JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CELLÉRIER

Note sur la détermination d'une fonction arbitraire

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 245-254.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__245_0>

NOTE

SUR LA DÉTERMINATION D'UNE FONCTION ARBITRAIRE;

PAR M. CELLÉRIER.

Cette Note a pour objet de déterminer la forme d'une fonction arbitraire soumise aux conditions suivantes :

Désignons par t, x, y, z, quatre variables qui seront, si l'on veut, le temps et les trois coordonnées d'un point quelconque de l'espace ; et faisons

$$(1) \qquad \varphi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{M} e^{(ux+vy+wz+st)\sqrt{-1}}\, du\, dv\, dw,$$

en représentant par M une fonction donnée des variables u, v, w, par rapport auxquelles s'effectue l'intégration, et par s une fonction donnée de la quantité

$$\sqrt{u^2+v^2+w^2},$$

que nous désignerons par h.

Nommons φ' une autre fonction de x, y, z, t, de la forme

$$(2) \qquad \varphi' = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{M}' e^{(u'x+v'y+w'z+st)\sqrt{-1}}\, du'\, dv'\, dw',$$

en représentant par s une fonction connue de la quantité

$$h' = \sqrt{u'^2+v'^2+w'^2},$$

mais telle qu'à une même valeur de s dans l'une et l'autre intégrale répondent des valeurs différentes de h et h'. Quant à M', c'est une fonction inconnue de u', v', w', qui doit être telle que l'on ait

$$\varphi' = \varphi,$$

quel que soit t, pour toutes les valeurs de x, y, z satisfaisant à l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2,$$

où l désigne une constante donnée. Notre but est précisément de trouver cette fonction M'.

Si l'on fait, dans la formule (1),

$$u = h\cos\alpha, \quad v = h\sin\alpha\cos 6, \quad w = h\sin\alpha\sin 6,$$

et dans la formule (2),

$$u' = h'\cos\alpha, \quad v' = h'\sin\alpha\cos 6, \quad w' = h'\sin\alpha\sin 6;$$

puis, dans l'une et l'autre,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$
$$x = r\cos\psi, \quad y = r\sin\psi\cos\theta, \quad z = r\sin\psi\sin\theta,$$

et

$$\cos\psi\cos\alpha + \sin\psi\sin\alpha\cos(\theta - 6) = p.$$

Si, enfin, on considère à présent M et M' comme des fonctions, la première de h, α, 6, et la seconde de h', α, 6, on devra faire

$$du\, dv\, dw = h^2 \sin\alpha dh\, d\alpha\, d6,$$
$$du'\, dv'\, dw' = h'^2 \sin\alpha dh' d\alpha\, d6;$$

puis, étendre les intégrations relatives à h et h' de o à l'infini; celles relatives à α de o à π, π étant le rapport de la circonférence au diamètre, et enfin celles relatives à 6 de o à 2π.

On trouvera ainsi

$$\varphi = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathrm{M}\, e^{(hrp+st)\sqrt{-1}}\, h^2 \sin\alpha dh\, d\alpha\, d6,$$

$$\varphi' = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathrm{M}' e^{(h'rp+st)\sqrt{-1}}\, h'^2 \sin\alpha dh' d\alpha d6.$$

L'équation

$$\varphi = \varphi'$$

devra avoir lieu, quels que soient t, ψ, θ, et pour la valeur particulière,

$$r = l.$$

Il faut d'abord pour cela que les éléments de φ et φ' correspondant à une même valeur de s soient égaux; et en considérant h, h' comme des fonctions connues de s, et changeant par conséquent dh et dh' en

$$\frac{dh}{ds}\,ds, \quad \frac{dh'}{ds}\,ds,$$

sous les signes d'intégration, il en résulte

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & h^2\frac{dh}{ds}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{M}\,e^{hlp\sqrt{-1}}\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta \\ & = h'^2\frac{dh'}{ds}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{M}'e^{h'lp\sqrt{-1}}\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta, \end{aligned}\right.$$

relation qui doit avoir lieu quels que soient s, ψ, θ.

On sait qu'en désignant par ρ une quantité réelle numériquement inférieure à l'unité, et par P_n le coefficient de ρ^n dans le développement de

$$(1 - 2p\rho + \rho^2)^{-\frac{1}{2}},$$

suivant les puissances ascendantes de ρ, on aura, quelle que soit la fonction de p représentée par $f(p)$,

$$(4)\quad f(p) = \sum\left(\frac{2n+1}{2}\right)\mathrm{P}_n\int_{-1}^{+1} f(p)\,\mathrm{P}_n\,dp,$$

la somme $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs du nombre entier n, depuis 0 jusqu'à l'infini.

Appliquons ce mode de développement à la fonction

$$e^{hlp\sqrt{-1}} = \cos(hlp) + \sqrt{-1}\sin(hlp),$$

on trouvera

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \cos(hlp) &= \sum\left(\frac{2n+1}{2}\right)\mathrm{P}_n\int_{-1}^{+1}\cos(hlp)\,\mathrm{P}_n\,dp, \\ \sin(hlp) &= \sum\left(\frac{2n+1}{2}\right)\mathrm{P}_n\int_{-1}^{+1}\sin(hlp)\,\mathrm{P}_n\,dp. \end{aligned}\right.$$

On sait que l'expression P_n est donnée par la formule

$$P_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n}\frac{d^n(p^2-1)^n}{dp^n}.$$

D'ailleurs, comme $(p^2-1)^n$ et ses coefficients différentiels des $n-1$ premiers ordres s'annulent par la supposition de $p=\pm 1$, on trouvera en intégrant par partie, et faisant successivement n égal à un nombre pair $2m$ et à un nombre impair $2m+1$,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{-1}^{+1}\cos(hlp)\,\frac{d^{2m}(p^2-1)^{2m}}{dp^{2m}}\,dp = (-1)^m\,(hl)^{2m}\int_{-1}^{+1}(p^2-1)^{2m}\,\cos(hlp)\,dp,\\
&\int_{-1}^{+1}\sin(hlp)\,\frac{d^{2m}(p^2-1)^{2m}}{dp^{2m}}\,dp = (-1)^m\,(hl)^{2m}\int_{-1}^{+1}(p^2-1)^{2m}\,\sin(hlp)\,dp,\\
&\int_{-1}^{+1}\cos(hlp)\,\frac{d^{2m+1}(p^2-1)^{2m+1}}{dp^{2m+1}}\,dp = (-1)^m\,(hl)^{2m+1}\int_{-1}^{+1}(p^2-1)^{2m+1}\,\sin(hlp)\,dp,\\
&\int_{-1}^{+1}\sin(hlp)\,\frac{d^{2m+1}(p^2-1)^{2m+1}}{dp^{2m+1}}\,dp = (-1)^{m+1}(hl)^{2m+1}\int_{-1}^{+1}(p^2-1)^{2m+1}\cos(hlp)\,dp.
\end{aligned}\right.$$

Il est clair, en outre, que la deuxième et la troisième de ces valeurs sont nulles, parce que les intégrales

$$\int_{-1}^{+1}(p^2-1)^{2m}\sin(hlp)\,dp,\quad \int_{-1}^{+1}(p^2-1)^{2m+1}\sin(hlp)\,dp,$$

se composent d'éléments égaux deux à deux et de signes contraires.

En faisant, pour abréger, $hl=\gamma$, on a

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\cos\gamma p\,dp = \frac{\sin\gamma}{\gamma};$$

puis, en différentiant $2i$ fois par rapport à γ, i étant un entier quelconque,

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}p^{2i}\cos\gamma p\,dp = (-1)^i\,\frac{d^{2i}\left(\frac{\sin\gamma}{\gamma}\right)}{d\gamma^{2i}}$$

$$= \left[\frac{1}{\gamma} - \frac{2i(2i-1)}{\gamma^3} + \frac{2i(2i-1)(2i-2)(2i-3)}{\gamma^5} - \ldots\right]\sin\gamma$$

$$+ \left[\frac{2i}{\gamma} - \frac{2i(2i-1)(2i-2)}{\gamma^3} + \frac{2i(2i-1)(2i-2)(2i-3)(2i-4)}{\gamma^5} - \ldots\right]\frac{\cos\gamma}{\gamma}.$$

En développant $(p^2 - 1)^n$ dans l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (p^2 - 1)^n \cos \gamma p \, dp,$$

et calculant chaque terme par la formule précédente, on trouvera

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} (p^2 - 1)^n \cos \gamma p \, dp \\ = &\frac{\sin \gamma}{\gamma}\left[1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots\right] \\ + &\frac{\cos \gamma}{\gamma^2}\left[2n - \frac{n}{1}(2n-2) + \frac{n(n-1)}{1.2}(2n-4) - \ldots\right] \\ - &\frac{\sin \gamma}{\gamma^3}\left[2n(2n-1) - \frac{n}{1}(2n-2)(2n-3) + \frac{n(n-1)}{1.2}(2n-4)(2n-5) - \ldots\right] \\ - &\frac{\cos \gamma}{\gamma^4}\left[2n(2n-1)(2n-2) - \frac{n}{1}(2n-2)(2n-3)(2n-4) + \ldots\right] + \ldots, \end{aligned}$$

série dont la loi est facile à saisir. Les coefficients de

$$\frac{\sin \gamma}{\gamma}, \quad \frac{\cos \gamma}{\gamma^2}, \quad -\frac{\sin \gamma}{\gamma^3}, \quad -\frac{\cos \gamma}{\gamma^4}, \text{ etc.},$$

sont les valeurs des expressions

$$(x^2 - 1)^n, \quad \frac{d(x^2-1)^n}{dx}, \quad \frac{d^2(x^2-1)^n}{dx^2}, \ldots$$

quand, après avoir développé $(x^2 - 1)^n$ et effectué les différentiations, on pose $x = 1$.

Or la valeur $x = 1$ annule évidemment l'expression

$$(x^2 - 1)^n$$

et ses coefficients différentiels des $n - 1$ premiers ordres.

Si donc l'on fait successivement $n = 2m$ et $n = 2m + 1$, on aura

$$(7) \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} (p^2 - 1)^{2m} \cos \gamma p \, dp \\ &= (-1)^m \left[\frac{\sin \gamma}{\gamma^{2m+1}} \frac{d^{2m}(x^2-1)^{2m}}{dx^{2m}} + \frac{\cos \gamma}{\gamma^{2m+2}} \frac{d^{2m+1}(x^2-1)^{2m}}{dx^{2m+1}} - \frac{\sin \gamma}{\gamma^{2m+3}} \frac{d^{2m+2}(x^2-1)^{2m}}{dx^{2m+2}} - \ldots\right], \\ &\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} (p^2 - 1)^{2m+1} \cos \gamma p \, dp \\ &= (-1)^m \left[\frac{\cos \gamma}{\gamma^{2m+2}} \frac{d^{2m+1}(x^2-1)^{2m+1}}{dx^{2m+1}} - \frac{\sin \gamma}{\gamma^{2m+3}} \frac{d^{2m+2}(x^2-1)^{2m+1}}{dx^{2m+2}} - \text{etc.}\ldots\right], \end{aligned}\right.$$

en faisant toujours $x = 1$ après les différentiations.

En désignant par i, i' deux entiers quelconques, on a

$$\frac{d^i(x^2-1)^n}{dx^i} = \frac{d^i[(x-1)^n(x+1)^n]}{dx^i} = (x+1)^n\frac{d^i(x-1)^n}{dx^i} + \frac{n}{1}\frac{d(x+1)^n}{dx}\frac{d^{i-1}(x-1)^n}{dx^{i-1}} + \ldots;$$

puis, faisant successivement $i=n$, $i=n+i'$, et dans les deux cas $x=1$, après les différentiations

$$\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} = (x+1)^n\frac{d^n(x-1)^n}{dx^n} = 1.2.3\ldots n.2^n,$$

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+i'}(x^2-1)^n}{dx^{n+i'}} &= \frac{(n+i')(n+i'-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots i'}\frac{d^{i'}(x+1)^n}{dx^{i'}}\frac{d^n(x-1)^n}{dx^n}\\ &= 1.2.3\ldots n.2^n\frac{(n+i')(n+i'-1)(n+i'-2)\ldots(n-i'+1)}{2.4.6\ldots 2i'}.\end{aligned}$$

Par conséquent, en faisant successivement $i'=1, 2, 3,\ldots$ et substituant les résultats dans les formules (7), elles deviennent

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(p^2-1)^{2m}\cos\gamma p\,dp\\ &= (-1)^m\,1.2.3\ldots(2m)\,2^{2m}\left[\frac{\sin\gamma}{\gamma^{2m+1}} + \frac{(2m+1)2m}{2}\frac{\cos\gamma}{\gamma^{2m+2}} - \frac{(2m+2)(2m+1)2m(2m-1)}{2.4}\frac{\sin\gamma}{\gamma^{2m+3}} - \ldots\right],\\ &\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(p^2-1)^{2m+1}\cos\gamma p\,dp\\ &= (-1)^m 1.2.3\ldots(2m+1)2^{2m+1}\left[\frac{\cos\gamma}{\gamma^{2m+2}} - \frac{(2m+2)(2m+1)}{2}\frac{\sin\gamma}{\gamma^{2m+3}} - \frac{(2m+3)(2m+2)(2m+1)2m}{2.4}\frac{\cos\gamma}{\gamma^{2m+4}} + \ldots\right].\end{aligned}\right.$$

Si dans les seconds membres de ces équations, on substituait partout

$$\sin(2\gamma-\gamma'),\quad \cos(2\gamma-\gamma'),$$

à $\sin\gamma$ et $\cos\gamma$, en désignant par γ' une constante indéterminée, ils coïncideraient évidemment avec les valeurs des expressions

$$(9)\quad 1.2.3\ldots(2m)\frac{d^{2m}\left[\dfrac{\sin(2\gamma-\gamma')}{\gamma^{2m+1}}\right]}{d\gamma^{2m}},\quad 1.2.3\ldots(2m+1)\frac{d^{2m+1}\left[\dfrac{\sin(2\gamma-\gamma')}{\gamma^{2m+2}}\right]}{d\gamma^{2m+1}},$$

obtenues en regardant γ' comme constante dans les différentiations relatives à γ. Mais si l'on fait $\gamma' = \gamma$ après les différentiations, comme

$$\sin(2\gamma - \gamma'), \text{ et } \cos(2\gamma - \gamma'),$$

se réduisent à $\sin \gamma$ et $\cos \gamma$, la substitution d'une de ces valeurs à l'autre sera permise dans cette hypothèse, et les deux formules (8) pourront être réduites à une seule, savoir

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(p^2-1)^n \cos \gamma p\, dp = 1.2.3\ldots n \frac{d^n\left[\frac{\sin(2\gamma-\gamma')}{\gamma^{n+1}}\right]}{d\gamma^n},$$

en posant $\gamma' = \gamma$ après les différentiations.

Comme d'ailleurs on a

$$\frac{d^n\left[\frac{\sin(2\gamma-\gamma')}{\gamma^{n+1}}\right]}{d\gamma^n} = \cos\gamma' \frac{d^n\left(\frac{\sin 2\gamma}{\gamma^{n+1}}\right)}{d\gamma^n} - \sin\gamma' \frac{d^n\left(\frac{\cos 2\gamma}{\gamma^{n+1}}\right)}{d\gamma^n},$$

valeur où γ' ne se trouve qu'en dehors des signes de la différentiation, on trouve, en y faisant immédiatement $\gamma' = \gamma$,

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(p^2-1)^n \cos\gamma p\, dp = 1.2.3\ldots n\left[\cos\gamma \frac{d^n\left(\frac{\sin 2\gamma}{\gamma^{n+1}}\right)}{d\gamma^n} - \sin\gamma \frac{d^n\left(\frac{\cos 2\gamma}{\gamma^{n+1}}\right)}{d\gamma^{n+1}}\right].$$

Si donc on fait, pour abréger,

$$\cos\gamma \frac{d^n\left(\frac{\sin 2\gamma}{\gamma^{n+1}}\right)}{d\gamma^n} - \sin\gamma \frac{d^n\left(\frac{\cos 2\gamma}{\gamma^{n+1}}\right)}{d\gamma^n} = f(\gamma, n),$$

les formules (6) deviendront

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\cos(hlp)\frac{d^{2m}(p^2-1)^{2m}}{dp^{2m}}dp = (-1)^m\, 1.2.3\ldots(2m)(hl)^{2m} f(hl, 2m),$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\sin(hlp)\frac{d^{2m}(p^2-1)^{2m}}{dp^{2m}}dp = 0,$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\cos(hlp)\frac{d^{2m+1}(p^2-1)^{2m+1}}{dp^{2m+1}}dp = 0,$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\sin(hlp)\frac{d^{2m+1}(p^2-1)^{2m+1}}{dp^{2m+1}}dp = (-1)^{m+1}\, 1.2.3\ldots(2m+1)(hl)^{2m+1} f(hl, 2m+1).$$

Ces valeurs étant substituées dans les formules (5), il en résultera

$$(10)\quad \begin{cases} \cos(hlp) = \sum(-1)^m\ (4m+1)\left(\frac{hl}{2}\right)^{2m} f(hl,\ 2m)\,P_{2m}, \\ \sin(hlp) = \sum(-1)^{m+1}(4m+3)\left(\frac{hl}{2}\right)^{2m+1} f(hl,\ 2m+1)\,P_{2m+1}, \end{cases}$$

les sommes $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs entières de m depuis zéro jusqu'à l'infini. Ces séries sont rapidement convergentes, car l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(p^2-1)^n \cos\gamma p\,dp = 1.2.3\ldots n f(\gamma,\ n),$$

décroissant évidemment quand n augmente, l'expression $f(\gamma,\ n)$ décroît aussi et même plus rapidement que

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}.$$

Les équations (10) donnent ensuite

$$(11)\qquad e^{hlp\sqrt{-1}} = \sum(-\sqrt{-1})^n(2n+1)\left(\frac{hl}{2}\right)^n f(hl,\ n)\,P_n.$$

On trouverait, de même,

$$(12)\qquad e^{h'lp\sqrt{-1}} = \sum(-\sqrt{-1})^n(2n+1)\left(\frac{h'l}{2}\right)^n f(h'l,\ n)\,P_n.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (3), et qu'on fasse, en même temps,

$$U_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} M P_n \sin\alpha\,d\alpha\,d\theta,$$

$$U'_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} M' P_n \sin\alpha\,d\alpha\,d\theta,$$

on aura

$$(13)\quad \begin{cases} h^2\frac{dh}{ds}\sum(-\sqrt{-1})^n\left(\frac{hl}{2}\right)^n f(hl,\ n)\,U_n \\ = h'^2\frac{dh'}{ds}\sum(-\sqrt{-1})^n\left(\frac{h'l}{2}\right)^n f(h'l,\ n)\,U'_n. \end{cases}$$

D'après les propriétés connues des fonctions de ψ, θ, représentées par U_n, U'_n, on a, pour deux nombres entiers quelconques n' et n, pourvu qu'ils soient différents l'un de l'autre,

$$(14)\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_{n'} U_n \sin\psi\, d\psi\, d\theta = 0, \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_{n'} U'_n \sin\psi\, d\psi\, d\theta = 0,$$

et pour $n' = n$,

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_n U_n \sin\psi\, d\psi\, d\theta = \frac{4\pi}{2n+1} V_n, \\ &\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} P_n U'_n \sin\psi\, d\psi\, d\theta = \frac{4\pi}{2n+1} V'_n, \end{aligned}\right.$$

en indiquant par V_n, V'_n ce que deviennent U_n, U'_n quand on y change ψ, θ en α, β; de sorte qu'en désignant par N ce que devient M par le changement inverse de α, β en ψ, θ, on aura

$$(16)\qquad V_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} N P_n \sin\psi\, d\psi\, d\theta.$$

En outre, M et M' seront données par les développements convergents

$$\begin{aligned} M &= V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + \ldots, \\ M' &= V'_0 + V'_1 + V'_2 + V'_3 + \ldots. \end{aligned}$$

Maintenant, l'équation (13) ayant lieu par hypothèse, pour toutes les valeurs de ψ, θ, si on la multiplie par

$$P_m \sin\psi\, d\psi\, d\theta,$$

où m est un entier quelconque, et qu'on intègre par rapport à ψ et θ entre les limites

$$\psi = 0, \quad \psi = \pi; \quad \theta = 0, \quad \theta = 2\pi;$$

tous les termes de $\sum$ disparaîtront dans les deux membres, sauf celui où $n = m$. En vertu des équations (14) et (15), on aura donc

$$h^{m+2}\frac{dh}{ds} f(hl, m)\, V_m = h'^{m+2}\frac{dh'}{ds} f(h'l, m)\, V'_m.$$

Cette relation donne la valeur de V'_m au moyen de V_m qui se tire de l'équation (16). Il en résulte donc

$$M' = V'_0 + V'_1 + V'_2 + \dots$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{\frac{dh}{ds}}{\frac{dh'}{ds}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} N \sum \left\{ (2m+1) \frac{h^{m+2}}{h'^{m+2}} \frac{f(hl, m)}{f(h'l, m)} P_m \right\} \sin\psi \, d\psi \, d\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{dh}{dh'} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} N \sum \left\{ (2m+1) \left(\frac{h'}{h}\right)^{m-1} \frac{\cos hl \dfrac{d^m \left(\dfrac{\sin 2hl}{l^{m+1}}\right)}{dl^m} - \sin hl \dfrac{d^m \left(\dfrac{\cos 2hl}{l^{m+1}}\right)}{dl^m}}{\cos h'l \dfrac{d^m \left(\dfrac{\sin 2h'l}{l^{m+1}}\right)}{dl^m} - \sin h'l \dfrac{d^m \left(\dfrac{\cos 2h'l}{l^{m+1}}\right)}{dl^m}} P_m \right\} \sin\psi \, d\psi \, d\theta.$$

De la sorte M' se trouve entièrement déterminé en fonction de α, θ, puisque N se déduit de la fonction donnée M par un simple changement des lettres α, θ en ψ, θ.