de l'exactitude qu'on peut attendre des observations de Mercure.

§ VII.

Observations de Mercure en ascension droite et en déclinaison, pour servir à la rectification des éléments de l'orbite.

33. Ces observations se composent de deux séries. L'une, comprenant 157 observations faites à l'Observatoire de Paris depuis le 20 avril 1836 jusqu'au 18 août 1842. L'autre, comprenant 240 observations faites dans le même lieu depuis le 8 mars 1801 jusqu'au 22 octobre 1828.

Observations de la première série.

34. L'erreur de collimation de la lunette méridienne, l'erreur en azimut et l'erreur de niveau étant toujours nulles ou fort petites, je me suis dispensé d'y avoir égard, en ayant soin de comparer la planète aux étoiles les plus voisines en déclinaison.

J'ai choisi, autant qu'il a été possible, pour déterminer l'heure de la pendule, des étoiles fondamentales observées par le même astronome qui avait observé Mercure.

J'ai adopté le catalogue des étoiles fondamentales donné par M. Bessel dans les *Tabulæ Regiomontanæ.*

Les astronomes actuels de Paris observant toujours l'ascension droite du bord éclairé de Mercure, j'ai ramené l'observation au centre de la planète par la connaissance de son diamètre apparent.

Enfin, le mouvement propre apparent de Mercure est assez rapide pour qu'il y ait avantage à en tenir compte, lorsque la planète ayant été observée aux deux premiers fils seulement ou aux deux derniers, on veut ramener l'observation au fil méridien. C'est ce que j'ai fait.

Les *deux premières* colonnes du tableau, n° **38**, renferment l'indication de la date de l'observation. La *troisième* contient le temps moyen, compté de minuit, et déduit de l'ascension droite méridienne observée. La *quatrième* renferme les valeurs des ascensions droites déduites de l'observation, et réduites en degrés de la circonférence.

35. Les déclinaisons ont été observées au cercle entier de Fortin. J'ai calculé la correction de collimation, pour chaque observation, au moyen d'étoiles prises dans le voisinage du parallèle de Mercure, et observées par le même astronome qui avait observé la déclinaison de la planète. Cette dernière précaution est tout à fait nécessaire, suivant le travail de MM. E. Bouvard et V. Mauvais sur les erreurs individuelles en déclinaison. On peut consulter à ce sujet le Rapport de M. Arago, inséré dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* tome XV, page 944.

J'ai calculé les réfractions au moyen des Tables de la *Connaissance des Temps,* et d'après les indications du thermomètre intérieur.

La déclinaison du centre de la planète étant directement observée, il n'y a aucune correction à faire à ce sujet.

Enfin j'ai réduit l'observation au centre de la Terre, d'après la distance calculée de la planète, et en supposant la parallaxe horizontale égale à 8",6, à la distance moyenne.

Les déclinaisons apparentes, ainsi obtenues, sont inscrites dans la *cinquième* colonne du tableau, n° **38**

36. Les Tables actuelles du Soleil sont assez exactes, et la *Connaissance des Temps* a été calculée avec assez de soin, dans ces dernières années, pour qu'on pût emprunter à cet ouvrage les longitudes apparentes du Soleil. La grande précision des observations, faites actuellement à Paris, m'a toutefois porté à chercher la correction qu'elles indiquaient dans les longitudes calculées du Soleil; et, après avoir obtenu cette correction par une série de plusieurs jours, je l'ai ajoutée aux positions données dans la *Connaissance des Temps*. Du grand nombre d'observations que j'ai ainsi discutées, il résulte que l'erreur d'une observation de l'ascension droite du Soleil n'est moyennement que de 0",06 de temps à l'Observatoire de Paris.

J'ai emprunté aux Tables de M. Bessel les rayons vecteurs du Soleil.

J'ai cru pouvoir négliger la petite latitude de cet astre, qui ne peut avoir aucune influence sur le résultat moyen des nombreuses observations que j'ai employées.

Enfin, j'ai adopté la même obliquité moyenne de l'écliptique que M. Bessel.

37. Pour comparer les positions observées avec celles qui résultent des éléments provisoires, je calculerai successivement les longitudes et les latitudes géocentriques apparentes par ces éléments et par l'observation; puis, je prendrai la différence des résultats. Cette manière d'opérer est celle qui se prête le mieux au calcul des équations de condition.

La *sixième* colonne du tableau suivant présente les expressions des longitudes géocentriques apparentes de Mercure, calculées sur les éléments du mouvement de la planète compris dans le § V. Dans la *septième* colonne se trouvent les secondes des longitudes géocentriques apparentes, déduites des ascensions droites et des déclinaisons observées. Enfin, la *huitième* colonne renferme les erreurs des Tables en longitude.

Les *neuvième, dixième* et *onzième* colonnes présentent la même comparaison en latitude.

Les nombres de la *douzième* colonne sont des numéros d'ordre, qui serviront plus loin à faire reconnaître quelles observations entrent dans chacune des équations de condition.

38. *Tableau de la première série d'observations, et de sa comparaison avec les éléments provisoires.*

Année.	Mois et jour.	Temps moyen.	Ascension droite observée.	Déclinaison observée.	Longitude apparente tabulaire.	Secondes de la longitude observée.	Erreur de la longitude tabulaire.	Latitude apparente tabulaire.	Secondes de la latitude observée.	Erreur de la latitude tabulaire.	N° d'ordre.
		h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″	° ′ ″	″	″	
1836	Avril. 20	11.17.54	18. 2.19,1	5.46. 5,1	18.50. 0,9	52,8	8,1	−1.44.42,1	−46,3	4,2	117
	Mai.. 12	12.49.11	62.36.34,2	22.46.57,6	64.53.33,0	27,8	5,2	1.40.45,3	42,6	2,7	
	13	12.53.32	64.41. 6,5	23.14. 9,2	66.51.21,0	8,7	12,3	1.47.48,9	46,4	2,5	118
	14	12.57.46	66.43.46,2	23.39.54,0	68.46.34,7	26,0	8,7	1.54.11,8	9,7	2,1	
	15	13. 1.51	68.44.22,3	24. 2.25,8	70.39. 5,6	55,9	9,7	1.59.50,8	47,3	3,5	
	18	13.13. 7	74.31.20,0	24.54.53,8	75.59.11,4	59,4	12,0	2.12.12,5	12,2	0,3	
	19	13.16.30	76.21.22,8	25. 7.30,2	77.39.46,9	32,8	14,1	2.14.43,9	45,5	− 1,6	
	20	13.19.42	78. 8.29,4	25.17.46,1	79.17.13,0	3,2	9,8	2.16.25,8	27,4	− 1,6	119
	21	13.22.40	79.52.15,7	25.25.46,8	80.51.26,2	13,9	12,3	2.17.17,6	19,2	− 1,6	
	Juill. 19	10.39.17	97. 3.59,1	21. 4. 6,4	96.35.53,7	48,8	4,9	−2.13.51,9	−55,4	3,5	120
	28	10.56.56	110.21.45,9	22. 1. 9,8	108.49.20,2	9,0	11,2	−0. 7. 9,4	−16,4	7,0	121
	Août. 30	12.56.21	172.49.36,6	3.52.17,1	171.53. 8,7	2,9	5,8	0.42.21,4	23,8	− 2,4	
	31	12.58.20	174.18.29,8	3. 6.37,1	173.32.40,3	36,3	4,0	0.35.33,4	33,6	− 0,2	122
	Sept. 26	13.23.13	206.10.29,0	−13.43.11,9	209.12.46,2	48,0	− 1,8	−2.41.28,6	−27,8	− 0,8	123
	Nov.. 12	10.37.25	210.55.58,8	−10.20.23,4	212.23.29,6	29,4	0,2	2. 6. 9,3	10,2	− 0,9	
	15	10.41.40	214.57.28,2	−11.58.57,7	216.39.51,4	52,4	− 1,0	1.52.28,2	27,7	0,5	124
1837	Mars. 10	10.34.34	326.31.45,3	−15. 0.36,0	323.42.11,2	13,9	− 2,7	−1.27.39,5	−36,6	− 2,9	125
	Avril. 1	11.17.25	358.57. 7,9	− 2.48.42,1	357.55.12,4	8,7	3,7	−2. 9.42,6	−43,2	0,6	
	2	11.20. 4	0.36. 6,5	− 2. 1.56,4	359.44.37,0	33,0	4,0	−2. 6.12,9	−14,0	1,1	126
	Mai.. 17	13.24.38	76.11.13,0	24.51. 5,3	77.28.49,5	48,8	0,7	1.59.15,7	15,9	− 0,2	127
	Juill. 3	10.32. 0	79.14. 5,8	20.26.39,4	79.54.38,7	34,3	4,4	−2.38.32,1	−30,0	− 2,1	
	4	10.32.54	80.26.46,1	20.43.33,5	81. 3.41,1	41,3	− 0,2	−2.26.23,4	−25,0	1,6	128
	Août. 7	12.47.22	147.40. 4,0	14.46.50,5	144.49.11,3	4,3	7,0	1.36.42,4	43,1	− 0,7	129
	14	13. 6.58	159.28.54,1	9.42. 2,5	157.23. 2,9	49,6	13,3	0.58.27,7	28,7	− 1,0	
	18	13.15.19	165.30.53,9	6.51.14,0	164. 1.10,9	4,5	6,4	0.36.24,4	25,3	− 0,9	130
	19	13.17. 7	166.57. 8,9	6. 7.18,2	165.37. 7,9	5,8	2,1	0.29. 6,2	7,2	− 1,0	
	23	13.23.16	172.26.14,3	3.13.58,0	171.46.48,2	44,6	3,6	−0. 2. 4,3	− 1,3	− 3,0	
	25	13.25.45	175. 1.48,9	1.49. 0,7	174.43. 8,3	5,9	2,4	−0.18.36,7	−32,1	− 4,6	131
	26	13.26.51	176.17.29,3	1. 7. 4,8	176. 9. 9,1	10,9	− 1,8	−0.27. 3,4	−59,0	− 4,4	
	27	13.27.50	177.31.34,4	0.25.39,6	177.33.41,7	37,3	4,4	−0.35.36,1	−32,4	− 3,7	
	Sept. 9	13.31.36	191.16.55,8	− 7.32.29,5	193.19.10,9	11,1	− 0,2	−2.28.27,4	−27,4	0,0	
	10	13.31. 2	192. 7.41,9	− 8. 2.39,3	194.17.17,4	19,0	− 1,6	−2.36.37,4	−36,3	− 1,1	132
	20	13.14.29	197.50. 6,0	−11.32.28,4	200.50. 3,1	2,7	0,4	−3.40.22,3	−20,7	− 1,6	
	23	13. 4. 1	198. 9.57,9	−11.48.17,2	201.14. 8,0	5,9	2,1	−3.47.33,1	−35,7	2,6	133
	Oct.. 12	11. 0.44	185.59.12,8	− 2.23.31,4	186.26.23,9	34,2	−10,3	0.11. 6,8	1,5	5,3	134
	Nov.. 2	10.54.38	205. 9.18,2	− 8.33.21,5	206.25.35,9	31,4	4,5	1.46.11,1	11,3	− 0,2	
	6	11. 2.52	211. 9.45,6	−11. 9.29,5	212.53. 2,2	59,1	3,1	1.24.38,3	38,6	− 0,3	135
	Déc.. 15	12.45.18	275.17. [illegible],0	−25.32.16,9	274.46.10,6	10,4	0,2	−2. 9.50,6	−46,3	− 4,3	136
	29	13.22. 9	298.19. 7,7	−22.40.16,4	295.58.14,3	16,9	− 2,6	−1.43.43,9	−41,0	− 2,9	
	31	13.25.11	301. 3.15,0	−21.54.28,4	298.36.14,5	15,0	− 0,5	−1.28.42,5	−44,1	1,6	137
1838	Févr. 7	10.29.34	294.28.51,4	−20. 9.48,1	292.53.46,2	56,0	− 9,8	1.22.19,4	21,0	− 1,6	138
	Mars. 1	10.51.26	321.38.56,7	−16.53.32,8	318.39. 8,5	13,0	− 4,5	−1.43.37,6	−42,9	5,3	139
	21	11.39.47	353.28.49,8	− 4.58. 2,9	352. 3. 9,0	57,5	11,5	−1.58.19,1	−15,7	− 3,4	141

Suite du tableau de la première série d'observations.

ANNÉE.	Mois et jour.	Temps moyen.	Ascension droite observée.	Déclinaison observée.	Longitude apparente tabulaire.	Secondes de la longitude observée.	Erreur de la longitude tabulaire.	Latitude apparente tabulaire.	Secondes de la latitude observée.	Erreur de la latitude tabulaire.	N° d'ordre.
		h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″	° ′ ″	″	″	
1838	Avril. 10	12.46.11	29.50.25,2	13. 7.33,2	32.20.47,8	37,8	10,0	0.52.55,0	51,5	3,5	142
	Juin. 1	10.43.25	50.18.52,9	14.28.14,5	51.42.20,5	14,7	5,8	−3.52. 8,9	− 3,7	− 5,2	143
	8	10.27.38	53.15.41,4	15.11.32,0	54.38.56,3	57,5	− 1,2	−3.52.17,5	−19,0	1,5	144
	Août. 11	13.38.31	164.11.47,9	6.31.10,3	162.56.19,1	15,3	3,8	−0.12.17,9	−17,8	− 0,1	
	12	13.39.26	165.24.35,6	5.51.16,2	164.18.26,3	24,4	1,9	−0.21.22,1	−19,7	− 2,4	145
	13	13.40.12	166.35.24,6	5.11.41,3	165.38.46,7	42,7	4,0	−0.30.35,8	−36,3	0,5	
	14	13.40.52	167.44.22,5	4.32.38,6	166.57.17,9	12,1	5,8	−0.39.58,6	−54,8	− 3,8	146
	15	13.41.23	168.51.28,0	3.54. 0,2	168.13.57,0	53,2	3,8	−0.49.28,9	−24,2	− 4,7	
	16	13.41.47	169.56.34,1	3.15.50,3	169.28.40,5	37,5	3,0	−0.59. 6,6	− 5,6	− 1,0	147
	22	13.41.18	175.44.11,0	− 0.17.50,9	176.12.23,3	21,6	1,7	−1.58.11,5	− 9,4	− 2,1	
	28	13.35. 3	180. 4.53,6	− 3.14. 5,6	181.22.51,1	50,1	1,0	−2.56.11,7	− 5,2	− 6,5	148
	31	13.29. 8	181.33.26,5	− 4.21.16,2	183. 9.49,7	48,6	1,1	−3.22.26,7	−27,7	1,0	
	Sept. 1	13.26.40	181.55.30,8	− 4.39.38,2	183.37.20,1	21,6	− 1,5	−3.30.31,8	−31,7	− 0,1	149
	4	13.17.34	182.35.53,3	− 5.20.11,1	184.30.30,1	31,3	− 1,2	−3.51.40,2	−41,0	0,8	
	Oct.. 3	10.45.42	173. 6.34,0	4.13.56,5	172. 0. 0,2	1,5	− 1,3	1. 9. 1,2	58,1	3,1	150
	4	10.45.12	173.58.11,9	4. 3.23,7	172.51.32,5	30,2	2,3	1.19.43,9	40,0	3,9	
	10	10.49.42	181. 0.50,3	1.40.14,5	180.15.58,2	53,1	5,1	1.56.11,1	10,5	0,6	151
	14	10.56.55	186.45.56,4	− 0.46.21,4	186.31. 6,1	0,6	5,5	1.58.42,9	44,2	− 1,3	
	18	11. 5.27	192.50.41,0	− 3.32. 1,7	193.11.32,4	27,4	5,0	1.49.20,8	21,1	− 0,3	152
	22	11.14.24	199. 1.56,6	− 6.24. 4,2	199.59.16,4	8,8	7,6	1.32. 3,2	0,1	3,1	
	Déc.. 14	13.21.44	283.11.39,3	−24.57.32,4	281.57. 2,3	1,8	0,5	−2. 2.33,0	−33,2	0,2	153
	16	13.24. 4	285.45. 1,9	−24.31.32,7	284.18.17,5	18,4	− 0,9	−1.50.32,3	−33,1	0,8	
1839	Janv. 16	10.37. 6	274.26.53,5	−20.41.13,8	274. 9.42,6	55,9	−13,3	2.42.37,1	40,8	− 3,7	154
	18	10.32.13	275.11.42,8	−20.58.31,8	274.51. 3,2	15,7	−12,5	2.23.57,4	59,2	− 1,8	155
	Févr. 27	11.31.37	329.30.39,0	−14.41.59,4	326.31.17,5	21,0	− 3,5	−2. 8.29,4	−30,2	0,8	
	Mars. 1	11.37. 3	332.50.39,6	−13.30.14,7	329.58.18,9	18,9	0,0	−2. 8.55,6	−58,7	3,1	
	2	11.39.48	334.31.14,4	−12.52.13,9	331.43.25,3	25,9	− 0,6	−2. 8.28,8	−26,8	− 2,0	156
	3	11.42.35	336.12.12,0	−12.13. 0,4	333.29.36,7	34,3	2,4	−2. 7.34,7	−34,3	− 0,4	
	4	11.45.23	337.53.36,8	−11.32.24,0	335.16.54,1	51,6	2,5	−2. 6.12,5	−12,3	− 0,2	
	5	11.48.14	339.35.24,9	−10.50.28,5	337. 5.17,2	13,6	3,6	−2. 4.22,1	−21,3	− 0,8	
	Avril. 7	13.11.34	33. 0.33,7	16. 7. 5,1	36.14.51,3	46,6	4,7	2.39.13,8	10,3	3,5	157
	11	13. 8. 6	36. 5. 3,4	17.29.46,0	39.28.55,0	58,9	− 3,9	2.59.17,8	17,3	0,5	
	Mai.. 27	10.20.24	39.23. 0,3	11.49.16,6	40.43.27,3	26,6	0,7	−3.24.11,5	− 9,3	− 2,2	158
	29	10.21. 7	41.32. 0,0	12.37.35,8	42.58.33,9	27,6	6,3	−3.16.23,5	−21,5	− 2,0	
	30	10.21.47	42.41. 2,2	13. 3.44,4	44.10.39,4	36,2	3,2	−3.11.19,6	−18,3	− 1,3	159
	Juin. 7	10.34.20	53.43. 2,0	17. 1.22,8	55.30.39,2	36,7	2,5	−2.11.52,2	−48,4	− 3,8	
	12	10.49. 7	62.21.11,3	19.39.37,6	64. 5. 3,1	53,8	9,3	−1.20.45,7	−48,1	2,4	160
	13	10.52.46	64.15. 2,4	20.10.18,2	65.55.52,4	43,7	8,7	−1. 9.43,6	−46,6	3,0	
	14	10.56.38	66.12.17,7	20.40.16,9	67.49.14,6	5,7	8,9	−0.58.31,2	−33,1	1,9	
	17	11. 9.33	72.24. 0,7	22. 3.52,1	73.43.47,5	34,1	13,4	−0.24.27,0	−30,4	3,4	161
	20	11.24.17	79. 3.15,5	23.13.51,4	79.57.20,9	5,1	15,8	0. 9. 0,3	58,9	1,4	
	Juill. 16	13.27.28	135.33.39,0	18.24.56,2	132.39.44,4	36,3	8,1	1.26.57,9	58,6	− 0,7	162
	17	13.30. 8	137.12.58,3	17.50.46,5	134.20. 0,5	51,9	8,6	1.21.29,8	29,0	0,8	

Suite du tableau de la première série d'observations.

ANNÉE.	Mois et jour.	Temps moyen.	Ascension droite observée.	Déclinaison observée.	Longitude apparente tabulaire.	Secondes de la longitude observée.	Erreur de la longitude tabulaire.	Latitude apparente tabulaire.	Secondes de la latitude observée.	Erreur de la latitude tabulaire.	N° d'ordre.
		h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″	° ′ ″	″	″	
1839	Août. 2	13.50. 8	158. 0. 3,0	8.13 45,9	156.36. 8,8	4,8	4,0	−0.56.10,9	− 3,6	− 7,3	163
	5	13.49.10	160.42 55,2	6.33.31,2	159.43.25,6	21,4	4,2	−1.29. 0,3	−54,0	− 6,3	
	8	13.46.33	163. 0.48,2	5. 0.59,5	162.25.29,1	25,6	3,5	−2. 2.42,3	−37,3	− 5,0	164
	13	13.37.56	165.47. 1,5	2.51.28,9	165.48.32,1	27,1	5,0	−2.58.37,7	−33,7	− 4,0	165
	Sept. 16	10.50. 6	157.13. 8,7	9.46.28,7	155.18.53,0	52,6	0,4	0.13.10,9	5,0	5,9	166
	Déc.. 7	13.15.11	274.25. 3,2	−24.43.40,8	274. 0.35,1	46,3	−11,2	−1.19.35,7	−37,8	2,1	167
1840	Avril. 25	10.33.40	11.54.59,2	3. 0.34,7	12. 7.58,4	58,1	0,3	−1 56.39,8	−41,0	1,2	168
	29	10.25.38	13.50.37,8	3.10. 9,9	13.58.12,8	11,0	1,8	−2.32.42,5	−42,0	− 0,5	
	30	10.24.12	14.28.15,9	3.18.22,0	14.36. 1,2	2,8	− 1,6	−2.39.42,9	−39,5	− 3,4	
	Mai.. 1	10.22.59	15. 9. 1,5	3.28.37,4	15.17.36,6	35,4	1,2	−2.45.55,4	−52,0	− 3,4	169
	2	10.21.58	15.52.56,3	3.40.59,1	″ ″ ″	″	″	−2.51.22,4	−17,5	− 4,9	
	Juin. 1	11.10.52	57.42.37,5	19.23.50,3	59.44.42,3	25,6	16,7	−0.44. 0,1	− 2,8	2,7	
	2	11.15.18	59.48.18,1	19.59.50,1	61.47.53,4	38,4	15,0	−0.33.10,5	−15,8	5,3	170
	16	12.30.15	92.23.46,1	25. 2.13,1	92.10.33,5	18,1	15,4	1.35.36,9	34,0	2,9	
	20	12.51. 8	101.34.31,9	24.54.18,9	100.29.47,9	30,6	17,3	1.51.51,9	50,6	1,3	171
	21	12.56. 0	103.46.43,1	24.46. 0,0	102.30. 2,8	48,2	14,6	1.54. 3,9	2,7	1,2	
	22	13. 0.40	105.56.12,8	24.35.23,6	104.28.17,8	0,2	17,6	1.55.30,9	31,0	− 0,1	172
	23	13. 5.11	108. 3. 6,2	24.22.35,2	106.24.29,3	15,3	14,0	1.56.14,4	14,4	0,0	
	Juill. 15	13.54.19	142. 3.17,8	14.37.50,4	139.44. 1,6	58,8	2,8	−0.17.50,6	−48,3	− 2,3	173
	16	13.54.16	143. 1.33,4	14. 7.10,9	140.47.20,7	12,6	8,1	−0.29. 4,9	− 3,2	− 1,7	
	Août. 31	10.50.34	142.18.49,9	14.34.38,0	139.59.12,2	15,5	− 3,3	−0.16. 4,0	− 7,3	3,3	174
	Sept. 6	10.56.50	149.48. 3,8	13.25. 5,9	147.13.43,8	39,4	4,4	1. 2. 8,7	7,4	1,3	175
	Oct. 9	12.20.47	203.22.17,4	− 9.43.14,3	205.12.31,4	26,2	5,2	0. 2.39,0	42,6	− 3,6	
	10	12.22 45	204.51. 7,7	−10.24.47,4	206.49. 4,1	1,7	2,4	−0. 4.14,9	−13,0	− 1,9	176
	14	12.30.28	210.43.49,1	−13. 4.16,2	213. 8.23,5	20,6	2,9	−0.31.55,6	−54,9	− 0,7	177
	24	12.49. 8	225.15 57,6	−18.49.26,7	228.12.31,1	26,0	5,1	−1.37.17,0	−14,1	− 2,9	178
	30	12.59 57	233.53.19,6	−21.32.50,6	236.43.52,8	54,7	− 1,9	−2. 9.44,5	−45,2	0,7	179
1841	Mars. 11	12.58.21	3.35.49,5	5. 3.17,1	5.18.31,6	37,8	− 6,2	″ ″ ″	″	″	180
	Avril. 27	10 26.30	11.51. 6,7	2. 0.28,3	11.41. 0,8	56,3	4,5	−2.50.26,8	−31,0	4,2	
	28	10.27.40	13. 7.52,8	2.33.23,9	13. 4.31,8	31,0	0,8	−2.50. 1,2	− 2,2	1,0	
	30	10.30.22	15.46.42,1	3.42.36,9	15.57.46,6	43,9	2,7	−2.47.26,7	−23,3	− 3,4	181
	Mai. 1	10.31.54	17. 8.53,7	4.18.47,8	17.27.26,7	25,9	0,8	−2.45.18,5	−17,8	− 0,7	
	11	10.54.16	32.36.49,7	11. 8.24,0	34.13. 9,8	2,4	7,4	−1.54.30,1	−31,4	1,3	182
	14	11. 3.49	37.57.47,5	13.22.17,8	39.53.28,6	18,5	10,1	−1.29.48,6	−50,5	1,9	
	17	11.14.51	43.41.16,4	15.36.50,6	45.51.13,9	59,8	14,1	−1. 1.39,3	−43,1	3,8	183
	Juin. 17	13.36.53	109.50.57,9	24. 2.59,7	108. 4.31,5	23,3	8,2	1.49.34,8	34,6	0,2	184
	28	13.53. 0	124.43.53,7	20. 3.38,2	122.21.24,4	22,5	1,9	0.25. 6,4	7,8	− 1,4	185
	Août. 19	10.52.42	130.46.57,8	18.12.35,0	128.21. 8,4	4,1	4,3	0. 1. 7,4	0,8	6,6	
	20	10.54.39	132.15.40,4	18. 3.27,9	129 44.53,2	47,6	5,6	0.14.34,0	28,3	5,7	186
	Sept. 21	12.29.11	187.29.55,3	− 2.35.12,4	187.54.32,7	25,9	6,8	0.36. 7,0	6,7	0,3	187
	Déc.. 2	10.27.33	227.58.19,8	−15.18.52,3	229.44.10,7	8,5	2,2	2.27.41,2	42,6	− 1,4	188
	11	10.33.35	238.21.18,8	−18.41.39,9	240.11.17,3	17,7	− 0,4	1.32.55,5	55,6	− 0,1	189

Suite du tableau de la première série d'observations.

ANNÉE	Mois et jour.	Temps moyen.	Ascension droite observée.	Déclinaison observée.	Longitude apparente tabulaire.	Secondes de la longitude observée.	Erreur de la longitude tabulaire.	Latitude apparente tabulaire.	Secondes de la latitude observée.	Erreur de la latitude tabulaire.	N° d'ordre.
		h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″	° ′ ″	″	″	
1842	Févr. 6	13.11.20	334. 5. 1,2	−11.42.49,1	331.44.27,8	26,1	1,7	−0.54.23,9	−30,6	6,7	190
	8	13.15.26	337. 5. 8,6	−10.11.38,0	335. 2.25,1	18,7	6,4	−0.33.35,7	−38,1	2,4	
	15	13.21.13	345.26. 0,8	− 5. 8. 1,9	344.36.22,8	22,2	0,6	1. 0.40,0	39,2	0,8	191
	Avril. 8	10.29. 7	353.32.38,2	− 5.25.37,7	351.55.28,0	31,5	− 3,5	−2.25. 7,6	− 6,2	− 1,4	
	9	10.30.11	354.47.41,6	− 4.56.44,4	353.15.34,3	40,3	− 6,0	−2.28.17,2	−12,6	− 4,6	192
	10	10.31.20	356. 4. 9,8	− 4.26.38,7	354.37.35,7	38,3	− 2,6	−2.30.54,9	−52,0	− 2,9	
	11	10.32.35	357.22. 5,5	− 3.55.11,4	356. 1.29,0	32,7	− 3,7	−2.33. 1,0	−55,8	− 5,2	
	17	10.42. 0	5.38.35,6	− 0.21.39,4	5. 2.11,0	9,8	1,2	−2.34.32,5	−30,4	− 2,1	
	18	10.43.53	7. 6.10,6	0.17.51,6	6.38.20,3	20,0	0,3	−2.32.56,9	−54,2	− 2,7	193
	19	10.45.52	8.35.10,1	0.58.20,3	8.16.11,9	10,0	1,9	−2.30.49,9	−50,6	0,7	
	20	10.47.57	10. 5.38,9	1.39.53,0	9.55.45,5	45,7	− 0,2	−2.28.11,7	−12,7	1,0	
	22	10.52.25	13.11. 0,0	3. 5.48,5	13.20. 0,4	59,1	1,3	−2.21.20,8	−22,0	1,2	194
	23	10.54.48	14.45.56,4	3.50. 6,0	15. 4.41,7	35,2	6,5	−2.17. 8,8	− 9,6	0,8	
	Mai. 2	11.21.35	30.21. 8,0	11. 0. 4,9	32. 5. 1,7	54,8	6,9	−1.17. 4,7	−59,3	− 5,4	195
	17	12.28.48	61.59.22,5	22.11.38,0	64.13.22,0	8,0	14,0	1.12.30,6	26,3	4,3	
	18	12.33.47	64.13.14,2	22.43. 3,9	66.20.40,7	30,9	9,8	1.21. 8,0	3,8	4,2	196
	19	12.38.41	66.26.13,1	23.11.53,0	68.26.21,6	5,2	16,4	1.29.12,3	7,8	4,5	
	Juin. 3	13.35.26	95.26.45,5	25.25. 8,5	94.55.25,7	13,9	11,8	2. 3. 5,5	4,8	0,7	197
	6	13.41. 9	99.50.18,1	24.58.16,0	98.55. 4,0	55,0	9,0	1.48.49,3	53,0	− 3,7	198
	7	13.42.34	101.10.40,0	24.46.39,6	100. 8.39,8	30,7	9,1	1.42.33,0	36,0	− 3,0	
	11	13.45.37	105.53. 1,5	23.50. 1,3	104.30.12,4	4,0	8,4	1.10.12,3	11,1	1,2	199
	13	13.45.30	107.49.45,0	23.17. 6,2	106.20.15,6	9,9	5,7	0.49.50,0	50,4	− 0,4	
	Août. 10	11.10.50	126.13.22,5	20. 7.39,0	123.42.22,4	12,5	9,9	0.48.34,0	29,7	4,3	
	12	11.18.53	130.12.46,2	19.29.15,0	127.30.12,2	58,9	13,3	1. 6.46,2	45,1	1,1	200
	14	11.27.17	134.17.12,2	18.40.16,3	131.25.58,5	43,2	15,3	1.21.28,2	24,0	4,2	
	15	11.31.32	136.20.16,5	18.12. 6,8	133.25.52,8	42,1	10,7	1.27.29,1	27,0	2,1	
	16	11.35.46	138.23. 5,6	17.41.39,4	135.26.37,8	22,9	14,9	1.32.36,7	33,5	3,2	201
	17	11.39.58	140.25.31,9	17. 9. 4,7	137.27.54,4	37,9	16,5	1.36.52,4	49,9	2,5	
	18	11.44. 8	142.27.14,1	16.34.28,7	139.29.24,3	8,0	16,3	1.40.16,8	13,8	3,0	

Observations de la seconde série.

39. Les ascensions droites ont été calculées comme au n° **34**, avec cette seule différence qu'ici c'est le centre de la planète qui a été observé. Je n'ai apporté à cet égard aucune réduction à l'observation.

Les positions du Soleil ont été déduites des Tables, rectifiées par leur comparaison aux observations.

Les déclinaisons ont été observées jusqu'en 1822 avec le quart de cercle de Bird, et depuis cette époque avec le cercle entier de Fortin. J'ai trouvé plus commode, pendant toute cette période d'observations, de déterminer la correction de collimation de l'instrument par les observations du Soleil. J'y ai apporté beaucoup de soin, et la parfaite concordance des résultats, que j'ai déduits de cette marche, m'a montré qu'elle donnait autant de précision que l'emploi des étoiles. L'exactitude du cercle de Fortin est connue. Mais le quart de cercle de Bird me paraît être aussi un excellent instrument, propre encore, avec les soins convenables, à donner de très-bons résultats.

Le tableau des observations de cette série, et de leur comparaison avec les éléments provisoires, est disposé comme celui des observations de la première série.

40. *Tableau de la seconde série d'observations, et de sa comparaison avec les éléments provisoires.*

ANNÉE	Mois et jour.		Temps moyen.	Ascension droite observée.	Déclinaison observée.	Longitude apparente tabulaire.	Secondes de la longitude observée.	Erreur de la longitude tabulaire.	Latitude apparente tabulaire.	Secondes de la latitude observée.	Erreur de la latitude tabulaire.	N° d'ordre.
			h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″	° ′ ″	″	″	
1801	Mars.	8	13.12.24	3.50.48,0	2.50.18,5	4.39.23	26	— 3	1. 4.21,0	25,8	— 4,8	1
	Juin.	18	13.12.49	104.29.24,7	24.47.30,3	103. 8.14	15	— 1	1.59. 3,5	1,2	2,3	
		19	13.16.52	106.29.22,2	24.35.18,7	104.58. 2	59	3	1.58.31,8	29,7	2,1	2
		20	13.20.43	108.26.21,3	24.21. 9,4	106.45.32	27	5	1.57.17,8	10,3	7,5	
		28	13.44. 7	122.11.36,1	21.36.19,1	119.42. 8	8	0	1.23.52,5	0,1	— 7,6	
		29	13.46. 6	123.40.32,2	21.10.41,7	121. 8.34	33	1	1.17. 1,0	54,9	6,1	3
		30	13.47.53	125. 6.26,1	20.44.40,1	122.32.39	35	4	1. 9.35,5	36,2	— 0,7	
	Juill.	1	13.49.27	126.29.10,8	20.17.55,2	123.54.17	12	5	1. 1.39,6	38,6	1,0	
		2	13.50.49	127.48.46,5	19.50.46,7	125.13.22	18	4	0.53.13,3	16,9	— 3,6	
		7	13.54.25	133.38.45,0	17.30.35,2	131.10. 3	51	12	0. 4. 0,0	1,6	— 1,6	4
		8	13.54.29	134.38.51,6	17. 2.28,8	132.12.54	48	6	—0. 7. 7,3	— 3,5	— 3,8	
	Août.	18	10.58.11	130.51.48,4	15.51.21,7	129. 2.20	19	1	—2.14.23,4	—24,3	0,9	
		19	10.55.34	131.11.29,4	16. 4.39,2	129.17. 9	7	2	—1.56.37,5	—37,6	0,1	
		20	10.53.27	131.38.59,2	16.15.42,6	129.39.41	41	0	—1.38.57,6	— 0,1	2,5	5
		21	10.51.52	132.14.10,3	16.24.45,6	130. 9.55	50	5	—1.21.19,0	—17,1	— 1,9	
		22	10.50.47	132.57. 5,7	16.31. 8,3	130.47.47	46	1	—1. 4. 3,7	— 3,0	— 0,7	
		23	10.50.12	133.47.21,4	16.34.55,4	131.33.11	5	6	—0.47.14,9	—13,9	— 1,0	
		25	10.50.26	135.49.15,4	16.33.58,6	133.25.35	30	5	—0.15.21,7	—21,3	— 0,4	
		26	10.51.13	137. 0. 9,0	16.29. 4,7	134.32. 4	59	5	—0. 0.28,8	—26,2	— 2,6	
		27	10.52.24	138.17. 7,6	16.21. 3,9	135.44.58	54	4	0.13.35,0	37,8	— 2,8	6
		28	10.53.58	139.39.42,9	16. 9.54,1	137. 3.52	53	— 1	0.26.46,2	47,9	— 1,7	
		29	10.55.51	141. 7.11,4	15.55.42,6	138.28.20	15	5	0.39. 0,9	5,1	— 4,2	
		30	10.58. 2	142.39. 9,4	″ ″ ″ ″	139.57.56	52	4	0.50.16,5	″ ″	″ ″	7
	Sept.	1	11. 3. 9	145.54.31,6	14.54.31,8	143.10.23	17	6	1. 9.45,5	48,0	— 2,5	
		5	11.15.19	152.54. 5,1	12.54.11,5	150.14.18	13	5	1.36.23,0	18,7	4,3	8
		6	11.18.34	154.42. 7,8	12.18.24,7	152. 5.37	32	5	1.40.34,1	35,1	— 1,0	
1802	Juin.	11	13.37.35	103.33.39,0	24.47.20,8	102.17.58	51	7	1.53.57,0	59,0	— 2,0	11
		12	13.39.56	105. 8.10,5	24.34. 9,2	103.44.42	40	2	1.49.19,2	20,0	— 0,8	
		14	13.43.56	108. 6.40,2	24. 4. 6,1	106.29.48	46	2	1.37.57,8	1,0	— 3,2	
		15	13.45.35	109.30.32,4	23.47.23,1	107.48. 5	59	6	1.31.16,2	17,3	— 1,1	12
		16	13.47. 0	110.50.56,7	23.29.44,3	109. 3.26	22	4	1.23.54,4	55,7	— 1,3	
		19	13.49.46	114.29.57,3	22.32.14,2	112.31.34	26	8	0.58. 0,3	3,7	— 3,4	
		20	13.50.11	115.35.29,1	22.11.51,4	113.34.42	36	6	0.48. 8,4	11,2	— 2,8	13
		21	13.50.21	116.37. 2,2	21.51. 4,2	114.34.31	26	5	0.37.40,2	43,1	— 2,9	
		22	13.50.15	117.34.47,4	21.29.58,9	115.31. 4	2	2	0.26.41,1	43,2	— 2,1	
		27	13.45.43	121.22. 7,2	19.43.26,9	119.20.41	33	8	—0.36. 8,1	— 3,6	— 4,5	14
		29	13.41.54	122.23.11,4	19. 2.15,8	120.25.33	32	1	—1. 4.18,0	—12,5	— 5,5	
	Août.	4	10.48.20	114.21.24,7	19.15.23,9	112.55.51	59	— 8	—2.17.27,7	—24,2	— 3,5	
		5	10.47.15	115. 4.21,6	19.25. 1,2	113.34.17	22	— 5	—2. 1.12,4	—10,2	— 2,2	16
		7	10.46.28	116.50.54,0	19.40.16,9	115.10.33	37	— 4	—1.28.46,0	—38,1	— 7,9	
		9	10.47.27	119. 3.48,6	19.48.48,3	117.11.57	57	0	—0.57. 4,3	—59,8	— 4,5	
		14	10.56.42	126.18.37,9	19.31.35,8	123.55.32	30	2	0.14.16,1	17,6	— 1,5	
		15	10.59.31	128. 0. 7,5	19.20.33,7	125.31.12	4	8	0.26.34,3	36,2	— 1,9	17
		16	11. 2.36	129.45.39,9	19. 6.40,4	127.11. 4	1	3	0.38. 4,5	3,9	0,6	
		18	11. 9.22	133.25.54,4	18.30.44,1	130.41.43	37	6	0.58.30,2	31,2	— 1,0	

Suite du Tableau de la seconde série d'observations.

Année	Mois et jour.	Temps moyen.	Ascension droite observée.	Déclinaison observée.	Longitude apparente tabulaire.	Secondes de la longitude observée.	Erreur de la longitude tabulaire.	Latitude apparente tabulaire.	Secondes de la latitude observée.	Erreur de la latitude tabulaire.	N° d'ordre.
		h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″	° ′ ″	″	″	
1802	Août. 20	11.16.46	137.15.24,0	17.43.52,7	134.24. 7	5	2	1.15.17,6	21,9	− 4,3	
	21	11.20.35	139.12. 3,4	17.16.33,9	136.18.38	28	10	1.22.17,9	20,2	− 2,3	
	22	11.24.29	141. 9.44,5	16.46.49,8	138.14.48	44	4	1.28.21,9	27,3	− 5,4	18
	23	11.28.23	43. 7.31,9	16.14.46,2	140.12.12	4	8	1.33.30,5	32,5	− 2,0	
	Sept. 17	12.41.34	186. 6.50,5	− 2.13.37,3	186.29.39	39	0	0.23. 3,9	9,6	− 5,7	
	18	12.43.27	187.34. 7,5	− 2.58.46,1	188. 7.35	35	0	0.16. 6,1	10,1	− 4,0	
	19	12.45.15	189. 0.33,7	− 3.43.27,0	189.44.30	30	0	0. 9. 1,3	6,1	− 4,8	19
	20	12.47. 1	190.26.15,4	− 4.27.42,7	191.20.28	29	− 1	0. 1.51,7	56,6	− 4,9	
	24	12.53.36	196. 1.46,5	− 7.19.47,3	197.34.43	48	− 5	−0.27.22,7	−22,6	− 0,1	
	25	12.55. 8	197.23.57,0	− 8. 1.25,3	199. 5.58	3	− 5	−0.34.46,2	−47,9	1,7	
	26	12.56.38	198.45.35,4	− 8.42.22,3	200.36.14	14	0	−0.42.10,1	− 7,5	− 2,6	20
	Sept. 30	13. 2.14	204. 6.27,7	−11.20. 5,9	206.28. 7	11	− 4	−1.11.31,1	−31,4	0,3	
	Oct.. 1	13. 3.32	205.25.12,4	−11.57.47,0	207.53.43	45	− 2	−1.18.44,2	−46,1	1,9	
	3	13. 6. 2	208. 1. 0,0	−13.10.52,3	210.41.54	54	0	−1.32.56,0	−58,3	2,3	21
	16	13.16.46	223.31.13,5	−19.34.29,5	226.50.23	23	0	−2.48.27,7	−21,5	− 6,2	
	17	13.16.56	224.32.55,5	−19.55.51,2	227.52.10	13	− 3	−2.52.12,2	−10,6	− 1,6	22
	22	13.14.58	228.59. 4,8	−21.17.53,4	232.14.37	36	1	−3. 2.59,5	− 3,8	4,3	
1803	Août. 2	11. 6.24	116.40.40,3	21.39. 7,9	114.39.57	53	4	0.26.34,1	36,1	− 2,0	23
	3	11.10.26	118.40.32,4	21.29.17,7	116.31.18	15	3	0.37.30,3	33,2	− 2,9	24
	Sept. 7	13. 4.40	181.48.36,7	− 0.46. 6,9	181.57.56	59	− 3	0. 0.55,4	56,3	− 0,9	
1804	Juill. 14	10.53.20	95.25.17,1	22.49.10,6	94.59.48	46	2	−0.33. 7,4	− 8,4	1,0	25
	17	11. 5.13	101.21.39,2	23. 7.22,9	100.26.19	15	4	0. 4. 5,6	5,5	0,1	
	18	11. 9.38	103.27. 6,9	23. 9. 5,7	102.21. 9	3	6	0.15.41,6	40,2	1,4	26
	Août. 26	13.23.47	175.31.12,0	1.38.39,2	175.14. 9	10	− 1	−0.16.26,1	−24,4	− 1,7	
	Sept. 6	13.31.16	188.14.27,6	− 5.34.22,3	189.45.54	56	− 2	−1.51. 1,1	− 5,3	4,2	27
	9	13.31. 9	191.10. 9,7	− 7.16.33,5	193. 6.48	46	2	−2.16.23,7	−22,6	− 1,1	
	13	13.29. 8	194.36.22,9	− 9.17.10,1	197. 1.51	53	− 2	−2.48.13,8	−14,0	0,2	28
	14	13.28.14	195.21.55,5	− 9.43.57,5	197.53.40	43	− 3	−2.55.38,3	−39,3	1,0	29
1805	Avril. 9	12.37. 3	26.33.41,0	11.28.47,0	28.45.58	58	0	0.27.42,7	44,3	− 1,6	
	10	12.40.36	28.26.19,8	12.22.23,9	30.48. 1	1	0	0.38.57,9	57,9	0,0	
	12	12.47.31	32. 8.32,3	14. 5.23,4	34.46.42	34	8	1. 1.16,3	18,6	− 2,3	31
	13	12.50.51	33.57.51,6	14.54.19,1	36.42.45	41	4	1.12. 9,6	10,9	− 1,3	
	Août. 2	13.20. 7	150.42.39,0	13.10.33,6	148. 8.32	32	0	1. 6.40,5	45,8	− 5,3	
	3	13.22.24	152.16. 6,6	12.29.45,1	149.48.11	12	− 1	1. 0.18,0	25,4	− 7,4	32
	11	13.35.46	163.30. 6,3	7. 0.22,1	162. 6.47	50	− 3	−0. 1.16,9	−12,0	− 4,9	33
	25	13.39.30	178.14.19,7	− 1.39.55,5	179. 2.54	52	2	−2.13.41,7	−44,2	2,5	
	26	13.38.43	179. 1.38,8	− 2.10.52,6	179.58.41	37	4	−2.23.19,4	−17,0	− 2,4	34
	Oct. 13	10.51.18	184.22.10,2	0.17. 6,0	183.53.46	46	0	1.59.55,0	59,8	− 4,8	35
	19	11. 3.12	193.15.54,7	− 3.41.10,6	193.38.17	13	4	1.50.41,2	43,6	− 2,4	
	23	11.12. 0	199.24.56,7	− 6.31.38,3	200.23.15	11	4	1.33.33,9	37,9	− 4,0	
1806	Avril. 8	13.11.51	34. 3.45,6	16.25. 9,5	37.18. 6	5	1	2.36. 0,2	0,2	0,0	36
	9	13.11.49	35. 2.31,2	16.51.45,3	38.20. 5	3	2	2.42.37,9	38,6	− 0,7	37
	Juin. 18	11. 7.22	72.50.12,3	22. 4.17,1	74. 7.50	43	7	−0.27. 5,8	− 4,4	− 1,4	38

Suite du Tableau de la seconde série d'observations.

ANNÉE	Mois et jour.		Temps moyen.	Ascension droite observée.	Déclinaison observée.	Longitude apparente tabulaire.	Secondes de la longitude observée.	Erreur de la longitude tabulaire.	Latitude apparente tabulaire.	Secondes de la latitude observée.	Erreur de la latitude tabulaire.	N° d'ordre.
			h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″	° ′ ″	″	″	
1806	Juill.	18	13.28.12	137.42.44,1	17.42.54,5	134 49 17	16	1	1.22.12,3	13,1	— 0,8	39
	Sept.	21	10.49.13	161.55.23,4	8.48.49,7	159.58.50	49	1	1. 3.25,5	28,5	— 3,0	40
	Nov.	7	12.31.16	233.50. 0,0	—20.46. 4,3	236.29.47	54	— 7	—1.25. 1,3	—56,0	— 5,3	41
		8	12.33.33	235.23.23,4	—21.12.34,7	238. 0.46	53	— 7	—1 30.41,1	—37,0	— 4,1	
1807	Mars.	22	13.12.16	17.10.26,6	9.41 48,9	19.31.53	49	4	2.12.47,7	47,8	— 0,1	
		24	13.11.17	18 53.46,5	10.46.13,1	21.30.22	26	— 4	2.33.49,5	52,0	— 2,5	42
		26	13. 8.39	20.12.33,7	11.36.45,1	″ ″ ″	″	″	2.51.40,2	40,3	— 0,1	
	Mai.	21	10.29.43	35.33.41,7	11.19.51,8	37. 0.42	43	— 1	—2.41. 1,7	— 0,2	— 1,5	
		22	10.31.36	37. 1.10,0	11.55.27,4	38.33.22	23	— 1	—2.34.48,8	—49,3	0,5	
		23	10.33.39	38.31. 8,5	12.31.42,2	40. 8.24	21	3	—2.28. 5,0	— 7,5	2,5	43
		24	10.35.53	40. 3.49,8	13. 8.36,5	41.45.46	47	— 1	—2 20.51,0	—53,1	2,1	
		26	10.40.52	43.17. 8,2	14.23.47,2	45. 7.37	33	4	—2. 4.59,3	—59,3	0,0	
	Juin.	24	12.58.28	106.21 43,5	24.31.54,3	104.51.36	28	8	1.54.42,7	33,7	9,0	44
		29	13.19.21	116.31.38,7	23. 7. 0,2	114.16. 3	59	4	1.51.53,1	45,8	7,3	45
		30	13.22.57	118.24.48,8	22.45. 0,0	116. 2.37	32	5	1.49.18,6	17,3	1,3	
	Juill.	9	13.46.23	133. 9.34,0	18.36.44,2	130.25. 6	4	2	1. 0.13,5	14,8	— 1,3	
		10	13.48. 1	134.33.15,0	18. 5.36,8	131.50. 3	0	3	0.52.14,3	14,8	— 0,5	
		11	13.49.27	135.54. 7,2	17.34. 7,3	133.12.44	46	— 2	0.43.48,7	48,1	0,6	46
		12	13.50.42	137.11.59,1	17. 2.24,1	134.33. 6	6	0	0.34.58,2	55,5	2,7	
		13	13.51.45	138.26.58,2	16.30.30,5	135.51. 9	6	3	0.25.42,7	38,2	4,5	
		17	13.54. 3	142.58. 5,4	14.23.11,9	140.38.55	56	— 1	—0.14.58,3	—58,3	0,0	
		19	13.54. 1	144.55.44,5	13.20.48,3	142.47. 9	9	0	—0.37.15,6	—16,7	1,1	47
		22	13.52.23	147.28.47,7	11.50.54,0	145.37.55	53	2	—1.12.40,8	—41,3	0,5	
1808	Févr.	21	12.56.29	344.23.30,5	— 7.39.25,9	342.40.45	49	— 4	—0.55. 8,9	—12,2	3,3	
		22	12.59. 8	346. 2.35,1	— 6.48. 6,0	344.31.14	19	— 5	—0.45.37,0	—40,3	3,3	48
		25	13. 6.23	350.49. 4,6	— 4.12.12,6	349.54.39	41	— 2	—0.13.15,9	—19,4	3,5	
	Mars.	6	13.15. 5	2.51.20,1	3.25.19,0	3.58.50	51	— 1	2. 0.13,5	11,0	2,5	
		7	13.13.55	3.32.53,5	3.57.39,8	4.49.43	48	— 5	2.13.26,5	22,0	4,5	
		8	13.12.16	4. 7.12,0	4.26.23,2	5.32.35	40	— 5	2.26.12,2	6,8	5,4	49
		9	13.10. 8	4.34.19,8	4.51.11,4	6. 7.13	22	— 9	2.38. 9,9	7,8	2,1	
	Mai.	2	10.30.29	17.46.21,6	4.31.39,5	18. 6.54	55	— 1	—2.47.30,0	—37,3	7,3	50
		3	10.32. 3	19. 9.12,4	5. 8.12,3	19.37.10	15	— 5	—2.44.49,9	—59,7	9,8	
		14	10.58.17	36.34.15,0	12.43.21,3	38.23.46	44	2	—1.40.52,9	— 0,1	7,2	
		15	11. 1.35	38.22.54,4	13.27.49,8	40.18.16	15	1	—1.32.14,2	—15,9	1,7	51
		16	11. 5. 2	40.13.59,5	14.12.18,3	42.14.43	36	7	—1.23.11,8	— 11,4	— 0,4	
		17	11. 8.41	42. 7.57,9	14.56.46,0	44.13.10	11	— 1	—1.13.48,4	—49,9	1,5	
	Juill.	8	13.46.23	132.55.13,3	16.10.39,5	130.51.39	35	4	—1.24. 1,8	— 1,0	— 0,8	
		10	13.41.55	133.46.18,4	15.27.26,8	131.50.44	42	2	—1.52. 9,4	— 8,3	— 1,1	52
		13	13.33. 0	134.29.43,7	14.30.37,9	132.46.45	48	— 3	—2.35. 5,2	— 5,2	0,0	
	Sept.	26	12.34.28	193.44.43,5	— 5.41.49,8	194.51.25	26	— 1	0.10.28,5	33,9	— 5,4	54
	Oct.	6	12.51.35	207.53.24,0	—12.33.21,7	210.21.41	45	— 4	—1. 0.40,0	—37,0	— 3,0	55
1809	Mai.	26	13. 4.24	79.46.20,2	25. 9.58,0	80.44.51	46	5	2. 1.58,8	56,0	2,8	56
	Juin.	2	13.29.36	92.59.25,5	25.33.57,3	92.42. 1	57	4	2. 7.57,4	56,2	1,2	57

Suite du Tableau de la seconde série d'observations.

ANNÉE	Mois et jour.	Temps moyen.	Ascension droite observée.	Déclinaison observée.	Longitude apparente tabulaire.	Secondes de la longitude observée.	Erreur de la longitude tabulaire.	Latitude apparente tubulaire.	Secondes de la latitude observée.	Erreur de la latitude tabulaire.	N° d'ordre.
		h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″	° ′ ″	″	″	
1810	Mai. 10	12.58.16	62.13.34,4	22.56.27,5	64.34.26	22	4	1.54. 2,3	0,0	2,3	58
	20	13.28.25	79.38.21,3	25.26.49,1	80.38.50	46	4	2.19.21,4	18,2	3,2	59
	30	13.33.40	90.48.43,6	24.46.36,7	90.38.12	15	— 3	″ ″ ″	″	″	60
	Août. 22	12.51.58	163. 9.18,3	8.25.37,1	161.15.17	15	2	1. 9.47,8	49,0	— 1,2	
	23	12.54.24	164.44.57,2	7.40.15,4	163. 0. 4	8	— 4	1. 4. 3,5	9,1	— 5,6	
	24	12.56.43	166.18.50,3	6.54.47,3	164.43.31	36	— 5	0.58. 1,6	6,1	— 4,5	61
	26	13. 1. 0	169.21.37,2	5.23.58,5	168. 6.23	22	1	0.45.10,4	10,3	0,1	
1811	Janv. 11	13.24.43	311.19.35,8	—19.16.34,4	308.34. 3	9	— 6	—1.10.49,7	—52,6	2,9	
	12	13.25.56	312.36.56,8	—18.34.50,2	309.52.48	49	— 1	″ ″ ″	″	″	62
	Mars. 18	10.57.58	339.35.25,9	—11. 1.23,5	337. 1. 1	10	— 9	—2.14.34,0	—31,5	— 2,5	63
	23	11. 9. 7	347.18.42,8	— 7.56.15,1	345.14.25	31	— 6	—2.17.48,2	—46,7	— 1,5	64
	26	11.16.25	352. 6. 2,2	— 5.50.45,7	350.26.17	21	— 4	—2.14. 7,3	— 6,8	— 0,5	
	27	11.18.58	353.43.30,0	— 5. 6.36,3	352.12.55	0	— 5	—2.11.55,4	—54,8	— 0,6	65
	28	11.21.34	355.21.42,6	— 4.21.20,6	354. 0.56	52	4	—2. 9.13,5	—11,0	— 2,5	
	Sept. 3	13.35. 0	185.31.46,6	— 4.48.11,7	186.58.42	45	— 3	—2.12.43,1	—40,2	— 2,9	
	5	13.33.56	187.13.50,3	— 5.51. 9,5	188.57. 9	6	3	—2.30.16,0	—15,0	— 1,0	
	6	13.33.10	188. 1.28,3	— 6.20.46,8	189.52.21	22	— 1	—2.38.49,1	—45,0	— 4,1	66
	7	13.32.13	188.46.26,4	— 6.49. 6,6	190.44.38	39	— 1	—2.47.10,9	— 8,4	— 2,5	
	8	13.31. 6	189.28.37,6	— 7.15.56,5	191.33.49	46	3	—2.55.20,0	—21,5	1,5	
	10	13.28.16	190.44.18,0	— 8. 4.38,7	193. 1.53	59	— 6	—3.10.46,1	—43,3	— 2,8	67
	11	13.26.30	191.17. 4,6	— 8.26.15,6	193.40.18	21	— 3	—3.17.59,0	—54,7	— 4,3	
1812	Juill. 25	13.20.35	143.14. 5,0	15.58.53,4	140.23. 6	5	1	1.20.40,0	43,5	— 3,5	68
	Août. 1	13.35.32	153.52.54,0	11.24.47,3	151.39.52	48	4	0.33.23,0	25,2	— 2,2	69
	23	13.35.57	175.40.15,8	— 1.22.38,1	176.34.37	31	6	—2.59. 9,3	— 7,6	— 1,7	
	25	13.31.43	176.34.45,3	— 2. 6.37,7	177.42.11	6	5	—3.17.55,8	—51,5	— 4,3	70
1813	Juill. 7	13.16.54	124.19.43,0	21.32.18,7	121.39.24	20	4	1.46.26,2	24,4	1,8	71
	29	13.51.35	154.42.28,0	9.20.16,1	153.10. 1	59	2	—1. 5.21,9	—20,2	— 1,7	
	30	13.51. 7	155.34.37,8	8.48. 7,9	154. 9.41	38	3	—1.16.40,8	—41,2	0,4	72
	31	13.50.28	156.23.56,3	8.16.47,9	155. 6.28	28	0	—1.28. 8,9	— 7,9	— 1,0	
	Août. 3	13.47.17	158.33.23,7	6.48.24,2	157.38.25	24	1	—2. 3. 9,4	— 6,7	— 2,7	73
	Sept. 20	11. 0.12	163.59. 2,7	8.37.34,1	161.56.10	10	0	1.39.36,9	38,4	— 1,5	74
1817	Mai. 7	13.10.28	62.37.20,7	23.20.34,6	65. 0.25	20	5	2.13.32,8	31,2	1,6	75
1818	Sept. 4	13.28.35	185.12.13,1	— 5.52.38,4	187. 6.23	29	— 6	—3.19.27,5	—31,0	3,5	76
1819	Avril. 6	13. 7.23	30.49.13,2	14.36.27,7	33.44.53	50	3	1.56.42,0	38,8	3,2	
	8	13.10.13	33.30. 0,1	15.52. 3,8	36.36.28	28	0	2.15.32,5	29,8	2,7	
	9	13.11.12	34.43.53,1	16.25.50,3	37.54.40	41	— 1	2.23.56,4	57,8	— 1,4	77
	10	13.11.52	35.53.14,3	16.56.42,1	39. 7.30	36	— 6	2.31.33,8	32,6	1,2	
1820	Mars. 20	13. 9.34	15.21.36,0	8.12.56,3	17.18.25	25	0	1.31.37,9	45,8	— 7,9	78
	Mai. 23	10.29.47	38.23.10,6	12.17.52,5	39.56.39	38	1	—2.38.53,2	—53,8	0,6	79
	Juin. 28	13. 8.56	113.45.50,8	23.36.10,5	111.41. 8	58	10	1.54.32,8	39,1	— 6,3	
	29	13.12.59	115.46. 3,8	23.16.13,4	113.33.14	6	8	1.53.24,2	23,3	0,9	80
	Juill. 11	13.46.30	135.59.40,2	17.43.27,4	133.15.12	9	3	0.54.10,8	10,9	— 0,1	81
	16	13.52.23	142.23.55,2	14.59.49,0	139.55.56	59	— 3	0. 9.15,8	13,7	2,1	

Suite du Tableau de la seconde série d'observations.

ANNÉE	Mois et jour.	Temps moyen.	Ascension droite observée.	Déclinaison observée.	Longitude apparente tabulaire.	Secondes de la longitude observée.	Erreur de la longitude tabulaire.	Latitude apparente tabulaire.	Secondes de la latitude observée.	Erreur de la latitude tabulaire.	N° d'ordre.
		h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″	° ′ ″	″	″	
1821	Juin. 19	13.31.11	110.14.11,0	24. 3.51,8	108.25.31	17	14	1.53.10,4	9,4	1,0	82
	Août. 21	10.50.11	131.58.14,2	17.30.41,3	129.37.31	32	— 1	—0.21.43,2	—41,9	— 1,3	
	22	10.51.12	133.12.36,6	17.26.17,8	130.47. 3	2	1	—0. 6.49,8	—48,7	— 1,1	83
	23	10.52.36	134.32.55,5	17.19. 4,6	132. 2.41	42	— 1	0. 7.18,9	24,3	— 5,4	
	Déc. 10	10.27. 0	235.34. 0,9	—17.31. 4,8	237.20.40	39	1	″ ″ ″	″	″	84
1822	Févr. 15	13.18.13	344.31.36,0	— 6.26.40,9	343.16.11	9	2	0. 8.59,5	55,4	4,1	85
	22	13.16.59	351. 6.53,4	— 1.49. 7,4	351. 7.17	20	— 3	1.51.15,3	15,3	0,0	86
	Juin. 1	13.18.22	89. 2.38,3	25.36.13,3	89. 8.20	14	6	2. 8.35,5	32,8	2,7	87
	6	13.34. 9	97.55.44,9	25.18. 3,8	97.10.19	8	11	2. 2. 5,9	3,3	2,6	
	7	13.36.39	99.32.30,3	25. 9. 9,6	98.38.11	6	5	1.58.30,5	27,6	2,9	88
	9	13.40.57	102.35.18,9	24.47. 4,4	101.25.12	6	6	1.49. 7,6	7,0	0,6	
	13	13.46.37	107.57. 8,7	23.48.38,9	106.23.12	2	10	1.21.46,4	47,2	— 0,8	89
	18	13.47.56	113.12.37,8	22.17.54,9	111.23.11	11	0	0.32.32,3	34,7	— 2,4	
1823	Avril. 10	10.57.26	2.13.11,5	— 1.37.58,2	1.23.12	10	2	—2.22.54,8	—53,8	— 1,0	90
	11	10.59.44	3.46.59,0	— 0.54.36,6	3. 6.31	32	— 1	—2.20.24,1	—25,7	1,6	
	Mai. 24	13.32. 6	84.21.48,2	25.35.12,3	84.54.59	50	9	2.13.20,4	22,5	— 2,1	91
	29	13.37. 1	90.31.23,7	25.14.34,8	90.28.25	24	1	1.46.53,0	49,5	3,5	
	Août. 24	12.48.32	164. 7.12,9	8. 3.34,4	162.16.42	39	3	1.11.16,2	18,6	— 2,4	92
	25	12.50.59	165.43. 8,5	7.17.52,4	164. 2. 5	1	4	1. 5.38,4	40,5	— 2,1	
	26	12.53.19	167.17.21,7	6.32. 5,2	165.46. 6	59	7	0.59.42,2	40,7	1,5	93
	29	12.59.43	171.51. 8,1	4.15.14,2	170.50.24	23	1	0.40.23,3	27,6	— 4,3	
	Sept. 2	13. 6.56	177.36.20,4	1.15.11,1	177.18.22	17	5	0.11.44,8	47,6	— 2,8	
	4	13.10. 4	180.21.33,6	— 0.13. 9,2	180.25. 0	1	— 1	—0. 3.28,4	—28,9	0,5	94
	5	13.11.30	181.42.24,3	— 0.56.41,4	181.56.30	30	0	—0.11.15,5	—14,3	— 1,2	
	8	13.15.23	185.38.13,5	— 3. 4.42,4	186.23.41	38	3	—0.35. 5,8	—10,7	4,9	
	9	13.16.32	186.54.42,0	— 3.46.22,1	187.50.15	14	1	—0.43. 9,1	— 8,5	— 0,6	95
	10	13.17.37	188.10. 6,3	— 4.27.29,8	″ ″	″	″	—0.51 15,1	—14,4	— 0,7	
	11	13.18.38	189.24.28,4	— 5. 8. 3,6	190.39.39	41	— 2	—0.59.21,7	—22,0	0,3	
1824	Avril. 20	12.33. 5	36.48.27,7	15.19.26,8	39.26.35	39	— 4	0.42.38,8	30,3	8,5	96
	21	12.37. 4	38.47.14,0	16. 8.41,5	41.30.45	40	5	0.53.23,4	16,8	6,6	
	29	13. 5.41	53.50.49,4	21.27.49,0	56.40.41	28	13	2. 5.24,2	23,3	0,9	97
	30	13. 8.36	55.33.40,2	21.56.53,5	58.20.12	13	— 1	1.44.35,6	41,0	— 5,4	
	Juill. 12	11. 0.51	95.29.30,1	23. 8.41,8	95. 3. 2	55	7	—0.13.13,7	—16,3	2,6	98
	17	11.24. 7	106.15. 9,3	23.19.57,4	104.53.42	33	9	0.42.29,7	26,6	3,1	99
	20	11.39.33	113. 4.38,1	22.55.38,2	111.10. 9	59	10	1. 8.48,9	46,6	2,3	
	Août. 7	12.57. 5	150.15.12,0	13.43.11,6	147.32.11	10	1	1.28.12,5	12,6	— 0,1	100
	11	13. 7.51	156.53.43,2	10.52.31,8	154.36.53	52	1	1. 7.34,1	32,4	1,7	
	26	13.31. 8	177.31.25,6	0.12.27,2	177.38.42	44	— 2	—0.47.40,4	—43,6	3,2	101
	27	13.31.52	178.41.23,0	— 0.27.33,7	178.58.50	51	— 1	—0.56.31,1	—34,8	3,7	
1825	Avril. 3	12.32. 7	19.34. 3,0	8.16.46,9	21.11. 7	2	5	0. 0.35,0	30,3	4,7	
	4	12.35.37	21.25.38,4	9.12.58,9	23.14.20	19	1	0.11.41,4	31,2	10,2	102
	5	12.39. 4	23.16.41,8	10. 8.29,4	25.16.33	32	1	0.22.58,0	48,9	9,1	

Suite du Tableau de la seconde série d'observations.

ANNÉE	Mois et jour.	Temps moyen.	Ascension droite observée.	Déclinaison observée.	Longitude apparente tabulaire.	Secondes de la longitude observée.	Erreur de la longitude observée.	Latitude apparente tabulaire.	Secondes de la latitude tabulaire.	Erreur de la latitude tabulaire.	N° d'ordre.
		h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″	° ′ ″	″	″	
1825	Avril. 7	12.45.49	26.56.31,0	11.56.17,2	29.16.44	39	5	0.45.44,4	35,9	8,5	
	8	12.49. 4	28.44.44,1	12.48.12,9	31.13.55	53	2	0.57. 4,9	59,1	5,8	103
	9	12.52.14	30.31.21,9	13.38.26,3	33. 8.44	40	4	1. 8.16,5	10,6	5,8	
	Août. 23	13.39.16	176.21.37,8	− 1.12.33,4	177. 8.31	30	1	−2.33.24,9	−27,8	5,9	
	24	13.37.56	177. 0.47,3	− 1.40.11,0	177.55.27	28	− 1	−2.43.14,7	−14,2	2,9	104
1826	Juill. 1	12.39. 6	108.48. 6,6	24. 7.54,0	107. 6.51	50	1	1.46.58,1	56,1	− 0,5	
	2	12.44. 6	111. 2.25,5	23.53.28,2	109.10.30	24	6	1.49.22,2	17,7	2,0	
	3	12.48.57	113.14.19,8	23.36.53,8	111.12.29	19	10	1.51. 2,0	1,7	4,5	105
	4	12.53.37	115.23.45,1	23.18. 5,6	″ ″	″	″	1.51.56,4	57,3	0,3	
	18	12.39.19	140.39. 9,2	16.27. 0,6	137.53. 3	59	4	1. 0.45,7	49,1	− 0,9	
	26	13.49.50	151.10.26,7	11.40.15,3	149. 5.22	25	− 3	−0. 8.18,5	−18,2	− 3,4	106
	29	13.51. 2	154.25.47,8	9.54.43,8	152.42.10	14	− 4	−0.39. 4,0	− 2,9	− 0,3	
	Août. 2	13.50.11	158. 9.40,5	7.40.56,9	156.56.58	3	− 5	−1.22.54,0	−58,9	− 1,1	107
	Sept. 17	10.50.15	158.23.32,3	10. 6.25,9	156.15.57	58	− 1	0.57.16,8	14,9	4,9	108
	22	10.57.45	165.12.10,0	8. 6.30,2	163.14.59	55	4	1.38.43,4	45,8	1,9	109
	23	10.59.55	166.43.49,4	7.33.37,8	164.51.30	25	5	1.43.33,3	31,7	− 2,4	
1827	Avril. 30	10.22. 2	13. 5.19,2	2.38. 9,7	13. 4. 1	1	0	−2.44.37,4	−38,0	1,6	110
	Juin. 1	11.18.26	58.46.11,7	19.51.24,3	60.48.59	46	13	−0.29.23,4	−30,7	0,6	111
	Juill. 7	13.50.15	132.18.39,8	18.38.12,0	129.38.13	13	0	0.48.44,8	47,1	7,3	112
	18	13.52.15	143.39.13,6	13.11.51,4	141.39.40	34	6	−1. 9.45,1	−41,5	− 2,3	113
	Oct.. 17	12.40.59	215.28.58,6	−15.13.27,3	218.12. 4	6	− 2	−1. 1.40,6	−36,0	− 3,6	114
1828	Oct.. 19	13.14.55	226.42.19,0	−20.19.38,6	229.55.42	39	3	−2.41.33,2	−31,2	− 4,6	115
	21	13.15.54	228.55.28,0	−21. 1.51,1	232. 7. 8	8	0	−2.48.48,1	−51,0	− 2,0	
	22	13.16.11	229.58.49,4	−21.20.44,0	233. 9.12	9	3	−2.51.45,5	−46,8	2,9	116
										1,3	

§ VIII.

Équations de condition, déduites des erreurs géocentriques des Tables provisoires.

41. Désignons par L la longitude géocentrique, comptée de l'équinoxe moyen; par v_1 la longitude héliocentrique réduite à l'écliptique. La variation de L, correspondante à de petites variations dv_1 et δr_1 des coordonnées héliocentriques dans l'écliptique, sera donnée par la formule

$$\delta \mathrm{L} = \frac{r_1}{\Delta_1} \cos (v_1 - \mathrm{L})\, \delta v_1 + \frac{\sin (v_1 - \mathrm{L})}{\Delta_1}\, \delta r_1,$$

Δ_1 étant la distance accourcie à la Terre.

L'expression de r_1 étant égale à $r \cos \lambda$, on obtiendra, en ayant égard à la variation de la latitude,

$$\delta r_1 = \delta r - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \lambda\, \delta r - r \sin \lambda\, \delta \lambda.$$

Or on reconnaît, à la grandeur des erreurs en longitude et en latitude, que les deux derniers termes de cette formule ne peuvent influer sur la valeur de δL. En sorte qu'on peut réduire δr_1 à δr.

On conclut v de v_1 par la formule suivante :

$$v_1 = v - \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} \varphi \sin 2 (v - \theta),$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \delta v_1 = \delta v &- 2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} \varphi \cos 2 (v - \theta)\, \delta v - \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} \varphi \sin 2 (v - \theta)\, \delta \varphi \\ &+ 2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} \varphi \cos 2 (v - \theta)\, \delta \theta. \end{aligned}$$

L'influence des trois derniers termes sur δL est insensible, et l'on peut réduire ainsi δv_1 à δv. En posant donc, pour abréger,

$$\frac{r_1}{\Delta_1} \cos (v_1 - \mathrm{L}) = \alpha,$$

$$\frac{\sin (v_1 - \mathrm{L})}{\Delta_1} = \beta,$$

on aura simplement

$$\delta L = \alpha\delta v + \beta\delta r.$$

42. Le demi-grand axe est assez bien connu, par l'approximation qu'on possède du moyen mouvement, pour qu'il soit inutile de le faire varier dans l'expression de δr.

Soient, en désignant l'anomalie moyenne par z,

$$M = -a\left\{\left(e - \frac{3}{8}e^3\right)\sin z + \left(e^2 - \frac{2}{3}e^4\right)\sin 2z + \frac{9}{8}e^3 \sin 3z + \frac{4}{3}e^4 \sin 4z\right\},$$

$$N = a\left\{e - \left(1 - \frac{9}{8}e^2\right)\cos z - \left(e - \frac{4}{3}e^3\right)\cos 2z - \frac{9}{8}e^2 \cos 3z - \frac{4}{3}e^3 \cos 4z\right\};$$

on aura pour la variation du rayon, en fonction des corrections δn, $\delta\varepsilon$, δe et $\delta\varpi$, du moyen mouvement annuel, de la longitude de l'époque, de l'excentricité, et de la longitude du périhélie,

$$\delta r = -Mt.\delta n - M\delta\varepsilon + M\delta\varpi + N\delta e;$$

t est le temps, compté en années juliennes, à partir du 1[er] janvier 1800 : δe s'obtiendra en secondes de degré, comme δn, $\delta\varepsilon$ et $\delta\varpi$.

Posons de même,

$$P = -\left(2e - \frac{1}{4}e^3\right)\cos z - \left(\frac{5}{2}e^2 - \frac{11}{12}e^4\right)\cos 2z - \frac{13}{4}e^3 \cos 3z - \frac{103}{24}e^4 \cos 4z,$$

$$Q = -\left(2 - \frac{3}{4}e^2\right)\sin z - \left(\frac{5}{2}e - \frac{11}{6}e^3\right)\sin 2z - \frac{13}{4}e^2 \sin 3z - \frac{103}{24}e^3 \sin 4z,$$

et nous obtiendrons l'expression suivante de la correction de la longitude héliocentrique v,

$$\delta v = (1 - P)t.\delta n + (1 - P)\delta\varepsilon + P\delta\varpi - Q\delta e.$$

43. Substituant les valeurs de δr et de δv dans l'expression de δL, et écrivant

$$P\alpha + M\beta = H,$$
$$-Q\alpha + N\beta = K,$$

nous aurons l'équation

$$\delta L = (\alpha - H)t.\delta n + (\alpha - H)\delta\varepsilon + K\delta e + H\delta\varpi.$$

Par la variation des éléments, la longitude tabulaire doit devenir égale à la longitude observée L'. On a donc la relation

$$L + \delta L - L' = o,$$

qui, en y mettant pour δL sa valeur, fournit l'équation de condition suivante, entre l'erreur $L - L'$ des Tables en longitude, et les corrections des éléments elliptiques,

$$(\alpha - H)\, t.\delta n + (\alpha - H)\,\delta\varepsilon + K\delta e + H\delta\varpi + (L - L') = o.$$

44. Les erreurs $L - L'$ sont assez petites, pour qu'on puisse les considérer, pendant plusieurs jours consécutifs, comme variant proportionnellement au temps. Et l'approximation, qui suffit pour les coefficients $(\alpha - H)\,t$, $\alpha - H$, H et K, autorise à les considérer aussi comme variant proportionnellement au temps pendant les mêmes jours. Cette remarque permet, quand on a plusieurs observations consécutives, d'en déduire l'erreur moyenne, correspondante à la moyenne des temps des observations, et ainsi de n'avoir qu'une seule équation de condition, qu'on calcule avec la position moyenne de la planète. Bien entendu qu'il faudra ensuite donner à l'équation dont la constante aura été déterminée par quatre observations, par exemple, une influence quadruple de celle qu'on accordera à l'équation qui ne correspond qu'à une seule observation.

Les accolades qui, dans les tableaux nos **38** et **40**, embrassent plusieurs erreurs consécutives en longitude, indiquent celles de ces erreurs qui correspondent à une même équation de condition. En face de l'accolade, dans la dernière colonne de ces tableaux, se trouve un numéro d'ordre qu'on a répété en avant de chacune des équations de condition suivantes.

48. *Équations de condition, déduites des erreurs géocentriques des Tables provisoires, en longitude.*

Nos d'ordre.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.
1	1	$0{,}17\,\delta n + 0{,}142\,\delta\varepsilon - 0{,}343\,\delta e - 0{,}053\,\delta\varpi - 3'',0 = 0$
2	3	$0{,}36 + 0{,}246 + 0{,}348 - 0{,}073 + 2{,}3 = 0$
3	5	$0{,}17 + 0{,}118 + 0{,}343 - 0{,}049 + 2{,}8 = 0$
4	2	$0{,}02 + 0{,}014 + 0{,}353 - 0{,}056 + 9{,}0 = 0$
5	6	$-0{,}24 - 0{,}149 + 0{,}547 - 0{,}026 + 2{,}5 = 0$
6	5	$0{,}13 + 0{,}082 + 0{,}330 - 0{,}048 + 3{,}6 = 0$
7	1	$0{,}30 + 0{,}183 + 0{,}331 - 0{,}063 - 2{,}5 = 0$
8	2	$0{,}44 + 0{,}259 + 0{,}431 - 0{,}062 + 5{,}0 = 0$
11	3	$0{,}29 + 0{,}120 + 0{,}242 - 0{,}071 + 3{,}7 = 0$
12	2	$0{,}17 + 0{,}070 + 0{,}229 - 0{,}072 + 5{,}0 = 0$
13	4	$-0{,}03 - 0{,}013 + 0{,}226 - 0{,}085 + 5{,}2 = 0$
14	2	$-0{,}42 - 0{,}167 + 0{,}295 - 0{,}121 + 4{,}5 = 0$
16	4	$-0{,}57 - 0{,}220 + 0{,}047 + 0{,}111 - 4{,}2 = 0$
17	4	$0{,}54 + 0{,}205 + 0{,}253 - 0{,}079 + 4{,}8 = 0$
18	4	$0{,}75 + 0{,}282 + 0{,}367 - 0{,}083 + 6{,}0 = 0$
19	4	$0{,}60 + 0{,}223 + 0{,}424 + 0{,}057 - 0{,}2 = 0$
20	3	$0{,}53 + 0{,}194 + 0{,}314 + 0{,}075 - 3{,}3 = 0$
21	3	$0{,}45 + 0{,}165 + 0{,}212 + 0{,}083 - 2{,}0 = 0$
22	2	$0{,}10 + 0{,}037 + 0{,}081 + 0{,}079 - 1{,}5 = 0$
23	1	$-0{,}19 - 0{,}067 + 0{,}143 + 0{,}082 + 1{,}0 = 0$
24	2	$0{,}96 + 0{,}267 + 0{,}208 - 0{,}098 + 3{,}5 = 0$
25	1	$0{,}75 + 0{,}204 + 0{,}418 + 0{,}051 - 3{,}0 = 0$
26	3	$1{,}17 + 0{,}258 + 0{,}057 - 0{,}103 + 4{,}0 = 0$
27	1	$0{,}79 + 0{,}170 + 0{,}407 + 0{,}043 - 1{,}0 = 0$
28	2	$0{,}30 + 0{,}064 + 0{,}314 + 0{,}053 + 0{,}0 = 0$
29	2	$-0{,}09 - 0{,}019 + 0{,}331 + 0{,}052 - 2{,}5 = 0$
31	4	$1{,}56 + 0{,}296 - 0{,}211 - 0{,}105 + 3{,}0 = 0$
32	2	$1{,}23 + 0{,}221 + 0{,}485 - 0{,}005 - 0{,}5 = 0$
33	1	$0{,}87 + 0{,}155 + 0{,}432 + 0{,}020 - 3{,}0 = 0$
34	2	$-0{,}02 - 0{,}003 + 0{,}400 + 0{,}027 + 3{,}0 = 0$
35	1	$0{,}98 + 0{,}169 + 0{,}454 - 0{,}007 + 0{,}0 = 0$
36	2	$1{,}32 + 0{,}228 + 0{,}508 + 0{,}021 + 4{,}0 = 0$

Suite des équations de condition, déduites des erreurs des Tables provisoires, en longitude.

Nos d'ordre.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.				
37	2	0,21 δn	+ 0,034 $\delta \varepsilon$	− 0,319 δe	− 0,097 $\delta \varpi$	+ 1″,5 = 0
38	1	1,97	+ 0,305	− 0,139	− 0,112	+ 7,0 = 0
39	1	1,42	+ 0,217	+ 0,456	− 0,028	+ 1,0 = 0
40	1	0,59	+ 0,087	+ 0,390	− 0,022	+ 1,0 = 0
41	2	1,36	+ 0,199	+ 0,043	+ 0,100	− 7,0 = 0
42	2	− 0,32	− 0,044	− 0,427	− 0,039	+ 0,0 = 0
43	5	1,36	+ 0,184	− 0,324	− 0,060	+ 0,8 = 0
44	1	2,19	+ 0,293	+ 0,365	− 0,084	+ 8,0 = 0
45	2	1,79	+ 0,240	+ 0,399	− 0,060	+ 4,5 = 0
46	5	0,89	+ 0,118	+ 0,387	− 0,035	+ 1,2 = 0
47	3	0,04	+ 0,005	+ 0,402	− 0,038	+ 0,3 = 0
49	4	− 0,72	− 0,088	− 0,482	− 0,010	− 5,0 = 0
50	2	1,32	+ 0,158	− 0,402	− 0,036	− 3,0 = 0
51	4	2,39	+ 0,286	− 0,397	− 0,077	+ 2,2 = 0
52	3	− 1,78	− 0,209	+ 0,443	− 0,110	+ 1,0 = 0
54	1	1,97	+ 0,225	+ 0,409	+ 0,065	− 1,0 = 0
55	1	1,65	+ 0,188	+ 0,226	+ 0,086	− 4,0 = 0
56	1	2,42	+ 0,257	+ 0,186	− 0,096	+ 5,0 = 0
57	1	1,50	+ 0,159	+ 0,201	− 0,079	+ 4,0 = 0
58	1	2,68	+ 0,259	+ 0,059	− 0,104	+ 4,0 = 0
59	1	0,89	+ 0,086	+ 0,045	− 0,086	+ 4,0 = 0
60	1	− 1,35	− 0,130	− 0,057	− 0,125	− 3,0 = 0
61	4	2,60	+ 0,244	+ 0,509	+ 0,015	− 1,5 = 0
62	2	1,10	+ 0,100	− 0,407	+ 0,023	− 3,5 = 0
63	1	2,24	+ 0,200	− 0,449	+ 0,036	− 9,0 = 0
64	2	2,69	+ 0,240	− 0,511	+ 0,011	− 5,0 = 0
65	2	2,86	+ 0,254	− 0;524	+ 0,001	− 0,5 = 0
66	4	0,02	+ 0,002	+ 0,360	+ 0,043	− 0,5 = 0
67	3	− 0,91	− 0,078	+ 0,411	+ 0,041	− 2,0 = 0
68	1	2,90	+ 0,231	+ 0,485	− 0,020	+ 1,0 = 0
69	1	2,22	+ 0,176	+ 0,452	+ 0,002	+ 4,0 = 0
70	2	− 1,58	− 0,125	+ 0,517	+ 0,007	+ 5,5 = 0
71	1	3,40	+ 0,251	+ 0,436	− 0,053	+ 4,0 = 0

Suite des équations de condition, déduites des erreurs des Tables provisoires, en longitude.

Nos d'ordre.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.
72	3	$-0,01\ \delta n - 0,001\ \delta\varepsilon + 0,427\ \delta e - 0,019\ \delta\varpi + 1'',7 = 0$
73	1	$-0,99 - 0,073 + 0,471 - 0,022 + 1,0 = 0$
74	1	$2,65 + 0,193 + 0,420 - 0,041 + 0,0 = 0$
75	1	$3,26 + 0,188 + 0,031 - 0,091 + 5,0 = 0$
76	1	$-2,35 - 0,126 + 0,490 + 0,028 - 6,0 = 0$
77	4	$1,79 + 0,093 - 0,227 - 0,071 - 1,0 = 0$
78	1	$2,83 + 0,140 - 0,292 - 0,064 + 0,0 = 0$
79	1	$3,26 + 0,160 - 0,306 - 0,063 + 1,0 = 0$
80	2	$5,48 + 0,267 + 0,401 - 0,069 + 9,0 = 0$
81	2	$2,30 + 0,112 + 0,396 - 0,030 + 0,0 = 0$
82	1	$4,19 + 0,195 + 0,328 - 0,064 + 14,0 = 0$
83	3	$1,38 + 0,064 + 0,323 - 0,049 - 0,3 = 0$
84	1	$1,27 + 0,058 + 0,238 + 0,067 + 1,0 = 0$
85	1	$3,14 + 0,142 - 0,412 - 0,028 + 2,0 = 0$
86	1	$-2,04 - 0,092 - 0,468 + 0,011 - 3,0 = 0$
87	1	$4,81 + 0,215 + 0,223 - 0,084 + 6,0 = 0$
88	3	$2,76 + 0,123 + 0,209 - 0,075 + 7,3 = 0$
89	2	$-0,31 - 0,014 + 0,183 - 0,090 + 5,0 = 0$
90	2	$5,40 + 0,232 - 0,496 - 0,010 + 0,5 = 0$
91	2	$0,45 + 0,019 + 0,031 - 0,092 + 5,0 = 0$
92	2	$6,01 + 0,254 + 0,525 + 0,009 + 3,5 = 0$
93	2	$5,64 + 0,238 + 0,502 + 0,023 + 4,0 = 0$
94	3	$4,69 + 0,198 + 0,418 + 0,048 + 1,3 = 0$
95	4	$3,94 + 0,166 + 0,349 + 0,059 + 0,7 = 0$
96	2	$7,76 + 0,319 - 0,176 - 0,113 + 0,5 = 0$
97	2	$4,72 + 0,194 - 0,021 - 0,093 + 6,0 = 0$
98	1	$6,35 + 0,259 + 0,023 - 0,104 + 7,0 = 0$
99	2	$8,00 + 0,326 + 0,188 - 0,113 + 9,5 = 0$
100	2	$6,35 + 0,258 + 0,519 - 0,013 + 1,0 = 0$
101	2	$3,23 + 0,131 + 0,374 + 0,044 - 1,5 = 0$
102	3	$7,93 + 0,314 - 0,324 - 0,098 + 2,3 = 0$
103	3	$7,00 + 0,277 - 0,213 - 0,099 + 3,7 = 0$
104	2	$-1,28 - 0,050 + 0,447 + 0,014 + 0,0 = 0$

Suite des équations de condition, déduites des erreurs des Tables provisoires, en longitude.

Nos d'ordre.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.					
105	3	8,40 δn	+ 0,317 $\delta \varepsilon$	+ 0,383 δe	− 0,089 $\delta \varpi$	+ 5″,7	= 0
106	1	4,70	+ 0,177	+ 0,434	− 0,023	+ 4,0	= 0
107	2	2,02	+ 0,076	+ 0,412	− 0,011	− 3,5	= 0
108	1	0,03	+ 0,001	+ 0,430	− 0,014	− 5,0	= 0
109	1	1,44	+ 0,054	+ 0,387	− 0,022	− 1,0	= 0
110	2	5,00	+ 0,187	+ 0,422	− 0,038	+ 4,5	= 0
111	1	− 2,36	− 0,086	− 0,401	− 0,073	+ 0,0	= 0
112	1	9,02	+ 0,329	− 0,232	− 0,111	+13,0	= 0
113	1	2,95	+ 0,107	+ 0,367	− 0,042	+ 0,0	= 0
114	1	− 1,60	− 0,058	+ 0,414	− 0,056	+ 6,0	= 0
115	1	5,47	+ 0,197	+ 0,185	+ 0,092	− 2,0	= 0
116	3	1,38	+ 0,048	+ 0,042	+ 0,081	+ 2,0	= 0
117	1	10,50	+ 0,289	− 0,497	− 0,051	+ 8,1	= 0
118	4	9,93	+ 0,273	+ 0,085	− 0,106	+ 9,0	= 0
119	4	6,65	+ 0,183	+ 0,105	− 0,089	+12,0	= 0
120	1	− 0,18	− 0,005	+ 0,245	− 0,078	+ 4,9	= 0
121	1	7,67	+ 0,210	+ 0,134	− 0,092	+11,2	= 0
122	2	8,43	+ 0,230	+ 0,485	+ 0,031	+ 4,9	= 0
123	1	1,21	+ 0,033	+ 0,218	+ 0,070	− 1,8	= 0
124	2	5,46	+ 0,148	+ 0,409	+ 0,038	− 0,4	= 0
125	1	3,94	+ 0,106	− 0,342	+ 0,051	− 2,7	= 0
126	2	9,68	+ 0,260	− 0,526	− 0,009	+ 3,8	= 0
127	1	− 5,27	− 0,141	− 0,212	− 0,119	+ 0,7	= 0
128	2	1,50	+ 0,040	+ 0,084	− 0,086	+ 2,1	= 0
129	1	10,57	+ 0,281	+ 0,530	− 0,030	+ 7,0	= 0
130	3	8,24	+ 0,219	+ 0,485	+ 0,017	+ 7,3	= 0
131	4	6,18	+ 0,164	+ 0,404	+ 0,041	+ 2,2	= 0
132	2	0,56	+ 0,015	+ 0,329	+ 0,050	− 0,9	= 0
133	2	− 9,71	− 0,257	+ 0,583	+ 0,053	+ 1,2	= 0
134	1	−16,04	− 0,425	+ 0,616	+ 0,122	−10,3	= 0
135	2	7,98	+ 0,211	+ 0,465	+ 0,039	+ 3,8	= 0
136	1	6,64	+ 0,175	− 0,245	+ 0,080	+ 0,2	= 0
137	2	3,31	+ 0,087	− 0,373	+ 0,038	− 1,6	= 0

Suite des équations de condition, déduites des erreurs des Tables provisoires, en longitude.

Nos d'ordre.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.				
138	1	$-\ 2,90\ \delta n$	$-\ 0,076\ \delta\varepsilon$	$-\ 0,269\ \delta e$	$+\ 0,071\ \delta\varpi$	$-\ 9'',8 = 0$
139	1	$6,47$	$+\ 0,170$	$-\ 0,336$	$+\ 0,064$	$-\ 4,5 = 0$
141	1	$10,57$	$+\ 0,277$	$-\ 0,550$	$-\ 0,010$	$+11,5 = 0$
142	1	$11,02$	$+\ 0,288$	$-\ 0,214$	$-\ 0,103$	$+10,0 = 0$
143	1	$-12,03$	$-\ 0,313$	$-\ 0,034$	$-\ 0,184$	$+\ 5,8 = 0$
144	1	$-\ 5,08$	$-\ 0,132$	$+\ 0,005$	$-\ 0,125$	$-\ 1,2 = 0$
145	3	$5,11$	$+\ 0,132$	$+\ 0,417$	$+\ 0,020$	$+\ 3,2 = 0$
146	3	$4,02$	$+\ 0,104$	$+\ 0,405$	$+\ 0,023$	$+\ 4,2 = 0$
147	1	$0,77$	$+\ 0,020$	$+\ 0,397$	$+\ 0,025$	$+\ 1,7 = 0$
148	2	$-\ 4,33$	$-\ 0,112$	$+\ 0,492$	$+\ 0,018$	$+\ 1,0 = 0$
149	2	$-\ 8,15$	$-\ 0,211$	$+\ 0,604$	$+\ 0,015$	$-\ 1,3 = 0$
150	2	$-\ 1,43$	$-\ 0,037$	$+\ 0,410$	$+\ 0,017$	$+\ 0,5 = 0$
151	2	$6,98$	$+\ 0,180$	$+\ 0,463$	$-\ 0,010$	$+\ 5,3 = 0$
152	2	$9,04$	$+\ 0,233$	$+\ 0,510$	$+\ 0,020$	$+\ 6,3 = 0$
153	2	$2,50$	$+\ 0,064$	$-\ 0,297$	$+\ 0,058$	$-\ 0,2 = 0$
154	2	$-\ 7,15$	$-\ 0,183$	$-\ 0,247$	$+\ 0,094$	$-12,9 = 0$
155	1	$9,35$	$+\ 0,239$	$-\ 0,477$	$+\ 0,044$	$-\ 3,5 = 0$
156	5	$10,07$	$+\ 0,257$	$-\ 0,522$	$+\ 0,026$	$+\ 1,6 = 0$
157	2	$-\ 3,02$	$-\ 0,077$	$-\ 0,455$	$-\ 0,069$	$+\ 0,4 = 0$
158	3	$1,58$	$+\ 0,040$	$-\ 0,196$	$-\ 0,081$	$+\ 3,4 = 0$
159	1	$7,18$	$+\ 0,182$	$-\ 0,233$	$-\ 0,077$	$+\ 2,5 = 0$
160	3	$10,45$	$+\ 0,265$	$-\ 0,213$	$-\ 0,097$	$+\ 9,0 = 0$
161	2	$12,86$	$+\ 0,326$	$-\ 0,106$	$-\ 0,118$	$+14,6 = 0$
162	2	$8,53$	$+\ 0,216$	$+\ 0,451$	$-\ 0,031$	$+\ 8,3 = 0$
163	1	$1,78$	$+\ 0,045$	$+\ 0,417$	$-\ 0,006$	$+\ 4,0 = 0$
164	2	$-\ 0,87$	$-\ 0,022$	$+\ 0,443$	$-\ 0,010$	$+\ 3,8 = 0$
165	1	$-\ 5,82$	$-\ 0,147$	$+\ 0,550$	$-\ 0,022$	$+\ 5,0 = 0$
166	1	$-\ 3,66$	$-\ 0,092$	$+\ 0,467$	$+\ 0,008$	$+\ 0,4 = 0$
167	1	$-\ 8,02$	$-\ 0,201$	$-\ 0,065$	$+\ 0,108$	$-11,2 = 0$
168	1	$-10,24$	$-\ 0,254$	$-\ 0,536$	$-\ 0,109$	$+\ 0,3 = 0$
169	3	$-\ 5,41$	$-\ 0,134$	$-\ 0,414$	$-\ 0,085$	$+\ 0,5 = 0$
170	2	$13,56$	$+\ 0,336$	$-\ 0,178$	$-\ 0,125$	$+15,8 = 0$
171	2	$13,25$	$+\ 0,327$	$+\ 0,294$	$-\ 0,105$	$+16,4 = 0$

Suite des équations de condition, déduites des erreurs des Tables provisoires, en longitude.

Nos d'ordre.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.				
172	3	11,65 δn	+ 0,288 $\delta \varepsilon$	+ 0,358 δe	− 0,084 $\delta \varpi$	$+15'',4 = 0$
173	2	0,81	+ 0,020	+ 0,386	− 0,041	+ 5,4 = 0
174	1	− 1,46	− 0,036	+ 0,425	− 0,023	− 3,3 = 0
175	1	6,18	+ 0,152	+ 0,350	− 0,053	+ 4,4 = 0
176	2	9,16	+ 0,225	+ 0,358	+ 0,076	+ 3,8 = 0
177	1	8,59	+ 0,211	+ 0,267	+ 0,087	+ 2,9 = 0
178	1	4,61	+ 0,113	+ 0,176	+ 0,069	+ 5,1 = 0
179	1	6,21	+ 0,152	− 0,031	+ 0,093	− 1,9 = 0
180	1	−13,24	− 0,321	− 0,778	+ 0,014	− 6,2 = 0
181	4	5,74	+ 0,139	− 0,407	− 0,030	+ 2,2 = 0
182	1	10,69	+ 0,258	− 0,416	− 0,062	+ 7,4 = 0
183	2	12,16	+ 0,294	− 0,393	− 0,077	+12,1 = 0
184	1	6,76	+ 0,163	+ 0,297	− 0,065	+ 8,2 = 0
185	1	0,17	+ 0,004	+ 0,290	− 0,072	+ 1,9 = 0
186	2	4,99	+ 0,120	+ 0,282	− 0,062	+ 5,0 = 0
187	1	14,00	+ 0,336	+ 0,470	− 0,048	+ 6,8 = 0
188	1	− 0,80	− 0,019	+ 0,219	+ 0,069	+ 2,2 = 0
189	1	5,62	+ 0,134	+ 0,280	+ 0,069	− 0,4 = 0
190	2	8,42	+ 0,200	− 0,470	− 0,023	+ 4,0 = 0
191	1	0,59	+ 0,014	− 0,407	− 0,004	+ 0,6 = 0
192	4	5,12	+ 0,121	− 0,427	+ 0,002	− 3,9 = 0
193	4	8,53	+ 0,202	− 0,464	− 0,015	+ 0,8 = 0
194	2	9,98	+ 0,236	− 0,474	− 0,030	+ 3,9 = 0
195	1	13,19	+ 0,311	− 0,439	− 0,077	+ 6,9 = 0
196	3	13,90	+ 0,328	+ 0,038	− 0,119	+13,4 = 0
197	1	4,97	+ 0,117	+ 0,173	− 0,079	+11,8 = 0
198	2	2,42	+ 0,057	+ 0,151	− 0,081	+ 9,0 = 0
199	2	− 1,96	− 0,046	+ 0,134	− 0,099	+ 7,0 = 0
200	3	11,94	+ 0,280	+ 0,288	− 0,093	+12,9 = 0
201	4	13,19	+ 0,309	+ 0,408	− 0,084	+14,6 = 0

46. La latitude héliocentrique λ est donnée par la formule

$$\operatorname{tang}\lambda = \sin(v_1 - \theta)\operatorname{tang}\varphi,$$

qui fournit par la différentiation, en réduisant δv_1 à δv, et en considérant $\cos\lambda$ et $\cos\varphi$ comme égaux à l'unité,

$$\delta\lambda = \sin(v_1 - \theta)\,\delta\varphi - \operatorname{tang}\varphi\cos(v_1 - \theta)\,\delta\theta + \operatorname{tang}\varphi\cos(v_1 - \theta)\,\delta v.$$

En multipliant par $\frac{r_1}{\Delta_1}$ les deux membres, on obtiendra l'expression de la variation $\delta\Lambda$ en latitude géocentrique; et en substituant cette variation dans la relation

$$\Lambda + \delta\Lambda - \Lambda' = 0,$$

Λ' étant la latitude déduite de l'observation, on aura l'équation de condition

$$\begin{aligned}\frac{r_1}{\Delta_1}\sin(v_1 - \theta)\,\delta\varphi - \frac{r_1}{\Delta_1}\operatorname{tang}\varphi\cos(v_1 - \theta)\,\delta\theta + (\Lambda - \Lambda')&\\ + \frac{r_1}{\Delta_1}\operatorname{tang}\varphi\cos(v_1 - \theta)\,\delta v &= 0.\end{aligned}$$

Le dernier terme de cette équation n'est pas toujours négligeable. En sorte qu'en remplaçant δv par sa valeur, n° **42**, on aurait à considérer simultanément les corrections des six constantes n, ε, e, ϖ, φ et θ. J'ai préféré déterminer des valeurs très-approchées des quatre premières corrections au moyen des équations de condition du n° **45**. J'ai pu calculer par leur moyen la correction δv de la longitude héliocentrique, et obtenir ainsi la petite variation qu'il faut apporter à l'erreur en latitude observée, $\Lambda - \Lambda'$, pour n'avoir plus dans les équations que deux inconnues, la correction de l'inclinaison et la correction de la longitude du nœud.

C'est ainsi qu'ont été déterminées les équations de condition suivantes, qu'on trouvera disposées comme celles du n° **45**.

Équations de condition, déduites des erreurs géocentriques des Tables provisoires, en latitude.

Nos d'ordre.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.	Nos d'ordre.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.
1	1	$0,152\,\delta\varphi \quad -0,031\,\delta\theta \quad -5'',0=0$	37	2	$0,379\,\delta\varphi \quad +0,001\,\delta\theta \quad -0'',3=0$
2	3	$0,281 \quad +0,016 \quad +4,1=0$	38	1	$-0,063 \quad -0,031 \quad -1,6=0$
3	5	$0,167 \quad +0,048 \quad -1,5=0$	39	1	$0,194 \quad +0,035 \quad -0,8=0$
4	2	$0,000 \quad +0,064 \quad -4,0=0$	40	1	$0,185 \quad -0,029 \quad -3,3=0$
5	6	$-0,214 \quad -0,043 \quad +0,1=0$	41	2	$-0,211 \quad +0,032 \quad -5,5=0$
6	5	$0,033 \quad -0,038 \quad -2,5=0$	42	3	$0,364 \quad -0,010 \quad -1,0=0$
7	1	$0,143 \quad -0,030 \quad -2,7=0$	43	5	$-0,348 \quad -0,011 \quad +0,8=0$
8	2	$0,233 \quad -0,013 \quad 1,5=0$	45	2	$0,262 \quad +0,023 \quad +4,5=0$
11	3	$0,255 \quad +0,040 \quad -2,1=0$	46	5	$0,105 \quad +0,052 \quad +0,8=0$
12	2	$0,209 \quad +0,050 \quad -1,4=0$	47	3	$-0,100 \quad +0,063 \quad -0,6=0$
13	4	$0,101 \quad +0,063 \quad -3,6=0$	48	3	$-0,092 \quad -0,031 \quad +3,2=0$
14	2	$-0,122 \quad +0,077 \quad -6,7=0$	49	4	$0,333 \quad -0,019 \quad +3,3=0$
16	4	$-0,243 \quad -0,038 \quad -4,3=0$	50	2	$-0,394 \quad +0,008 \quad +8,4=0$
17	4	$0,086 \quad -0,032 \quad -1,5=0$	51	4	$-0,204 \quad -0,024 \quad +2,6=0$
18	4	$0,202 \quad -0,019 \quad -3,7=0$	52	3	$-0,279 \quad +0,073 \quad -2,3=0$
19	4	$0,029 \quad +0,040 \quad -5,4=0$	54	1	$0,023 \quad +0,040 \quad -5,9=0$
20	3	$-0,086 \quad +0,042 \quad -1,3=0$	55	1	$-0,144 \quad +0,040 \quad -3,9=0$
21	3	$-0,192 \quad +0,039 \quad +0,5=0$	56	1	$0,289 \quad -0,001 \quad +2,8=0$
22	2	$-0,405 \quad +0,012 \quad -4,2=0$	57	1	$0,303 \quad +0,025 \quad +1,4=0$
23	1	$-0,435 \quad -0,004 \quad +4,4=0$	58	1	$0,270 \quad -0,009 \quad +2,2=0$
24	2	$0,097 \quad -0,030 \quad -2,6=0$	59	1	$0,333 \quad +0,028 \quad +3,4=0$
25	1	$0,000 \quad +0,043 \quad -1,7=0$	61	4	$0,141 \quad +0,035 \quad -2,8=0$
26	3	$-0,009 \quad -0,033 \quad +0,6=0$	62	1	$-0,157 \quad -0,033 \quad +2,7=0$
27	1	$-0,040 \quad +0,047 \quad -2,7=0$	63	1	$-0,319 \quad +0,022 \quad -3,0=0$
28	2	$-0,291 \quad +0,043 \quad +0,4=0$	64	2	$-0,324 \quad +0,006 \quad -1,1=0$
29	2	$-0,409 \quad +0,031 \quad -0,3=0$	65	2	$-0,310 \quad -0,002 \quad -1,5=0$
31	4	$0,119 \quad -0,028 \quad -1,6=0$	66	4	$-0,362 \quad +0,040 \quad -3,6=0$
32	2	$0,151 \quad +0,038 \quad -6,4=0$	67	3	$-0,448 \quad +0,031 \quad -2,5=0$
33	1	$-0,000 \quad +0,050 \quad -5,7=0$	68	1	$0,191 \quad +0,033 \quad -3,3=0$
34	2	$-0,330 \quad +0,047 \quad -1,3=0$	69	1	$0,080 \quad +0,046 \quad -2,4=0$
35	1	$0,284 \quad -0,005 \quad -4,2=0$	70	2	$-0,452 \quad +0,040 \quad -3,8=0$
36	2	$0,246 \quad +0,018 \quad -3,1=0$	71	1	$0,252 \quad +0,023 \quad +2,0=0$

Suite des équations de condition, déduites des erreurs des Tables provisoires, en latitude.

Nos d'ordre.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.			Nos d'ordre.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.		
72	3	$-0,180\,\delta\varphi$	$+0,061\,\delta\theta$	$-2'',0=0$	106	1	$0,144\,\delta\varphi$	$+0,044\,\delta\theta$	$-3'',0=0$
73	1	$-0,290$	$+0,059$	$-3,9=0$	107	2	$-0,058$	$+0,058$	$-0,9=0$
74	1	$0,236$	$-0,017$	$-1,8=0$	108	1	$-0,196$	$+0,060$	$+4,4=0$
75	1	$0,316$	$+0,001$	$+1,6=0$	109	1	$0,136$	$-0,034$	$+1,0=0$
76	1	$-0,475$	$+0,031$	$+3,0=0$	110	2	$0,240$	$-0,017$	$-0,9=0$
77	4	$0,326$	$-0,009$	$+1,2=0$	111	1	$-0,388$	$+0,055$	$+0,0=0$
79	1	$-0,377$	$-0,007$	$+0,6=0$	112	1	$-0,070$	$-0,030$	$+6,6=0$
80	2	$0,271$	$+0,015$	$-2,4=0$	113	1	$0,114$	$+0,052$	$-1,9=0$
81	2	$0,080$	$+0,053$	$+1,1=0$	114	1	$-0,166$	$+0,067$	$-3,9=0$
82	1	$0,269$	$+0,028$	$+1,4=0$	115	1	$-0,146$	$+0,038$	$-4,9=0$
83	3	$-0,017$	$-0,040$	$-3,4=0$	116	3	$-0,398$	$+0,011$	$+0,7=0$
85	1	$0,020$	$-0,036$	$+3,4=0$	117	1	$-0,249$	$-0,017$	$+3,9=0$
86	1	$0,264$	$-0,029$	$-0,7=0$	118	4	$0,264$	$-0,009$	$+2,4=0$
87	1	$0,306$	$+0,013$	$+3,0=0$	119	4	$0,321$	$+0,011$	$-0,8=0$
88	3	$0,270$	$+0,037$	$+2,6=0$	120	1	$-0,319$	$-0,031$	$+2,9=0$
89	2	$0,143$	$+0,061$	$-1,4=0$	121	1	$-0,015$	$-0,035$	$+5,9=0$
90	2	$-0,337$	$+0,001$	$+0,3=0$	122	2	$0,091$	$+0,039$	$-0,7=0$
91	2	$0,293$	$+0,043$	$+1,3=0$	123	1	$-0,386$	$+0,027$	$-0,8=0$
92	2	$0,163$	$+0,032$	$-1,9=0$	124	2	$0,285$	$+0,016$	$+0,3=0$
93	2	$0,121$	$+0,037$	$-1,1=0$	125	1	$-0,207$	$+0,048$	$-2,9=0$
94	3	$-0,003$	$+0,044$	$-1,3=0$	126	2	$-0,303$	$-0,005$	$+0,7=0$
95	4	$-0,113$	$+0,045$	$-1,9=0$	127	1	$0,284$	$+0,058$	$+1,1=0$
96	2	$0,116$	$-0,027$	$+6,8=0$	128	2	$-0,364$	$-0,023$	$-0,7=0$
97	2	$0,306$	$-0,005$	$-2,3=0$	129	1	$0,230$	$+0,021$	$-0,1=0$
98	1	$-0,033$	$-0,033$	$+1,9=0$	130	3	$0,106$	$+0,040$	$-0,7=0$
99	2	$0,135$	$-0,025$	$+2,1=0$	131	4	$-0,048$	$+0,048$	$-3,6=0$
100	2	$0,187$	$+0,031$	$+1,3=0$	132	2	$-0,364$	$+0,038$	$-0,7=0$
101	2	$-0,122$	$+0,049$	$+3,1=0$	133	2	$-0,533$	$+0,003$	$+0,5=0$
102	3	$0,030$	$-0,030$	$+7,2=0$	134	1	$0,029$	$-0,051$	$+3,7=0$
103	3	$0,137$	$-0,027$	$+6,0=0$	135	2	$0,229$	$+0,024$	$+0,4=0$
104	2	$-0,374$	$+0,046$	$+1,0=0$	136	1	$-0,308$	$+0,010$	$-4,2=0$
105	4	$0,260$	$+0,001$	$+1,5=0$	137	2	$-0,213$	$-0,030$	$-1,3=0$

Suite des équations de condition, déduites des erreurs des Tables provisoires, en latitude.

Nos d'ordre.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.			Nos d'ordre.	NOMBRE d'observations.	ÉQUATIONS DE CONDITION.		
138	1	$0,194\,\delta\varphi$	$+0,053\,\delta\theta$	$-0'',6=0$	170	2	$-0,092\,\delta\varphi$	$-0,030\,\delta\theta$	$+3'',0=0$
139	1	$-0,248$	$+0,036$	$+5,2=0$	171	2	$0,250$	$-0,006$	$+1,9=0$
141	1	$-0,280$	$-0,009$	$-3,5=0$	172	3	$0,274$	$+0,007$	$+0,6=0$
142	1	$0,128$	$-0,027$	$+2,5=0$	173	2	$-0,054$	$+0,063$	$-1,5=0$
143	1	$-0,552$	$+0,055$	$-5,3=0$	174	1	$-0,037$	$-0,043$	$+1,8=0$
144	1	$-0,551$	$+0,022$	$+1,5=0$	175	1	$0,148$	$-0,030$	$+0,1=0$
145	3	$-0,052$	$+0,052$	$-0,4=0$	176	2	$0,000$	$+0,039$	$-2,3=0$
146	3	$-0,115$	$+0,053$	$-3,0=0$	177	1	$-0,075$	$+0,040$	$-0,5=0$
147	1	$-0,284$	$+0,050$	$-2,1=0$	178	1	$-0,232$	$+0,033$	$-2,9=0$
148	2	$-0,452$	$+0,037$	$-2,7=0$	179	1	$-0,308$	$+0,024$	$+0,7=0$
149	2	$-0,526$	$+0,026$	$+0,5=0$	181	4	$-0,401$	$+0,015$	$+0,4=0$
150	2	$0,179$	$-0,034$	$+3,5=0$	182	1	$-0,270$	$-0,018$	$+0,9=0$
151	2	$0,283$	$-0,004$	$-0,6=0$	183	2	$-0,180$	$-0,025$	$+2,1=0$
152	2	$0,242$	$+0,019$	$+2,0=0$	184	1	$0,262$	$+0,033$	$+1,3=0$
153	2	$-0,277$	$-0,025$	$+0,0=0$	185	1	$0,063$	$+0,063$	$-0,4=0$
154	2	$0,367$	$+0,033$	$-1,6=0$	186	2	$0,021$	$-0,037$	$+4,8=0$
155	1	$-0,306$	$+0,011$	$+0,8=0$	187	1	$0,086$	$+0,037$	$+1,0=0$
156	5	$-0,303$	$+0,003$	$-0,1=0$	188	1	$0,351$	$+0,008$	$-1,1=0$
157	2	$0,362$	$+0,008$	$+2,3=0$	189	1	$0,220$	$+0,032$	$+0,8=0$
158	3	$-0,470$	$+0,008$	$-1,8=0$	190	2	$-0,106$	$-0,032$	$+3,4=0$
159	1	$-0,314$	$-0,019$	$-4,1=0$	191	1	$0,147$	$-0,035$	$-0,6=0$
160	3	$-0,166$	$-0,029$	$+1,6=0$	192	4	$-0,356$	$+0,032$	$-3,4=0$
161	2	$-0,018$	$-0,031$	$+1,4=0$	193	4	$-0,361$	$+0,006$	$-0,7=0$
162	2	$0,199$	$+0,035$	$+0,9=0$	194	2	$-0,330$	$-0,004$	$+0,9=0$
163	1	$-0,136$	$+0,058$	$-7,0=0$	195	1	$-0,182$	$-0,024$	$-6,1=0$
164	2	$-0,250$	$+0,058$	$-5,5=0$	196	3	$0,194$	$-0,019$	$+3,5=0$
165	1	$-0,424$	$+0,050$	$-4,1=0$	197	1	$0,292$	$+0,033$	$+1,8=0$
166	1	$0,031$	$-0,043$	$+4,5=0$	198	2	$0,252$	$+0,046$	$-2,1=0$
167	1	$-0,190$	$-0,042$	$+0,9=0$	199	2	$0,148$	$+0,064$	$+1,7=0$
168	1	$-0,279$	$+0,077$	$-1,0=0$	200	3	$0,159$	$-0,024$	$+2,2=0$
169	4	$-0,382$	$+0,060$	$-2,3=0$	201	4	$0,226$	$-0,012$	$+2,2=0$

§ IX.

Des passages de Mercure sur le Soleil.

47. Les observations des passages de Mercure, sur le Soleil, sont les seules données dont nous puissions profiter, pour avoir des positions exactes de la planète à des époques un peu éloignées de nous. Plusieurs causes, toutefois, peuvent entacher ces observations d'erreurs assez grandes; et je ne crois pas qu'on puisse les admettre toutes sans discussion.

L'observation du premier contact extérieur est toujours très-incertaine; celle du second contact extérieur est, au contraire, assez juste. J'ai préféré, toutefois, n'employer que les observations des deux contacts intérieurs. Elles jouissent, en général, d'une grande précision, ainsi qu'on le reconnaît en comparant les observations d'un même passage, faites par différents astronomes. Il est bien entendu que je ne parle que des observations faites directement au moyen des lunettes. L'emploi de l'image solaire, pour reconnaître l'instant de l'entrée ou celui de la sortie, est un procédé détestable, qui peut laisser des incertitudes de 4 ou 5 minutes de temps.

Lorsque l'observation a été faite dans un grand observatoire, on peut regarder l'heure de la pendule comme exacte; mais en est-il toujours de même, quand le passage n'a été vu que dans une contrée lointaine, et par un observateur dont le nom n'est connu qu'à l'occasion de ce passage? En outre, on dépend complétement de la longitude du lieu de l'observateur, qui souvent ne l'a pas connue lui-même d'une manière exacte. Et alors, en recourant aux observations modernes pour la déterminer, on peut s'exposer quelquefois, faute de renseignements suffisants, à appliquer à un lieu une longitude qui convient à un autre.

Enfin nous ne pouvons, en général, déterminer le lieu du Soleil, pour le calcul d'un passage, que par l'emploi des Tables, dont les erreurs ne sont malheureusement pas toujours aussi faibles qu'on pourrait le désirer. J'ai fait usage des Tables solaires de Delambre, auxquelles j'ai appliqué les corrections suivantes :

1°. J'ai corrigé la Table XV, qui donne l'équation lunaire de la longitude, en réduisant le maximum de la perturbation à $6'',7$, au lieu de $7'',5$ que suppose la Table. J'ai corrigé dans le même rapport le maximum de la perturbation lunaire du rayon vecteur, donnée par la Table XXIV.

2°. Dans l'emploi des Tables XVI et XXV, qui donnent les perturbations produites par Vénus, j'ai réduit la masse de cette planète à celle qui a été déterminée par Burckardt.

3°. J'ai appliqué à la longitude vraie du Soleil et au logarithme du rayon vecteur les corrections suivantes :

$$\begin{aligned}\delta\odot &= 2'',61 - 1'',33 \cos\odot + 1'',90 \sin\odot \\ &\quad + (0'',1448 - 0'',0047 \cos\odot - 0'',0200 \sin\odot) \times t,\\ \delta \log R &= -20,0 \cos\odot - 14,0 \sin\odot \\ &\quad + (0,211 \cos\odot - 0,050 \sin\odot) \times t;\end{aligned}$$

t est le temps compté à partir de 1800. L'unité, dans la correction du logarithme du rayon vecteur, est la septième décimale.

48. Supposons qu'on ait observé un contact intérieur à l'instant T, temps moyen de l'Observatoire de Paris; et cherchons la correction τ qu'on doit apporter à ce temps pour avoir l'instant apparent, tel qu'il eût été indiqué par les Tables provisoires.

Soient, à cet effet, l et s la longitude et la latitude géocentriques de Mercure pour le temps T, affectées de l'aberration et de la parallaxe. Désignons par $\odot$ et σ les données correspondantes pour le Soleil. Appelons m et n les mouvements relatifs de Mercure en longitude et en latitude, et c la différence des demi-diamètres apparents du Soleil et de Mercure pour l'instant de l'observation. Si nous posons

$$(l - \odot + mt)^2 + (s - \sigma + nt)^2 = c^2,$$

la plus petite des racines de cette équation nous fera connaître l'instant τ de la phase apparente, compté à partir du temps T, et tel qu'il serait fourni par les Tables.

La différence τ entre le calcul et l'observation est une erreur des Tables qu'il s'agit de corriger, en supposant le lieu du Soleil exact, mais en attribuant à la longitude l de Mercure, à sa latitude s, et à la constante c, des corrections convenables, δs, δl et δc. La variation correspondante du temps, fournie par l'équation précédente, devra être égale à $(-\tau)$; en sorte qu'on aura l'équation de condition

$$\delta l + \frac{s-\sigma}{l-\odot}\delta s - \frac{c}{l-\odot}\delta c - \left\{m + n\frac{s-\sigma}{l-\odot}\right\}.\tau = 0.$$

En la multipliant par $-\frac{\Delta_1}{r_1}$, remarquant que $-\frac{\Delta_1}{r_1}\delta l$ est la correction de la longitude héliocentrique, et que $\frac{\Delta_1}{r_1}\delta s$ est la correction de la latitude héliocentrique, il viendra

$$\delta v - \frac{s-\sigma}{l-\odot}\delta\lambda + \frac{\Delta_1}{r_1}\frac{c}{l-\odot}\delta c + \frac{\Delta_1}{r_1}\left\{m + n\frac{s-\sigma}{l-\odot}\right\}.\tau = 0.$$

J'ai employé, pour le calcul de cette équation, le demi-diamètre du Soleil, tel que Delambre le suppose dans ses Tables, mais en le diminuant de 3″,6, comme cet auteur le prescrit pour le calcul des éclipses de Soleil. J'ai supposé le demi-diamètre de Mercure égal à 3″,23 à la distance moyenne (n° **7**).

Passage du 5 *mai* 1832.

49. M. Bessel, qui l'a observé à Kœnigsberg, fixe le premier contact intérieur à $10^h 24^m 38^s,8$, temps moyen de son observatoire ; et le second contact intérieur à $17^h 7^m 38^s,0$.

La longitude de l'observatoire de M. Bessel est de $1^h 12^m 39^s$ à l'est de l'Observatoire de Paris ; sa latitude est de 54°42′50″ au nord.

Avec ces données, on obtient les résultats suivants :

	Premier contact.	Deuxième contact.
Temps moyen de Paris.	$9^h 11^m 59^s,8$	$15^h 54^m 59^s,0$
Longitude géocentrique l de Mercure.	45° 2′ 0″,1	44° 51′ 27″,4
Latitude géocentrique s de Mercure. .	10. 10″,2	5. 21″,0
Longitude $\odot$ du Soleil.	44.50. 7″,9	45. 6. 15″,8
Latitude σ du Soleil.	— 6″,2	— 5″,2
Distance c des centres.	943″,0	
Erreur tabulaire τ.	— $20^s,6$	— $58^s,1$

et on en déduit les deux équations de condition

Entrée. . . . . . . $\delta v - 0,87\ \delta\lambda + 1,63\ \delta c + 1'',9 = 0,$
Sortie . . . . $\delta v + 0,37\ \delta\lambda - 1,30\ \delta c + 4'',4 = 0.$

Si l'on multiplie la seconde par $\frac{3}{2}$, et qu'on ajoute le résultat avec la première, on aura l'équation suivante :

$$\delta v = -3'',4 + 0,13\,\delta\lambda + 0,13\,\delta c.$$

$\delta\lambda$ et δc ne pouvant avoir qu'une très-légère influence sur le second membre, la constante $-3'',4$ représente sensiblement la correction de la longitude héliocentrique tabulaire.

Passage du 9 novembre 1802.

50. C'est le dernier dont Lalande, qui s'est occupé si longtemps de Mercure, ait pu faire usage. « Je l'ai observé, dit cet illustre astronome, » avec délices, dans le même endroit où il le fut pour la première fois » par Gassendi, l'un de mes plus illustres prédécesseurs au Collége de » France. » On n'a vu à Paris que la sortie. Voici les instants obtenus pour le second contact intérieur, par six observateurs : ils sont tous en temps vrai, réduit au méridien de l'Observatoire.

	Temps vrai du deuxième contact interne.		
Lalande.	$12^h 6^m 29^s$	Moyenne des six observations.	$12^h\ 6^m 44^s$
Messier..	12.6.49	Équation du temps.	11.44. 2
Lalande neveu.	12.6.44	Temps moyen de l'observat. .	11.50.46
Bouvard.	12.6.54		
Méchain.	12.6.45		
Burckardt.	12.6.45		

J'ai déduit de cette observation les résultats suivants :

Longitude géocentrique l de Mercure.	$226^o\ 8'\ 5'',4$
Latitude géocentrique s de Mercure.	3. 12 ,1
Longitude $\odot$ du Soleil.	226.23. 58 ,3
Latitude σ du Soleil	— 7 ,3
Distance c des centres.	962 ,9
Erreur tabulaire τ.	$-108^s,0$

$$\delta v + 0,21\ \delta\lambda - 2,20\ \delta c + 23'',3 = 0.$$

L'erreur de la distance des centres a trop d'influence dans cette équation pour qu'on puisse l'employer seule au calcul de δv.

Passage du 7 mai 1799.

51. Il a été observé complétement par Delambre. J'ai déduit de son observation les résultats suivants :

	Premier contact.	Deuxième contact.
Temps moyen de Paris.	$9^h\,20^m\;9^s,8$	$16^h\,38^m\;4^s,4$
Longitude géocentrique l de Mercure.	$47^\circ\;0'\;22'',3$	$46^\circ\,49'\;3'',3$
Latitude géocentrique s de Mercure.	$-\,3.\;7,2$	$-\,8.\;22,1$
Longitude $\odot$ du Soleil.	$46.44.\;53,6$	$47.\;2.\;22,5$
Latitude σ du Soleil.	$-\;5,6$	$-\;3,7$
Distance c des centres.	$942,4$	
Erreur tabulaire τ	$62^s,9$	$9^s,6$

d'où les équations de condition

$$\text{Entrée.} \ldots\ldots \quad \delta v + 0{,}20\,\delta\lambda + 1{,}25\,\delta c - 4'',9 = 0,$$

$$\text{Sortie.} \ldots\ldots \quad \delta v - 0{,}62\,\delta\lambda - 1{,}44\,\delta c - 0'',9 = 0.$$

La première, multipliée par $\frac{3}{2}$, puis ajoutée avec la seconde, donne

$$\delta v = 3'',3 + 0{,}13\,\delta\lambda - 0{,}17\,\delta c.$$

La constante du second membre est sensiblement la correction de la longitude tabulaire.

Passage du 5 novembre 1789.

52. Le premier contact interne a été observé, à Paris, par Cassini, Delambre, Messier et Méchain. Voici les résultats de leurs observations en temps vrai :

Cassini	$13^h\,19^m\,5^s,8$		
Delambre.	$13.19.\;2,0$	Moyenne des observations. .	$13^h\,19^m\;0^s,5$
Messier	$13.18.54,0$	Équation du temps	$11.43.51,4$
Méchain.	$13.19.\;0,0$	Temps moyen de la phase. .	$13.\;2.51,9$

Le second contact interne a été observé, à Montevideo, par Galiano, Vernacci et de la Concha. Leur longitude était de $3^h 54^m 15^s$ à l'ouest de Paris, et leur latitude de $34^\circ 54' 48''$ au sud. La moyenne de leurs observations nous donne :

Second contact, temps vrai de Montevideo.	$14^h 15^m 11^s$
Longitude ouest de Montevideo.	3.54.15
Équation du temps.	11.43.51
Temps moyen de la phase.	17.53.17

Le calcul de ces observations donne successivement :

	Premier contact.	Deuxième contact.
Longitude géocentrique l de Mercure.	$223^\circ 47' 55'',5$	$223^\circ 31' 44'',5$
Latitude géocentrique s de Mercure. .	$-9.30,2$	$-5.5,1$
Longitude $\odot$ du Soleil.	$223.34.57,7$	$223.47.2,0$
Latitude σ du Soleil.	$-8,3$	$1,5$
Distance c des centres.	$962,4$	
Erreur tabulaire τ.	$-32^s,3$	$-57^s,6$

Entrée. . . . . . $\delta\nu + 0,72\,\delta\lambda + 2,64\,\delta c + 7'',4 = 0,$

Sortie. . . . . . . $\delta\nu - 0,34\,\delta\lambda - 2,27\,\delta c + 11'',4 = 0.$

La seconde équation, multipliée par $\frac{4}{3}$ et ajoutée à la première, fournit la relation

$$\delta\nu = -9'',7 - 0,12\,\delta\lambda + 0,19\,\delta c.$$

Passage du 4 mai 1786.

53. On sait que les Tables de Lalande ayant indiqué la sortie 53 minutes trop tôt, elle fut manquée à Paris par la plupart des astronomes. L'observation a été faite complétement à Mittaw, par Beitler; à Saint-Pétersbourg, par Inochodzow; à Bagdad, par de Beauchamp.

Pour comparer ces résultats entre eux, je réduirai tous les calculs au centre de la Terre. La latitude de Mittaw est de $56^\circ 39'$ N.; celle de Saint-Pétersbourg de $59^\circ 56'$ N.; celle de Bagdad de $33^\circ 20'$ N.

	Beitler.	Inochodzow.	de Beauchamp.
Instant du premier contact interne, en temps vrai de chaque méridien.	$4^h 37^m 26^s$	$5^h 3^m 13^s$	$6^h 0^m 5^s$
Différence avec le méridien de Paris.	22.34.27	22. 8. 6	21.11.51
Réduction au centre de la Terre.	0. 1.40	0. 1.42	0. 0.40
Équation du temps.	11.56.31	11.56.31	11.56.31
Temps moyen pour le centre de la Terre. . .	3.10. 4	3. 9.32	3. 9. 7

d'où, par une moyenne entre les trois résultats, $3^h 9^m 34^s$ pour le temps moyen de la phase vue du centre de la Terre.

	Beitler.	Inochodzow.	de Beauchamp.
Instant du deuxième contact interne, en temps vrai de chaque méridien.	$10^h 1^m 3^s$	$10^h 27^m 12^s$	$11^h 22^m 52^s$
Différence avec le méridien de Paris. . . .	22.34.27	22. 8. 6	21.11.51
Réduction au centre de la Terre.	23.58.49	23.58.59	23.59.27
Équation du temps.	11.56.31	11.56.31	11.56.31
Temps moyen pour le centre de la Terre.	8.30.50	8.30.48	8.30.41

Ainsi le second contact interne a eu lieu pour le centre de la Terre à $8^h 30^m 46^s$, temps moyen de Paris.

Dans la comparaison suivante de ces observations avec les Tables, les positions de Mercure et du Soleil sont rapportées au centre de la Terre :

	Premier contact.	Deuxième contact.
Longitude géocentrique de Mercure.	43° 53′ 6″,4	43° 44′ 50″,0
Latitude géocentrique de Mercure.	13. 11 ,6	9.20 ,2
Longitude du Soleil.	43.44. 29 ,0	43.57.25 ,8
Latitude du Soleil.	0 ,3	0 ,3
Distance c des centres.	943 ,1	
Erreur tabulaire τ.	$51^s,4$	$54^s,0$

Entrée.... $\delta v - 1,54\,\delta\lambda + 2,21\,\delta c - 5'',3 = 0;$

Sortie .... $\delta v + 0,73\,\delta\lambda - 1,54\,\delta c - 3'',8 = 0.$

Ces deux équations fournissent la suivante

$$\delta v = 4'',4 + 0,11\,\delta\lambda - 0,13\,\delta c.$$

Passage du 12 novembre 1782.

54. Il a été vu complétement à Paris. Les discordances qui existent entre les instants donnés par les différents astronomes, pour une même phase, sont très-propres à montrer combien on doit quelquefois avoir une juste défiance des observations isolées. Voici les données de l'observation du premier et du second contact internes, en temps vrai de l'Observatoire de Paris :

	1er contact interne.	2e contact interne.	
Lalande.	$15^h 4^m 57^s$		
Messier.	15 4.38		
Marie.	15.4.38		
Le Gentil. . . .	15.4.24	$16^h 18^m 7^s$	
Cassini (fils). . .	15.4.21	16.17.18	
Dagelet.	15.2.32	16.16. 2	
Méchain.	15.2. 8	16.17.46	Méchain dit que l'incertitude de son observation de la sortie est de 5 secondes au plus.
Le Monnier. . .	15.1.48		
Cagnoli.	15.0.21	16.16.24	

Ainsi, les observations du premier contact interne, par Lalande et Cagnoli, diffèrent entre elles de $4^m 36^s$, ce qui correspond à une variation de $35'',6$ dans la longitude héliocentrique. Les observations du second contact interne, par Le Gentil et Dagelet, diffèrent entre elles de $2^m 5^s$, ce qui correspond à une variation de $85'',4$ dans la longitude héliocentrique.

Hâtons-nous de dire qu'il s'en faut de beaucoup qu'on ait souvent de pareilles incertitudes à redouter. L'inégalité des résultats vient ici de ce que, Mercure n'ayant décrit qu'une très-petite corde du disque solaire, la projection du mouvement relatif de la planète sur le rayon du Soleil, passant au point de contact, était très-peu sensible. De plus, le Soleil était très-bas sur l'horizon, surtout à l'instant de la sortie; l'ondulation et la dentelure de son bord étaient extrêmes.

On peut cependant, avec quelques précautions, déduire de ce passage de 1782 de bons résultats. Nous allons le comparer aux Tables, en choisissant les quatre observations de Le Gentil, Cassini, Dagelet et Méchain, qui ont l'avantage d'être complètes. La moyenne de ces quatre observations est de $15^h 3^m 21^s$ pour l'entrée, de $16^h 17^m 23^s$ pour la sortie; et en y ajoutant l'équation du temps $11^h 44^m 30^s$, nous trouvons successivement :

	Premier contact.	Deuxième contact.
Temps moyen.	$14^h 47^m 51^s,0$	$16^h 1^m 53^s,0$
Longitude géocentrique l de Mercure. . .	$230° 29' 52'',8$	$230° 25' 40'',6$
Latitude géocentrique s de Mercure. . . .	$14.\ 52'',4$	$15.\ 56'',1$
Longitude $\odot$ du Soleil.	$230.23.\ 58'',2$	$230.27.\ 3'',0$
Latitude σ du Soleil.	$-\ 8'',5$	$-\ 8'',4$
Distance c des centres.	$963'',9$	
Erreur tabulaire τ.	$199^s,2$	$-188^s,0$

$$\text{Entrée.....}\quad \delta\nu = 0,129\tau + 2,70\,\delta\lambda - 6,01\,\delta c,$$
$$\text{Sortie......}\quad \delta\nu = 0,683\tau - 15,05\,\delta\lambda + 32,73\,\delta c.$$

Nous ne pouvons pas, d'après ce que nous avons vu plus haut, nous flatter de connaître τ fort exactement, ni pour l'entrée, ni pour la sortie. Il y a peu d'inconvénients pour l'entrée, à cause du petit facteur 0,129 qui multiplie cette correction du temps. Mais il en est autrement dans l'équation donnée par l'observation de la sortie: on voit que 30 secondes d'erreur sur l'instant de l'observation correspondraient à 21 secondes de longitude géocentrique. Par cette raison, avant d'employer la seconde équation de 1782, avec celles fournies par les autres passages, nous diviserons tous ses termes par quatre. Mettant d'ailleurs pour τ sa valeur, nous aurons les deux conditions :

$$\text{Entrée.......}\quad \delta\nu - 2,70\,\delta\lambda + 6,01\,\delta c - 25'',6 = 0,$$
$$\text{Sortie.......}\quad \tfrac{1}{4}\delta\nu + 3,76\,\delta\lambda - 8,18\,\delta c + 32'',1 = 0.$$

On déduit d'ailleurs de ces deux équations

$$\delta\nu = 1'',9 - 0,04\,\delta\lambda - 0,05\,\delta c.$$

Passage du 9 novembre 1769.

55. L'entrée a été observée à Philadelphie et à Norriton. Nous ramenerons toutes les observations au méridien de Norriton, qui est de 52 secondes à l'ouest de celui de Philadelphie, et nous trouverons pour l'instant de la phase apparente, déduit de six observations :

Smith	$14^h 36^m 35^s$	Moyenne des observations	$14^h 36^m 39^s$
Lukens	14.36.33	Longitude de Norriton	5.10.55
Rittenhouse	14.36.35	Équation du temps	11.44.12
Williamson	14.36.38	Temps moyen de la phase	19.31.46
Shippen	14.36.48		
Evans	14.36.46		
Ewing	14.36.38		

La latitude de Norriton étant d'ailleurs de $40°10'$ nord, nous aurons successivement :

Longitude géocentrique l de Mercure	$227° 59' \ 7'',2$
Latitude géocentrique s de Mercure	$5.14'',4$
Longitude $\odot$ du Soleil	$227.43.54'',2$
Latitude σ du Soleil	$-\ 7'',6$
Distance c des centres	$963'',7$
Erreur tabulaire τ	$54^s,7$

$$\delta\rho - 0,35\ \delta\lambda + 2,28\ \delta c - 11'',0 = 0.$$

Passage du 7 novembre 1756.

56. L'observation en a été faite complétement, à Pékin, par les PP. Gaubil et Amiot, dans le palais de l'empereur, résidence des jésuites français. Leurs résultats me paraissant défectueux et inconciliables avec ceux qu'on déduit des autres passages, je transcris d'abord leur observation complète, en temps vrai du méridien de Pékin.

	Mercure à moitié entré.	Premier contact interne.	Deuxième contact interne.	Sortie totale.
Amiot	$9^h 31^m 12^s$		$14^h 54^m 20^s$	$14^h 56^m\ 4^s$
Gaubil	9.30.51	$9^h 31^m 54^s,5$	14.54.25	14.56.31

La longitude de Pékin étant de $7^h 36^m 34^s$ à l'est de Paris, l'équation du temps étant de $11^h 43^m 59^s,3$, le premier contact interne a donc été observé à $1^h 39^m 19^s,8$ de temps moyen, et le second contact interne à $7^h 1^m 47^s,8$.

La latitude de Pékin étant d'ailleurs de $39° 54'$ nord, je déduis des données précédentes :

	Premier contact.	Deuxième contact.
Longitude géocentrique l de Mercure.	$225^\circ 23'\ 7'',2$	$225^\circ\ 5'\ 3'',6$
Latitude géocentrique s de Mercure.	$-3.\ 7'',7$	$1.26'',1$
Longitude $\odot$ du Soleil.	$225.7\ 24'',9$	$225.20.50'',4$
Latitude σ du Soleil.	$-\ 5'',8$	$-8'',7$
Distance c des centres.	$962'',9$	
Erreur tabulaire τ.	$-31^s,9$	$118^s,0$

La correction de la latitude, que nous reconnaîtrons plus tard être toujours fort petite, ne peut avoir ici aucune influence ni sur l'entrée ni sur la sortie; ce qui tient à ce que la latitude de Mercure est très-faible en ces deux instants. Nous aurons donc simplement les deux relations

$$\text{Entrée.....}\ \delta v = -\ 6'',9 - 2,21\ \delta c,$$
$$\text{Sortie......}\ \delta v = 24'',9 + 2,15\ \delta c.$$

On en déduit $\delta c = -\ 7'',3$; et, comme nous avons déjà diminué le demi-diamètre du Soleil de $3'',6$, il en résulte que, pour accorder entre elles les observations de l'entrée et de la sortie, il faudrait diminuer le diamètre entier du Soleil de $21'',8$. C'est un résultat évidemment faux et dont je ne puis accuser que les observations; puisque de l'Isle, qui s'est tant occupé de cette matière, trouvait aussi que, pour les accorder, il faudrait diminuer le diamètre du Soleil de 20 secondes.

Ajoutons à cela que les autres passages, comme nous le verrons plus tard, s'accordent à indiquer que la diminution de $3'',6$, sur le demi-diamètre du Soleil, est déjà beaucoup trop forte; et nous ne pourrons douter que dans les observations précédentes il ne se soit glissé quelque erreur. L'instant du second contact, donné par les deux observateurs, mérite plus de confiance sans doute; et effectivement, il s'accorde assez bien avec les passages de 1736 et 1743 observés à Paris. Je me suis toutefois décidé à ne faire aucun usage de cette observation. Il n'y aurait eu, il est vrai, aucun inconvénient à employer l'observation de la sortie, en rejetant celle de l'entrée; mais on n'y aurait non plus rien gagné. Il serait en outre peu logique de choisir un nombre parmi des résultats défectueux, par cette considération qu'il s'accorde avec d'autres données que nous possédons déjà, et de prétendre ainsi ajouter à la certitude de ces dernières. N'aurait-on pas un peu suivi cette marche à l'égard des observations de Tcheou-koung, dont on a déduit la variation de l'obliquité de l'écliptique?

Passage du 6 *mai* 1753.

57. La sortie a été observée à Paris. Voici l'instant du second contact interne et les résultats qu'on en déduit :

Le Gentil.	$10^h\,18^m 47^s$		
De l'Isle.	10.18.45	Moyenne des trois observations.	$10^h\,18^m 46^s,7$
Bouguer.	10.18.48	Équation du temps.	11.56.17,4
		Temps moyen de la phase. . .	10.15. 4,1

Longitude géocentrique l de Mercure. . .	$45°42'\ 0'',9$
Latitude géocentrique s de Mercure. . . .	$-\ 5.\ 16'',7$
Longitude $\odot$ du Soleil.	$45.56.\ 44'',8$
Latitude σ du Soleil.	$-\ 5'',4$
Distance c des centres.	$942'',5$
Erreur tabulaire τ.	$81^s,9$

$$\delta\nu - 0{,}35\ \delta\lambda - 1{,}31\ \delta c - 7'',1 = 0.$$

Les Tables de Mercure qu'on possédait à cette époque différaient énormément entre elles sur l'instant de l'entrée, celles de Lahire l'indiquant pour le 5 mai au soir, et celles de Halley pour le 6 mai à $6^h 30^m$ du matin. Elle eut réellement lieu le 6 mai, sur les $2^h 30^m$ du matin. Ces grandes erreurs provenaient du trop petit nombre d'observations que les auteurs avaient employées à la construction de leurs Tables.

Passage du 5 *novembre* 1743.

58. Il a été observé complétement à Paris. Voici les données de l'observation, en réduisant au méridien de Paris l'observation de Cassini, qui fut faite à Thury, 6^s à l'occident de Paris :

	1er contact interne.	2e contact interne.
La Caille.......	$8^h 40^m 38^s$	$13^h 10^m 3^s$
Maraldi........	8.40.46	13.10.17
Cassini.........	8.40.43	13.10.38
Cassini (fils)....	8.40.34	13.10.26
Moyenne des quatre obs.	8.40.40,2	13.10.21,0
Équation du temps....	11.43.52,0	11.43.52,4
Temps moyen........	$8^h 24^m 32^s,2$	$12^h 54^m 13^s,4$

La discussion de ces observations m'a fourni les résultats suivants :

	Premier contact.	Deuxième contact.
Longitude géocentrique l de Mercure...	$222° 44' 37'',3$	$222° 29' 36'',6$
Latitude géocentrique s de Mercure...	$-11' 2'',3$	$-7' 11'',7$
Longitude $\odot$ du Soleil..........	$222.32.39'',9$	$222.43.52'',8$
Latitude σ du Soleil...........	$-5'',5$	$-7'',9$
Distance c des centres..........	$962'',3$	
Erreur tabulaire τ.............	$127^s,8$	$85^s,6$

$$\text{Entrée.....}\ \delta\nu + 0,93\,\delta\lambda + 2,92\,\delta c - 30'',2 = 0,$$
$$\text{Sortie.....}\ \delta\nu - 0,49\,\delta\lambda - 2,39\,\delta c - 16'',7 = 0;$$

et de la combinaison de ces deux équations on déduit la suivante, propre à donner la correction de la longitude :

$$\delta\nu = 22'',5 - 0,13\,\delta\lambda + 0,12\,\delta c.$$

Passage du 2 mai 1740.

59. L'entrée a été observée à Cambridge, État du Massachussetts, par Wintrop. Cet observateur rend compte de ses résultats, ainsi qu'il suit, dans les *Philosophical Transactions*, n° 471, tome XLII :

« At $4^h\ 54^m\ 59^s$ I perceived that Mercury had made an Impression » on the Sun's limb, by the Quantity of wich I concludet that almost » one quarter of his Diameter might be entered. » (Un nuage se montre ensuite sur le Soleil, pendant trois minutes, disparaît, et l'auteur continue ainsi) : « I continued to see him (Mercury) till $5^h\ 0^m\ 40^s$ at wich time » he seemed to be gotten almost wholly within the Sun ; for he ap- » peared now very near round, though I could not yet discern the » Sun's light behind him. By the shaking of the Tube, I unfortunately » missed the moment of his interior contact with the Sun's limb ; but » am certain it could be but very little later than this ; for I presently » after saw him fairly within the Sun. »

Cette relation m'a inspiré, je l'avoue, peu de confiance. L'instant décisif de l'observation est manqué par accident. J'ai craint que les autres parties ne fussent également peu soignées, et j'ai préféré ne faire aucun usage de ce passage.

Passage du 11 novembre 1736.

60. C'est le premier qui ait été observé complétement à Paris. Je prends les observations de Maraldi et de Cassini de Thury.

	1er contact interne.	2e contact interne.
Maraldi.	$9^h\ 35^m\ 15^s$	$12^h\ 15^m\ 5^s$
Cassini de Thury. .	9.35. 10	12.15. 18
Moyenne des observations.	9.35. 12,5	12.15. 11,5
Équation du temps. . . .	11.44. 24,2	11.44. 24,2
Temps moyen.	$9^h\ 19^m\ 36^s,7$	$11^h\ 59^m\ 35^s,7$

On trouve par la discussion de ces observations :

$$\text{Entrée.} \ldots \quad \delta v - 1,32\ \delta\lambda + 3,58\ \delta c - 30'',4 = 0,$$
$$\text{Sortie.} \ldots \quad \delta v + 2,61\ \delta\lambda - 6,07\ \delta c - 13'',9 = 0;$$

équations qui s'accordent parfaitement avec celles du passage de 1743. On en déduit :

$$\delta v = 24'',5 - 0,11\ \delta\lambda - 0,11\ \delta c.$$

Quelques astronomes ont encore observé ce passage à la chambre obscure. Leurs résultats sont de nature à ôter tout crédit à une observation isolée, faite par ce procédé. Les durées du passage, observées par quatre astronomes différents, varient depuis $2^h\,37^m\,32^s$ jusqu'à $2^h\,43^m\,53^s$: c'est-à-dire qu'il y a plus de six minutes de différence entre les résultats extrêmes. Or, chaque minute de temps équivaut à $17'',7$ de degré en longitude héliocentrique à l'instant de l'entrée, et à $10'',3$ à l'instant de la sortie. Dans les passages de mai, le mouvement relatif est plus lent, et l'erreur du temps a moins d'influence; mais, d'un autre côté, l'observation est plus difficile, les chances de l'erreur sur le temps variant en raison inverse du mouvement relatif: l'erreur en longitude doit donc être à peu près la même dans tous les cas.

Dans les passages de 1736 et de 1743, les astronomes ont pris, par un grand nombre de mesures micrométriques, la position relative de Mercure pendant qu'il passait sur le Soleil. Si l'on consulte les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour ces deux années, on verra que les résultats qu'on a déduits de ces mesures, relativement à l'instant de la conjonction, sont très-différents entre eux. Ils laisseraient, dans la longitude héliocentrique, des incertitudes bien supérieures aux petites erreurs dont sont susceptibles les observations de l'entrée et de la sortie, faites dans ces deux dernières années. C'est ce qui m'a déterminé à ne faire usage que des observations des contacts dans mes équations de condition.

Passage du 9 novembre 1723.

61. L'entrée a été observée à Paris. Voici les données et le calcul de cette observation :

	1er contact.		
Maraldi. .	$14^h\,51^m\,48^s$	Moyenne des deux observations. . . .	$14^h\,51^m\,48^s,0$
Cassini.. .	14. 51. 48	Équation du temps..	11. 44. 7,6
		Temps moyen de la phase.	$14^h\,35^m\,55^s,6$

Longitude géocentrique l de Mercure.	$226^\circ\,56'\,20'',4$
Latitude géocentrique s de Mercure.	$3.24'',7$
Longitude $\odot$ du Soleil.	$226.\,40.21'',6$
Latitude σ du Soleil.	$-\,9'',2$
Distance c des centres.	$963'',3$
Erreur tabulaire τ.	$207^s,2$

$$\delta v - 0,23\,\delta\lambda + 2,21\,\delta c - 42'',2 = 0.$$

Passage du 6 *mai* 1707.

62. Les Tables de Mercure, par Lahire, se trouvaient d'accord, en 1701 et 1705, avec des observations méridiennes. Suivant l'observation méridienne du 12 avril 1707, elles étaient encore exactes. Lahire se croyait donc certain d'avoir prédit juste, en annonçant, pour le 5 mai, un passage de Mercure sur le Soleil, *visible à Paris*. Le 5 mai, cependant, le Soleil fut visible toute la journée, depuis son lever jusqu'à son coucher, et l'on n'aperçut aucune trace du passage annoncé. Il n'eut effectivement lieu que dans la nuit suivante, et la fin fut entrevue à Copenhague par Rœmer, le 6 mai au matin. Les nuages empêchèrent Rœmer de prendre aucune mesure exacte.

Passage du 3 *novembre* 1697.

63. La sortie a été observée à Paris par Cassini, et à Nuremberg par Wurtzelbaur. Mais ce dernier astronome s'étant servi de la chambre obscure, je ne ferai usage que de l'observation de Cassini, rapportée en ces termes :

« Horâ $8^h\,8^m\,38^s$, margo præcedens Mercurii pervenit ad Solis marginem præcedentem. »

L'équation du temps étant de $11^h\,43^m\,52^s,6$, le second contact interne a donc eu lieu à $7^h\,52^m\,30^s,6$ de temps moyen, et on en déduit :

Longitude géocentrique l de Mercure. . . .	$221^\circ\,27'\,24'',9$
Latitude géocentrique s de Mercure. . . .	$-\,9.\ 5'',6$
Longitude $\odot$ du Soleil.	$221.40.\,19'',4$
Latitude σ du Soleil.	$-\,6'',9$
Distance c des centres.	$962'',3$
Erreur tabulaire τ.	$262^s,1$

$$\delta\nu - 0,67\,\delta\lambda - 2,58\,\delta c - 49'',2 = 0.$$

Passage du 10 *novembre* 1690.

64. L'observation de la sortie a été faite à Nuremberg par Wurtzelbaur, qui en rend compte en ces termes, dans les *Transactions philosophiques* de 1693 :

« Tubum illò ubi emersio Solis è nubibus expectanda erat direxi :

» et postquàm emergens ejùs discus ad Tabulam observatoriam af-
» fluxerat...... (ainsi Wurtzelbaur observait sur l'image du Soleil).
» Tandem cùm limbi mutuo contactu se stringerent.... et postquàm
» limbus uterque ad minutum ferè sibi invicem adhæsitare viderentur,
» H. 8 min. 36. oscillatorii nostri, Mercurius totus disco exiisse ob-
» servatus est. »

Suivent des observations de Pégase et d'Andromède, et des hauteurs du Soleil pour avoir le temps de l'horloge.

La sortie a encore été observée à Erfurth, à Canton, à Tchaotcheou. Mais toutes ces observations m'ont peu satisfait, et je ne les ai pas calculées.

Passage du 7 novembre 1677.

65. Cette époque commençant à s'éloigner de nous, j'avais craint que les Tables du Soleil ne fussent plus suffisamment exactes, et je ne fis pas entrer ce passage dans mes équations de condition. Toutefois, comme il a été observé à Sainte-Hélène par Halley, je n'ai pas laissé de le calculer, afin de voir comment j'y satisferais au moyen de mes éléments rectifiés : on verra plus loin que la concordance est parfaite. Ce passage a encore été observé à Avignon, par Gallet; mais il a employé la chambre obscure, et je ne ferai pas usage de ses résultats.

Des observations du premier et du second contact internes, il résulte que le milieu du passage a été vu par Halley à $12^h\ 3^m\ 50^s$, temps vrai de son observatoire, c'est-à-dire à $12^h\ 20^m\ 9^s$, temps moyen de l'Observatoire de Paris. En comparant ces résultats avec les Tables provisoires, on trouve, pour la correction de la longitude héliocentrique :

$$\delta v = 69'',9.$$

Passage du 3 mai 1661.

66. Quoiqu'il n'ait été observé qu'à la chambre obscure, par Hevelius, la supériorité du talent d'observation de cet illustre astronome nous fait un devoir de calculer ses résultats. Nous les comparerons à nos Tables rectifiées, mais sans les faire entrer dans les équations de condition.

Hevelius nous a laissé les mesures de sept distances de Mercure à l'extrémité de la corde qu'il parcourut sur le Soleil, ce qui, avec les temps correspondants, équivaut à sept observations du milieu du passage. La première observation diffère de la moyenne des six autres de plus de 5^m de temps. Nous la laisserons de côté, et nous aurons ainsi :

Milieu du passage, temps vrai de Dantzick. . . .	$18^h\ 7^m\ 3^s,7$
Équation du temps.	$11.56.24,4$
Longitude ouest de Dantzick.	$22.54.43,0$
Temps moyen du milieu du passage.	$16^h\ 58^m\ 11^s,1$

En comparant ce moment à celui qu'on déduirait des Tables provisoires, j'ai trouvé, pour la correction de la longitude héliocentrique :

$$\delta v = 42'',5 + 0,18\ \delta\lambda.$$

Passage du 3 *novembre* 1651.

67. Il n'a été vu qu'imparfaitement, à Surate, dans les Indes, par Skakerlœus.

Passage du 7 *novembre* 1631.

68. C'est le premier passage de Mercure sur le Soleil, qui ait été observé. Gassendi ne nous a laissé aucune autre détermination que l'instant de la sortie, pris à la chambre obscure. Comme on ne peut répondre de l'exactitude de cette observation, je ne l'ai pas calculée.

§ X.

Equations de condition, déduites des passages de Mercure sur le Soleil, entre les corrections des éléments elliptiques, du diamètre du Soleil et de la masse de Vénus.

69. Il faudra, pour obtenir ces équations, remplacer, dans les expressions de la correction δv, déduites soit de l'observation de l'entrée, soit de celle de la sortie, δv et $\delta\lambda$ par leurs valeurs n^{os} **41** et **46**.

De plus, la constante ϖ de la longitude du périhélie devra être remplacée par $\varpi + 2'',81.t\mu'$; et la constante θ de la longitude du nœud devra être remplacée par $\theta - 4'',09.t\mu'$.

On aura ainsi les équations suivantes, dans lesquelles celles qui proviennent de l'observation de l'entrée sont marquées par la lettre E, celles qui proviennent de l'observation de la sortie étant indiquées par la lettre S.

Années.

1697. S. $$\left.\begin{array}{r} -138{,}75\,\delta n + 1{,}36\,\delta\varepsilon - 1{,}06\,\delta e - 0{,}440\,\delta\varpi + 0{,}03\,\delta\varphi \\ + 0{,}082\,\delta\theta - 2{,}58\,\delta c + 160{,}6\,\mu' - 49'',2 \end{array}\right\} = 0$$

1723. E. $$\left.\begin{array}{r} -110{,}52\,\delta n + 1{,}45\,\delta\varepsilon - 1{,}00\,\delta e - 0{,}480\,\delta\varpi - 0{,}00\,\delta\varphi \\ + 0{,}028\,\delta\theta + 2{,}21\,\delta c + 111{,}4\,\mu' - 42'',2 \end{array}\right\} = 0$$

1736. E. $$\left.\begin{array}{r} -79{,}69\,\delta n + 1{,}26\,\delta\varepsilon - 0{,}78\,\delta e - 0{,}423\,\delta\varpi - 0{,}09\,\delta\varphi \\ + 0{,}161\,\delta\theta + 3{,}58\,\delta c + 116{,}6\,\mu' - 30'',4 \end{array}\right\} = 0$$

1736. S. $$\left.\begin{array}{r} -125{,}60\,\delta n + 1{,}99\,\delta\varepsilon - 1{,}20\,\delta e - 0{,}670\,\delta\varpi + 0{,}21\,\delta\varphi \\ - 0{,}320\,\delta\theta - 6{,}07\,\delta c + 36{,}2\,\mu' - 13'',9 \end{array}\right\} = 0$$

1743. E. $$\left.\begin{array}{r} -92{,}35\,\delta n + 1{,}65\,\delta\varepsilon - 1{,}30\,\delta e - 0{,}531\,\delta\varpi - 0{,}05\,\delta\varphi \\ - 0{,}114\,\delta\theta + 2{,}92\,\delta c + 57{,}6\,\mu' - 30'',2 \end{array}\right\} = 0$$

1743. S. $$\left.\begin{array}{r} -78{,}13\,\delta n + 1{,}39\,\delta\varepsilon - 1{,}07\,\delta e - 0{,}451\,\delta\varpi + 0{,}02\,\delta\varphi \\ + 0{,}060\,\delta\theta - 2{,}39\,\delta c + 84{,}9\,\mu' - 16'',7 \end{array}\right\} = 0$$

1753. S. $$\left.\begin{array}{r} -34{,}60\,\delta n + 0{,}74\,\delta\varepsilon + 0{,}92\,\delta e + 0{,}300\,\delta\varpi + 0{,}01\,\delta\varphi \\ - 0{,}043\,\delta\theta - 1{,}31\,\delta c - 47{,}5\,\mu' - 7'',1 \end{array}\right\} = 0$$

1769. E. $$\left.\begin{array}{r} -43{,}12\,\delta n + 1{,}43\,\delta\varepsilon - 0{,}97\,\delta e - 0{,}474\,\delta\varpi - 0{,}01\,\delta\varphi \\ + 0{,}043\,\delta\theta + 2{,}28\,\delta c + 45{,}5\,\mu' - 11'',0 \end{array}\right\} = 0$$

1782. E. $$\left.\begin{array}{r} -17{,}29\,\delta n + 1{,}01\,\delta\varepsilon - 0{,}61\,\delta e - 0{,}339\,\delta\varpi - 0{,}21\,\delta\varphi \\ + 0{,}330\,\delta\theta + 6{,}01\,\delta c + 39{,}5\,\mu' - 25'',6 \end{array}\right\} = 0$$

1782. S. $$\left.\begin{array}{r} -18{,}35\,\delta n + 1{,}07\,\delta\varepsilon - 0{,}64\,\delta e - 0{,}360\,\delta\varpi + 0{,}32\,\delta\varphi \\ - 0{,}460\,\delta\theta - 8{,}18\,\delta c - 14{,}9\,\mu' + 32'',1 \end{array}\right\} = 0$$

1786. E. $$\left.\begin{array}{r} -11{,}69\,\delta n + 0{,}86\,\delta\varepsilon + 1{,}16\,\delta e + 0{,}329\,\delta\varpi - 0{,}06\,\delta\varphi \\ - 0{,}189\,\delta\theta + 2{,}21\,\delta c - 23{,}1\,\mu' - 5'',3 \end{array}\right\} = 0$$

1786. S. $$\left.\begin{array}{r} -8{,}91\,\delta n + 0{,}66\,\delta\varepsilon + 0{,}87\,\delta e + 0{,}255\,\delta\varpi + 0{,}02\,\delta\varphi \\ + 0{,}090\,\delta\theta - 1{,}54\,\delta c - 4{,}7\,\mu' - 3'',8 \end{array}\right\} = 0$$

1789. E. $$\left.\begin{array}{r} -16{,}31\,\delta n + 1{,}61\,\delta\varepsilon - 1{,}27\,\delta e - 0{,}519\,\delta\varpi - 0{,}03\,\delta\varphi \\ - 0{,}088\,\delta\theta + 2{,}64\,\delta c + 11{,}2\,\mu' + 7'',4 \end{array}\right\} = 0$$

1789. S. $$\left.\begin{array}{r} -14{,}42\,\delta n + 1{,}42\,\delta\varepsilon - 1{,}08\,\delta e - 0{,}463\,\delta\varpi - 0{,}01\,\delta\varphi \\ + 0{,}041\,\delta\theta - 2{,}27\,\delta c + 14{,}9\,\mu' + 11'',4 \end{array}\right\} = 0$$

1799. E. $$\left.\begin{array}{r} -0{,}46\,\delta n + 0{,}70\,\delta\varepsilon + 0{,}87\,\delta e + 0{,}280\,\delta\varpi - 0{,}00\,\delta\varphi \\ + 0{,}024\,\delta\theta + 1{,}25\,\delta c - 0{,}5\,\mu' - 4'',9 \end{array}\right\} = 0$$

1799. S. $$\left.\begin{array}{r} -0{,}50\,\delta n + 0{,}77\,\delta\varepsilon + 0{,}93\,\delta e + 0{,}311\,\delta\varpi + 0{,}02\,\delta\varphi \\ - 0{,}076\,\delta\theta - 1{,}44\,\delta c - 0{,}8\,\mu' - 0'',9 \end{array}\right\} = 0$$

1802. S. $$\left.\begin{array}{r} 4{,}38\,\delta n + 1{,}53\,\delta\varepsilon - 1{,}07\,\delta e - 0{,}506\,\delta\varpi + 0{,}00\,\delta\varphi \\ - 0{,}026\,\delta\theta - 2{,}20\,\delta c - 3{,}8\,\mu' + 22'',0 \end{array}\right\} = 0$$

1832. E. $$\left.\begin{array}{r} 25{,}79\,\delta n + 0{,}80\,\delta\varepsilon + 1{,}07\,\delta e + 0{,}309\,\delta\varpi - 0{,}03\,\delta\varphi \\ - 0{,}106\,\delta\theta + 1{,}63\,\delta c + 42{,}1\,\mu' + 1'',9 \end{array}\right\} = 0$$

1832. S. $$\left.\begin{array}{r} 22{,}20\,\delta n + 0{,}69\,\delta\varepsilon + 0{,}90\,\delta e + 0{,}268\,\delta\varpi + 0{,}01\,\delta\varphi \\ + 0{,}045\,\delta\theta - 1{,}30\,\delta c + 18{,}4\,\mu' + 4'',4 \end{array}\right\} = 0$$

§ XI.

Détermination des nouveaux éléments de l'orbite de Mercure, du diamètre du Soleil et de la masse de Vénus.

70. J'ai traité par la méthode des moindres carrés le système des équations, n° **45**, et celui des équations, n° **47**, en multipliant chaque équation par le coefficient de l'inconnue qu'on considère, et par le nombre des observations qui sont entrées dans la détermination de la constante de cette équation. Aux équations résultantes, j'ai ajouté celles qu'on déduit des équations fournies par les passages, et traitées par la même méthode. Réduisant enfin à l'unité le coefficient de chaque inconnue, dans l'équation qui lui correspond, j'ai obtenu les huit équations suivantes entre les huit corrections cherchées δn, $\delta\varepsilon$, δe, $\delta\varpi$, $\delta\varphi$, $\delta\theta$, μ' et δc :

$$\begin{aligned}
\delta n &= -0'',3310 + 0,0086\,\delta\varepsilon - 0,0094\,\delta e - 0,00354\,\delta\varpi + 0,0002\,\delta\varphi\\
&\quad - 0,00025\,\delta\theta - 0,0056\,\delta c + 0,693\,\mu',\\
\delta\varepsilon &= -0'',488 + 15,990\,\delta n + 0,182\,\delta e + 0,204\,\delta\varpi - 0,006\,\delta\varphi\\
&\quad + 0,019\,\delta\theta + 0,177\,\delta c - 20,546\,\mu',\\
\delta e &= -4'',622 - 11,153\,\delta n + 0,121\,\delta\varepsilon - 0,107\,\delta\varpi + 0,003\,\delta\varphi\\
&\quad - 0,001\,\delta\theta - 0,067\,\delta c + 9,336\,\mu',\\
\delta\varpi &= 4'',824 - 61,152\,\delta n + 1,760\,\delta\varepsilon - 1,560\,\delta e + 0,025\,\delta\varphi\\
&\quad - 0,027\,\delta\theta - 0,553\,\delta c + 61,956\,\mu',\\
\delta\varphi &= -2'',438 + 0,820\,\delta n - 0,010\,\delta\varepsilon + 0,011\,\delta e + 0,005\,\delta\varpi\\
&\quad + 0,028\,\delta\theta + 0,214\,\delta c + 0,399\,\mu',\\
\delta\theta &= 38'',670 - 18,451\,\delta n + 0,706\,\delta\varepsilon - 0,075\,\delta e - 0,100\,\delta\varpi\\
&\quad + 0,688\,\delta\varphi - 5,867\,\delta c - 38,807\,\mu',\\
\delta c &= 2'',424 - 2,362\,\delta n + 0,041\,\delta\varepsilon - 0,018\,\delta e - 0,011\,\delta\varpi\\
&\quad + 0,028\,\delta\varphi - 0,032\,\delta\theta - 2,320\,\mu',\\
\mu' &= 0,2886 + 0,8212\,\delta n - 0,0126\,\delta\varepsilon + 0,0093\,\delta e + 0,00429\,\delta\varpi\\
&\quad + 0,0002\,\delta\varphi - 0,00063\,\delta\theta - 0,0072\,\delta c.
\end{aligned}$$

Ces équations fournissent, pour les valeurs des inconnues qu'elles renferment :

$$\begin{aligned}
\delta n &= -0'',424,\\
\delta\varepsilon &= -0'',36,\\
\delta e &= -3'',63,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\varpi &= 35'',78,\\
\delta\varphi &= -1'',30,\\
\delta\theta &= 28'',70,\\
\delta c &= 2'',06,\\
\mu' &= 0,031.
\end{aligned}$$

71. La correction $\mu' = 0,031$ nous donne pour la masse de Vénus :

$$m' = \frac{1}{390000}.$$

La différence de cette masse avec celle déterminée par Burckardt ne produit en cent ans que $8'',7$ sur la longitude du périhélie de Mercure; quantité dont je ne crois pas qu'on puisse répondre d'une manière absolue par les observations. La théorie de Mercure conduit donc à une masse de Vénus, très-peu différente de celle qu'a donnée la variation de l'obliquité de l'écliptique; et c'est un résultat dont on a lieu d'être satisfait.

72. Une correction de $0'',424$ par année, sur le moyen mouvement, et dont l'effet doit aller en s'accumulant, est sans doute considérable; mais, sans elle, il est impossible de représenter simultanément les anciennes observations et les nouvelles. J'ajouterai même que la discussion des 397 observations méridiennes que j'ai empruntées aux registres de l'Observatoire de Paris, depuis 1801 jusqu'en 1842, m'avait fourni à elle seule une diminution plus considérable.

Nous avons donc, pour l'expression du moyen mouvement, en $365^{j},25$, et à partir de l'équinoxe mobile, en vertu de la précession,

$$49^{s}\,24^{\circ}\,44'\,26'',441.$$

En retranchant du moyen mouvement la précession annuelle $50'',223$, on aura le moyen mouvement sidéral

$$n = 5\,381\,016'',218;$$

d'où l'on déduira, conformément au n° **27**, la valeur suivante du demi-grand axe,

$$a = 0,387\,098\,4.$$

73. La longitude de l'époque, rapportée au minuit qui sépare le 31 décembre 1799 du 1er janvier 1800, temps moyen de l'Observatoire de Paris, sera

$$\varepsilon = 3^s\,20^\circ\,13'\,17'',84.$$

74. L'expression $\delta e = -3'',63$ donne, pour le rapport de l'arc correspondant au rayon, $-0,000\,017\,6$; en sorte que l'excentricité au 1er janvier 1800 était égale à

$$e = 0,205\,600\,3.$$

75. La longitude ϖ du périhélie, au 1er janvier 1800, était, suivant nos déterminations,

$$\varpi = 2^s\,14^\circ\,20'\,41'',6.$$

La correction $35'',8$ que j'ai apportée à cet élément est assez considérable, eu égard à la grande excentricité de l'orbite. Il en peut résulter près de 20 secondes de variation sur la longitude héliocentrique.

Afin de m'assurer que les corrections que je viens d'indiquer étaient exactes, et ne seraient guère différentes si l'on employait un plus grand nombre d'observations, j'ai séparé mes observations méridiennes en deux groupes, composés d'un nombre égal d'observations prises au hasard, et j'ai cherché les corrections qui seraient données par chacun de ces groupes en particulier. Elles se sont trouvées à peu près les mêmes. Puis, en réunissant toutes les équations avec celles déduites de la considération des passages de Mercure sur le Soleil, j'ai déduit une troisième détermination, encore très-voisine des deux premières. Je dois donc supposer que cette moyenne, à laquelle je me suis arrêté, est fort exacte.

76. Voici les expressions de l'inclinaison de l'orbite et de la longitude du nœud, pour le 1er janvier 1800 :

$$\varphi = 7^\circ\ 0'\ 4'',60,$$
$$\theta = 1^s\,15^\circ\,57'\,37'',70.$$

Diamètre du Soleil.

77. Les passages de Mercure sur le Soleil fournissent, par la comparaison de l'entrée avec la sortie, un moyen précis d'obtenir le véritable diamètre du Soleil, pourvu que celui de la planète soit connu avec exactitude. On se rappellera que nous avons employé le demi-diamètre solaire des Tables de Delambre, diminué de $3'',6$, le demi-diamètre de Mercure étant supposé de $3'',25$ à la distance moyenne. Et nous avons reconnu, par la valeur trouvée pour δc, qu'avec ces hypothèses, la diminution de $3'',6$ était trop forte et devait être réduite à $1'',54$.

Je supposerai ici le demi-diamètre de Mercure égal à $3'',34$ à la distance moyenne, nombre qui me paraît exact. D'une part, suivant les idées qu'on s'est faites de l'irradiation, le diamètre de Mercure, obtenu par des mesures micrométriques, lorsque cette planète se projette sur le Soleil, devrait être trop petit du double de l'irradiation. Mais, d'un autre côté, en suivant ces mêmes idées, on reconnaît que le demi-diamètre, déduit du temps écoulé entre les seconds contacts interne et externe, doit être indépendant de l'irradiation. Ce dernier procédé est d'ailleurs fort exact, puisque les deux derniers contacts s'observent avec précision; et le résultat qu'il fournit s'accorde parfaitement avec les mesures micrométriques. C'est un premier fait difficile à concilier avec l'hypothèse de l'irradiation.

Les passages de Mercure conduisent tous à peu près au même diamètre du Soleil, à l'exception de celui du 6 novembre 1756; mais, si je ne me trompe, il n'en peut surgir aucune difficulté, l'exagération du résultat étant plus que suffisante pour le faire rejeter sans scrupule, ainsi que je l'ai expliqué dans la discussion de ce passage, n° **56**.

L'emploi des autres passages m'a conduit à la détermination d'un demi-diamètre que je regarde comme très-précis; car, en laissant de côté un ou deux passages, les autres conduisent toujours sensiblement au même résultat. Voici ce demi-diamètre, réduit à la distance moyenne, et comparé à ceux de Short, de Lalande et des *Éphémérides de Berlin* :

Demi-diamètre du Soleil suivant Short.	$15'\,59'',86$
Demi-diamètre du Soleil déduit des passages de Mercure. . .	$16.\ 0'',01$
Demi-diamètre du Soleil suivant les *Éphémérides de Berlin*.	$16.\ 0'',93$
Demi-diamètre du Soleil suivant Lalande.	$16.\ 1'',36$

L'observation de Short était, je crois, fort bonne, et c'est celle dont je me rapproche le plus. Mon résultat servira, je l'espère, à éclaircir les doutes qui pourraient rester sur l'influence de l'irradiation dans les éclipses de Soleil, irradiation dont on a au moins fort exagéré les effets.

*De l'introduction de nouvelles observations dans les équations de condition du n° **70**.*

78. Les équations de condition sur lesquelles j'ai basé la rectification des éléments de l'orbite de Mercure s'appuient sur un assez grand nombre d'observations anciennes et modernes, et les représentent toutes assez parfaitement pour qu'il me paraisse inutile de rien changer à ces équations sous ce rapport; mais la perfection progressive des Tables, à laquelle on ne doit jamais renoncer, exigera que de temps à autre on apporte à ces équations les modifications qui seront indiquées par les observations postérieures à 1842. Ces changements se feront aisément, en comparant les observations à des éphémérides, supposées construites sur les nouvelles Tables.

Appelons $\delta' n$, $\delta' \varepsilon$, $\delta' e$, ... les corrections à introduire dans les nouveaux éléments. Les équations de condition, déduites des nouvelles observations comparées avec mes Tables, renfermeront ces quantités comme inconnues. Ce sont ces équations qu'il s'agit de joindre aux équations du n° **70**.

Remplaçons dans ces dernières δn, $\delta \varepsilon$, ... respectivement par

$$\delta n + \delta' n, \quad \delta \varepsilon + \delta' \varepsilon, \ldots.$$

En vertu de la première détermination, les termes en δn, $\delta \varepsilon$, ... détruiront les constantes des équations : en sorte qu'on pourra, dans ces équations, remplacer δn, $\delta \varepsilon$, ..., par $\delta' n$, $\delta' \varepsilon$, ..., pourvu qu'on y efface les constantes.

De plus, dans le n° **70**, j'ai réduit à l'unité le coefficient de δn dans l'équation qui est relative à cette correction, en divisant par 86225 l'équation telle qu'elle était fournie par la méthode des moindres carrés. Il faudra diviser par le même nombre l'équation en $\delta' n$, fournie par les nouvelles observations, avant de l'ajouter à la première des équations du n° **70**.

Il faudra diviser de même les équations correspondantes aux autres inconnues par les nombres suivants :

L'équation correspondante à	$\delta'\varepsilon$	par	45
L'équation correspondante à	$\delta'e$	par	70
L'équation correspondante à	$\delta'\varpi$	par	5,03
L'équation correspondante à	$\delta'\varphi$	par	25,5
L'équation correspondante à	$\delta'\theta$	par	1,18
L'équation correspondante à	$\delta'c$	par	213
L'équation correspondante à	$\delta'\mu'$	par	72795

J'espère avoir le loisir de faire connaître les corrections que les observations postérieures au 18 juillet 1842 apporteront annuellement aux équations du n° **70**, et de maintenir ainsi la théorie de Mercure toujours appuyée sur les observations les plus récentes.

79. *Comparaison de la longitude héliocentrique de Mercure, calculée par les nouvelles Tables, aux instants des passages sur le Soleil, avec celle qu'on a déduite de l'observation.*

DATES.	PHASES CALCULÉES.	ERREURS TABULAIRES AVEC LES ÉLÉMENTS provisoires.	ERREURS TABULAIRES AVEC LES ÉLÉMENTS rectifiés.
1832	Entrée et sortie..	3″4	— 0″1
1802	Sortie.	23,3	0,0
1799	Entrée et sortie.	— 3,3	3,4
1789	Entrée et sortie.	9,7	2,3
1786	Entrée et sortie.	— 4,4	5,1
1782	Entree..	— 25,6	— 5,2
1782	Sortie.	32,1	— 2,0
1769	Entrée..	— 11,0	0,7
1753	Sortie.	— 7,1	9,3
1743	Entrée et sortie..	— 23,5	0,9
1736	Entrée et sortie.	— 22,2	2,2
1723	Entrée..	— 42,2	— 0,6
1697	Sortie.	— 49,2	— 0,8
1677	Entrée et sortie.	— 69,9	— 1,7
1661	Milieu du passage.	— 42,5	2,6

Je dois ajouter, pour l'intelligence de ce tableau, que la comparaison qu'il renferme a été obtenue au moyen des équations de condition, en faisant porter toutes les erreurs sur la longitude de la planète, et en supposant la latitude exacte. L'observation de 1782, qui donnait ainsi deux erreurs si différentes l'une de l'autre, par le calcul de l'entrée et par celui de la sortie, faits au moyen des anciennes Tables, fournit, avec les nouveaux éléments, des résultats concordants. Cette observation est très-propre à montrer la nécessité des corrections que j'ai apportées à la position du nœud de Mercure, et au diamètre du Soleil.

Dans la colonne des erreurs qui subsistent avec l'emploi de mes éléments, il n'y en a pas une seule qu'on ne puisse rejeter tout entière sur l'incertitude des Tables du Soleil. Je dois donc penser que cette nouvelle détermination des éléments de l'orbite elliptique de Mercure, et de ses perturbations périodiques et séculaires, donne à la théorie de cette planète le degré de précision qu'on peut attendre de l'état actuel de la Mécanique céleste, et de la perfection des observations modernes. Il me restait, pour remplir ma tâche jusqu'au bout, à donner des Tables numériques, au moyen desquelles on pût introduire dans la construction des éphémérides journalières les améliorations dont je viens de rendre compte : c'est ce que j'ai fait.

J'ai présenté ces Tables au Bureau des Longitudes, en demandant à cette illustre assemblée qu'elle voulût bien les publier sous ses auspices. Si ma demande est accueillie, je rendrai compte, dans un préambule, des dispositions particulières par lesquelles j'ai singulièrement abrégé le calcul du lieu héliocentrique.