JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CELLÉRIER

Note sur une classe particulière d'intégrales définies

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 255-262.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__255_0>

NOTE

SUR UNE CLASSE PARTICULIÈRE D'INTÉGRALES DÉFINIES;

PAR M. CELLÉRIER.

Je me propose de montrer dans cette Note comment on peut arriver d'une manière très-simple à la valeur de l'intégrale

$$(1)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{M}\,dx,$$

où M est une fonction entière quelconque de x, $\frac{1}{x}$, et des quantités

$$(2)\qquad \sin ax,\quad \cos ax,\quad \sin a'x,\quad \cos a'x,\quad \sin a''x,\quad \cos a''x,\ldots,$$

en désignant par a, a', a'',... des constantes réelles quelconques.

On suppose ici que l'intégrale (1) a une valeur finie et déterminée. Les termes de M qui changent de signe quand on remplace x par $-x$ disparaissant dans l'intégrale, on pourra n'avoir égard qu'aux termes pairs par rapport à x, et par conséquent n'étendre l'intégration que depuis zéro jusqu'à l'infini en doublant le résultat. Si $\frac{1}{x^n}$ est la plus haute puissance de $\frac{1}{x}$ contenue dans M, on n'aura donc qu'à examiner l'intégrale

$$(3)\qquad \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{N}}{x^n}\,dx,$$

où N est une fonction entière de x, et des quantités (2), qui contient seulement des puissances paires ou impaires de x, suivant que n est pair ou impair. Pour que l'expression (3) soit finie, il est nécessaire d'ailleurs que $\frac{\mathrm{N}}{x^n}$ se réduise à une quantité finie quand $x = 0$; il est clair également que la plus haute puissance de x contenue dans N devra être tout au plus x^{n-1}, sans quoi l'intégrale (3) ne convergerait pas vers une limite unique et déterminée quand, après y avoir remplacé la limite infinie de l'intégration par une quantité très-grande h, on ferait croître celle-ci jusqu'à l'infini.

Considérons d'abord le cas très-simple où

$$N = P\cos ax + Q\sin ax + R, \tag{4}$$

P, Q, R étant des fonctions entières de x, et a une constante réelle. Pour que $\frac{N}{x^n}$ soit une fonction paire de x, il faudra d'abord que P et R contiennent seulement les puissances

$$x^{n-2},\quad x^{n-4},\quad x^{n-6},\ldots,$$

et Q seulement

$$x^{n-1},\quad x^{n-3},\quad x^{n-5},\ldots.$$

Cela posé, si l'on désigne par q le terme indépendant de x du coefficient de $\sin ax$ dans l'expression

$$\frac{d^{n-1}N}{dx^{n-1}},$$

on aura

$$\int_0^\infty \frac{N}{x^n}\,dx = \frac{\pm q}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{\pi}{2}, \tag{5}$$

en prenant le signe + ou − suivant que a est positive ou négative.

Ce théorème a lieu pour de petites valeurs de n, entre autres pour $n = 2$. En effet, dans ce cas, la valeur la plus générale de l'expression (4) étant

$$N = m\cos ax + m'x\sin ax + m'',$$

où m, m', m'' sont des constantes, la supposition que $\frac{N}{x^2}$ reste fini quand $x = 0$, donne

$$m + m'' = 0.$$

Par conséquent,

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{N}}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{m'x\sin ax - m(1-\cos ax)}{x^2}\,dx.$$

En même temps, la valeur de q est

$$q = m' - ma.$$

En intégrant par partie, on a

$$\int \frac{1-\cos ax}{x^2}\,dx = -\frac{1-\cos ax}{x} + \int \frac{a\sin ax}{x}\,dx;$$

puis, $\frac{1-\cos ax}{x}$ s'évanouissant aux limites 0 et ∞,

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x^2}\,dx = a\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx,$$

et

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{N}}{x^2}\,dx = (m' - ma)\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \pm q\frac{\pi}{2};$$

le théorème se vérifie ainsi.

Donnant maintenant à n une valeur quelconque, je vais montrer que le théorème a lieu, s'il est exact pour le nombre $n-1$.

Soit

$$cx^{n-1}\sin ax$$

le terme de Q sin ax proportionnel à x^{n-1}; on aura

$$\int \frac{\mathrm{N} - cx^{n-1}\sin ax}{x^n}\,dx = -\frac{\mathrm{N} - cx^{n-1}\sin ax}{(n-1)x^{n-1}}$$
$$+ \frac{1}{(n-1)}\int \frac{d(\mathrm{N} - cx^{n-1}\sin ax)}{dx}\,\frac{dx}{x^{n-1}}.$$

Comme

$$\frac{cx^{n-1}\sin ax}{x^n}, \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{N} - cx^{n-1}\sin ax}{x^n},$$

conservent une valeur finie pour $x = 0$, la quantité

$$\frac{\mathrm{N} - cx^{n-1}\sin ax}{x^{n-1}}$$

s'évanouit à cette limite. Il en est de même pour $x = \infty$, parce que $\mathrm{N} - cx^{n-1} \sin ax$ ne contient, hors des signes trigonométriques, que des puissances de x égales ou inférieures à x^{n-2}. D'ailleurs, dans l'expression

$$\frac{d(\mathrm{N} - cx^{n-1} \sin ax)}{dx} = \left[\frac{d\mathrm{P}}{dx} + a(\mathrm{Q} - cx^{n-1})\right] \cos ax + \left[\frac{d(\mathrm{Q} - cx^{n-1})}{dx} - a\mathrm{P}\right] \sin ax + \frac{d\mathrm{R}}{dx},$$

il est clair que le coefficient de sin ax contiendra seulement les puissances x^{n-2}, x^{n-4}, $x^{n-6}, \ldots$, et celui de cos ax et $\frac{d\mathrm{R}}{dx}$ seulement x^{n-3}, $x^{n-5}, \ldots$, conditions requises pour que le théorème soit applicable; et comme il a lieu pour le nombre $n - 1$, on aura

$$\int_0^\infty \frac{d(\mathrm{N} - cx^{n-1} \sin ax)}{dx} \frac{dx}{x^{n-1}} = \frac{\pm q'}{1.2.3\ldots(n-2)} \frac{\pi}{2},$$

q' étant le terme indépendant de x du coefficient de sin ax dans l'expression

$$\frac{d^{n-1}(\mathrm{N} - cx^{n-1} \sin ax)}{dx^{n}} = \frac{d^{n-1}\mathrm{N}}{dx^{n-1}} - c\,\frac{d^{n-1}(x^{n-1} \sin ax)}{dx^{n-1}}.$$

Le seul terme de cette espèce, donné par l'expression

$$\frac{d^{n-1}(x^{n-1} \sin ax)}{dx^{n-1}},$$

étant

$$(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1,$$

et celui qui provient de

$$\frac{d^{n-1}\mathrm{N}}{dx^{n-1}}$$

étant égal à q, on aura

$$q' = q - 1.2.3\ldots(n-1)c.$$

Par conséquent,

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{N} - cx^{n-1} \sin ax}{x^n} dx = \frac{1}{n-1} \int_0^\infty \frac{d(\mathrm{N} - cx^{n-1} \sin ax)}{dx} \frac{dx}{x^{n-1}} = \frac{\pm q'}{1.2.3\ldots(n-1)} \frac{\pi}{2},$$

et

$$\int_0^\infty \frac{N}{x^n} = c\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx \pm \frac{q}{1.2.3\ldots(n-1)}\frac{\pi}{2} \mp c\frac{\pi}{2} = \frac{\pm q}{1.2.3\ldots(n-1)}\frac{\pi}{2}.$$

L'équation (5) a donc lieu pour le nombre n; et puisqu'elle est exacte pour $n = 2$, elle est généralement vraie.

Maintenant, faisons

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} N = P_1 \cos a_1x + Q_1 \sin a_1x + P_2 \cos a_2x + Q_2 \sin a_2x \\ + P_3 \cos a_3x + Q_3 \sin a_3x + \ldots + R, \end{aligned}\right.$$

en désignant par a_1, a_2, a_3,... des constantes, par P_1, P_2, P_3,... et R des polynômes contenant les seules puissances x^{n-2}, x^{n-4},... et par Q_1, Q_2,... des polynômes contenant seulement x^{n-1}, x^{n-3},...; ces dernières conditions sont nécessaires et suffisantes pour que

$$\frac{N}{x^n}$$

soit une fonction paire de x et s'évanouisse pour $x = \infty$. Si, en outre, elle reste finie pour $x = 0$, il faudra pour cela qu'en développant les sinus et cosinus contenus dans N, les puissances x^{n-2}, x^{n-4},... disparaissent identiquement. Si donc on désigne par

$$R_1,\quad R_2,\quad R_3,\ldots$$

l'ensemble des termes d'ordre inférieur à x^n fournis par le développement de

$$P_1 \cos a_1 x + Q_1 \sin a_1x,$$
$$P_2 \cos a_2 x + Q_2 \sin a_2x,\ldots,$$

on devra avoir identiquement

$$R + R_1 + R_2 + R_3 + \ldots = 0,$$

et N prendra la forme

$$N = P_1 \cos a_1x + Q_1 \sin a_1x - R_1 + P_2 \cos a_2x + Q_2 \sin a_2x - R_2 + \ldots$$

Les expressions

$$\frac{P_1 \cos a_1 x + Q_1 \sin a_1 x - R_1}{x^n},$$
$$\frac{P_2 \cos a_2 x + Q_2 \sin a_2 x - R_2}{x^n}, \ldots$$

étant toutes des fonctions paires qui restent finies pour $x = 0$ et s'évanouissent pour $x = \infty$, l'équation (5) aura lieu pour chacune d'elles; en ajoutant les résultats, on aura

$$\int_0^\infty \frac{N}{x^n} dx = \frac{\pm q_1 \pm q_2 \pm q_3 \pm \ldots}{1.2.3\ldots(n-1)} \frac{\pi}{2},$$

les quantités $q_1, q_2, \ldots$ étant les termes indépendants de x des coefficients respectifs de

$$\sin a_1 x, \quad \sin a_2 x, \ldots$$

dans l'expression

$$\frac{d^{n-1} N}{dx^{n-1}},$$

et le signe + ou — devant être choisi devant chacun d'eux suivant que celle des quantités a_1, $a_2, \ldots$ à laquelle il correspond est positive ou négative.

Toute fonction entière N de x, et des expressions (2), telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N}{x^n} dx$$

ait une valeur finie et déterminée, peut être ramenée à la forme (6); mais il n'est pas nécessaire d'opérer cette réduction pour connaître la somme

$$\pm q_1 \pm q_2 \pm q_3 \ldots \tag{7}$$

et par conséquent la valeur de l'intégrale. Il suffira de former l'expression

$$\frac{d^{n-1} N}{dx^{n-1}},$$

et après avoir supprimé tous les termes qui contiennent x hors des signes sinus ou cosinus, de calculer l'expression (7) pour chacun de ceux qui restent, ce qui peut se faire immédiatement sans autre réduction. On reconnaîtra, par exemple, que cette somme, pour un terme de la forme

$$\sin ax \cos a'x,$$

est égal à ± 1 ou à 0 suivant que $a - a'$ et $a + a'$ sont ou non de même signe. Généralement elle est égale à $+ 1$ pour un terme

$$\sin ax (\cos a'x)^\alpha (\cos a''x)^\beta (\cos a'''x)^\gamma \ldots$$

si a étant positif surpasse la somme des valeurs numériques de

$$\alpha a', \quad \beta a'', \quad \gamma a''', \ldots.$$

L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N dx}{(x-h)^n},$$

où h est une constante réelle, se ramène aux précédentes en changeant x en $h + x$. Il en sera de même de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N dx}{F(x)},$$

où $F(x)$ est une fonction entière de x. On décomposera chaque terme de

$$\frac{N}{F(x)}$$

en fractions rationnelles. Celles qui correspondent à des racines réelles de

$$F(x) = 0$$

pourront s'intégrer par la méthode précédente. Celles, au contraire, qui dépendent des racines imaginaires étant de la forme

$$\frac{N}{(x^2 + r^2)^n},$$

où r est une constante réelle, s'intégreront aisément en les déduisant des formules connues

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{x^2+r^2} = \frac{e^{-ar}}{r}\frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\infty \frac{x\sin ax\,dx}{x^2+r^2} = e^{-ar}\frac{\pi}{2},$$

par des différentiations par rapport à r.

Tous les résultats qui précèdent ont beaucoup d'analogie avec ceux auxquels conduit le calcul des résidus, et pourraient sans doute être obtenus par ce calcul. Mais j'ai pensé qu'il ne serait pas inutile d'y arriver directement. Sans déterminer aucune intégrale définie qui ne pût être connue par d'autres méthodes, ils pourront servir à en abréger le calcul.