JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ANATOLE DE CALIGNY

COMBES

Nouveau système de fontaines intermittentes sous-marines. Théorie et modèle fonctionnant

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 23-45.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__23_0>

NOUVEAU SYSTÈME

DE

FONTAINES INTERMITTENTES

SOUS-MARINES.

THÉORIE ET MODÈLE FONCTIONNANT;

PAR ANATOLE DE CALIGNY.

SUIVI D'UNE NOTE DE M. COMBES.

L'appareil que je vais décrire a pour but, abstraction faite des services qu'il pourra rendre:

1°. D'offrir un nouveau mode de transformation élémentaire du mouvement alternatif irrégulier d'une colonne liquide en mouvement continu, c'est-à-dire dans un même sens, *sans aucune pièce quelconque mobile;*

2°. De donner un moyen de faire des épuisements par l'action d'une force *irrégulière*, sans aucune pièce quelconque mobile;

3°. D'expliquer certains effets que les vagues de la mer produisent sur les puits artésiens ou sur les fontaines naturelles.

Cet appareil peut être expliqué sans figure, sa forme étant analogue à celle d'un grand T dont la tige serait horizontale. Il se compose, quant à sa partie essentielle, de deux tuyaux ouverts à toutes leurs extrémités et dont l'un est branché sur l'autre. Il n'est pas nécessaire qu'ils soient rectilignes, ni qu'ils fassent entre eux un angle droit. Un de ces tuyaux est enfoncé en partie dans un réservoir jusqu'à une certaine profondeur au-dessus du branchement. L'autre tuyau débouche dans un second réservoir dont le niveau est moins élevé que celui du premier.

Une cause quelconque fait osciller l'eau dans la première branche, que l'on peut nommer *branche verticale*, bien qu'elle puisse être inclinée, l'autre étant nommée aussi par convention *branche horizontale*. En vertu de ces oscillations, la pression moyenne de dedans en dehors est moindre que si le liquide était en repos, et il passe à chaque oscillation de l'eau du réservoir inférieur dans le tuyau vertical, d'où elle est périodiquement chassée dans le réservoir supérieur par le bas de ce tuyau. Il y a des époques où la pression de dedans en dehors est plus grande que s'il n'y avait pas d'oscillation; mais, en définitive, il sort, dans tous les cas, plus d'eau du réservoir inférieur qu'il n'y en rentre, jusqu'à ce que son niveau soit descendu à une certaine profondeur s'il n'est pas entretenu par de l'eau à épuiser.

Voici maintenant de quelle manière on rend continu, c'est-à-dire dans le même sens, le mouvement naturellement alternatif dans le tuyau horizontal. On donne à ce tuyau une certaine longueur, ou l'on diminue graduellement son diamètre sur une longueur suffisante de la partie intermédiaire, entre le tuyau vertical et le réservoir à épuiser, pour lui permettre d'emmagasiner de la force vive dans son intérieur, comme un volant en emmagasine par sa masse ou par sa vitesse. Il est facile de voir que, pour une vitesse donnée aux extrémités, il y a plus de force vive emmagasinée dans la masse totale du tuyau horizontal, si la partie intermédiaire est graduellement rétrécie. Il en résulte qu'ici, comme dans un volant, on peut emmagasiner de la force vive soit au moyen de la masse en mouvement, soit au moyen de la vitesse de certaines parties de cette masse. Par cette disposition, le mouvement est entretenu dans un même sens; il suffit qu'en définitive, la somme des actions dans un sens soit plus grande que dans l'autre. Ainsi voilà un mouvement *continu*, produit dans un tuyau horizontal par un mouvement alternatif *irrégulier*, abandonné à lui-même dans un tuyau vertical.

Dans les expériences que j'ai faites, je soufflais alternativement avec la bouche au sommet du tuyau vertical, et, malgré *l'augmentation* de pression qui en résultait évidemment de haut en bas, la diminution moyenne était encore assez grande pour faire baisser de 7 à 8 centimètres le niveau de l'eau dans le réservoir à épuiser avec un petit appareil ayant un tube vertical de 3 centimètres de diamètre, dont le branchement très-court était enfoncé à environ $0^{m},50$ au-dessous du niveau du réservoir.

Quand la force qui fait osciller la colonne liquide est une masse d'eau versée périodiquement sur le haut du tube vertical, si cette eau vient en trop grande quantité, elle enveloppe de l'air dont l'action change l'effet de l'appareil, qui alors refoule de l'eau par le tuyau horizontal au lieu d'en *aspirer*. Je me sers de cette dernière expression parce que l'appareil peut être considéré aussi comme une sorte de pompe aspirante *élévatoire*, sans aucune pièce quelconque mobile quand l'eau verse périodiquement par le sommet.

Cet appareil peut se présenter sous des formes très-irrégulières, et, comme il ne faut pour le constituer qu'un cours d'eau souterrain et une sorte de bout de tuyau formé par une cavité, on doit penser qu'il se présente dans la nature des combinaisons de ce genre, beaucoup plus simples que la plupart de celles qui ont été imaginées pour expliquer les fontaines naturelles. Il est entendu que ma nouvelle explication n'a rien d'exclusif, non plus que celles du mouvement des eaux souterraines, que j'ai présentées dans mon dernier Mémoire, tome VI de ce Journal.

On peut considérer cet appareil, abstraction faite des principes de ceux que je viens de rappeler, comme mis en action au bord de la mer par des flots oscillants dans un creux vertical.

Les Mémoires de la Société géologique de Londres font mention de cours d'eau dans les îles Ioniennes, qui, selon toutes les apparences, se jettent dans la mer, et sont cependant à un niveau moins élevé qu'elle. On n'avait pas encore essayé de donner une explication de ce phénomène par les lois de l'hydrodynamique. Or il est essentiel de remarquer que j'ai fait fonctionner mon appareil en affectant de souffler avec une irrégularité analogue à celle du mouvement varié des flots entre deux rochers.

L'effet de cet appareil étant indépendant de la nature de la force motrice, pourvu que celle-ci n'ait pas pour effet immédiat de pousser de l'air à l'intérieur, il n'y a rien de plus simple que le mouvement dont on parle, et il aspire évidemment, dans certaines localités, l'eau des courants souterrains avec lesquels il est en communication. Il y a donc des circonstances où ces courants peuvent se décharger dans la mer avec plus de force pendant les tempêtes ou les agitations de la mer que pendant le calme. Il ne paraît pas même nécessaire de considérer un cylindre creux, puisque l'effet décrit ne dépend pas précisément de la nature des oscillations, et qu'entre deux rochers ordinaires il se présente souvent des oscillations d'une hauteur considérable.

Peu importe dans ce premier exposé que la succion se fasse comme nous l'avons dit, ou par le principe de la communication latérale du mouvement des fluides de Venturi, qui ne contribue, comme nous l'établirons plus loin, que pour une faible part à l'effet que nous venons de décrire.

Pour faire le calcul de la force de succion qui se présente dans cet appareil, nous supposerons d'abord la masse oscillante constante, comme dans un siphon renversé ordinaire, et nous commencerons par considérer les pressions d'une colonne liquide sur les parois de ce genre de siphon. Cela nous fournira ensuite un moyen d'apprécier la force de succion dont il s'agit dans un simple mouvement oscillatoire vertical.

h étant la hauteur variable du niveau du liquide au-dessus d'un point donné, sur une des parois *verticales* d'un siphon, pris au-dessous de la limite de l'oscillation dans les deux branches ou à cette limite, H la différence variable des niveaux dans les deux branches verticales au même instant, et L la longueur totale de la colonne oscillante; la pression qui serait exprimée par h (le diamètre étant constant), dans l'hypothèse de l'équilibre stable, sera diminuée ou augmentée dans l'état de mouvement, excepté à une seule époque. En effet, si la vitesse s'accélère de haut en bas dans une branche, c'est évidemment parce que la réaction inférieure est moindre dans cette branche que le poids représenté par h, et *vice versâ*, quand la vitesse se ralentit dans la même branche. Il n'y a qu'un instant de transition entre ces deux états du système, celui où les deux extrémités de la colonne arrivent au même niveau. Il est clair que l'influence de l'accélération sur le calcul des pressions est précisément en sens contraire du côté où la colonne monte, et qu'aux deux limites de hauteur la pression peut être sensiblement nulle au pied des branches verticales, si l'une des deux se vide sensiblement en entier à chaque période, tout le poids de la colonne étant employé dans le premier instant à engendrer de la vitesse ou à l'éteindre dans le dernier instant. La force accélératrice ou retardatrice étant exprimée à chaque instant par $\frac{H}{L}$, la pression sur un point donné des branches verticales, soit à la limite inférieure de la course de l'oscillation, soit *au-dessous* dans chaque branche verticale, sera exprimée à chaque instant par

$$h\left(1 \mp \frac{H}{L}\right).$$

Dans le cas où chaque tuyau vertical est périodiquement vidé, le rayon du coude étant supposé très-petit par rapport à la hauteur totale, on a, pour l'origine du mouvement,

$$h = H = L.$$

Soit x le chemin parcouru depuis le commencement de la descente jusqu'à chaque instant considéré, en comptant ce chemin depuis son origine jusqu'au moment où les deux extrémités de la colonne arrivent à un même niveau; on a, dans la première partie de la descente, en faisant $\frac{1}{2}L = R = 1$,

$$H = 2R - 2x, \quad \text{et} \quad h = 2R - x,$$

d'où l'on tire

$$h\left(1 - \frac{H}{L}\right) = (2R - x)\frac{x}{R} = 2x - \frac{x^2}{R} = 2x - x^2.$$

Quant à la dernière moitié de la descente, appelant, pour simplifier, x non plus le chemin parcouru, mais le chemin *qui reste à chaque instant à parcourir,* en considérant que cette quantité est parfaitement symétrique avec celle que nous venons de considérer pendant la première moitié de la descente et que nous avons nommée x, on a, d'après cette seconde notation,

$$x = h \quad \text{et} \quad H = 2R - 2x;$$

on retrouve la même expression $2x - x^2$, en changeant le signe de H.

Or il ne s'agit pas seulement de connaître les pressions ou même leurs moyennes, parce qu'il ne faut pas perdre de vue que les pressions les moins fortes agissent ici plus longtemps que les autres. Le problème est facile à résoudre exactement au moyen de considérations particulières sur la force centrifuge. Il suffit de voir que la force vive varie comme la pression ou comme la quantité

$$2Rx - x^2 = 2x - x^2.$$

Cela étant très-facile à démontrer de la même manière que la formule analogue que j'ai donnée dans un précédent Mémoire, tome III de ce Journal, page 209, je ne m'étendrai pas davantage sur cet objet, pour éviter les répétitions, et je passerai au point essentiel [*].

On admet qu'une colonne liquide, quand elle se *retourne* parallèlement à elle-même comme dans un siphon à branches verticales, exerce à chaque instant des pressions dont la résultante verticale est ici *quadruple* de la pression représentée en hauteur d'eau par la *hauteur due* à sa vitesse actuelle. Or, à l'instant où les deux extrémités de la colonne arrivent au même niveau, la *hauteur due* à la vitesse, abstraction faite des résistances passives, dans le cas limite dont nous nous occupons, est exprimée par $\frac{1}{4}$ L, puisqu'une longueur égale à $\frac{1}{2}$ L est descendue de $\frac{1}{2}$ L, en entraînant une masse totale double, en quelque sorte comme dans une *machine d'Athwood*. Donc la résultante verticale des pressions exercées à cet instant par la force centrifuge est précisément égale au poids de la colonne totale de la longueur L, poids qui en cet instant exprime, comme nous l'avons dit, la pression verticale totale moins la force centrifuge, cet instant étant le seul où il n'y a ni augmentation ni diminution.

Or, ici la masse étant constante, la force vive est toujours proportionnelle au carré de la vitesse, ou à la *hauteur due* à la vitesse. Mais

---

[*] On peut d'ailleurs présenter ce résultat sous la forme suivante :

En vertu du principe des forces vives, le produit de la masse totale en mouvement par la *hauteur due* à la vitesse à chaque instant considéré, est proportionnel au produit de la longueur de la colonne partielle qui a abandonné le sommet du tube, par la hauteur dont est descendu son centre de gravité, quand on la considère en un instant donné comme ayant fourni la quantité d'eau passée dans l'autre branche. Or il serait facile de voir, au moyen d'une figure, que la force vive, et par suite le carré de la vitesse, puisque la masse est constante, varie comme le produit des deux segments de la course rectiligne de la colonne (un des deux segments étant la partie abandonnée par le liquide), ou comme le carré de l'ordonnée du cercle dont le diamètre égalerait la course totale de l'oscillation. Il est facile de voir que cela revient à la formule écrite dans le texte, en y conservant la lettre $R = 1$.

nous avons vu que cette *hauteur due*, à laquelle la force centrifuge est proportionnelle, est aussi toujours proportionnelle à la pression sur l'origine inférieure de la branche verticale; donc, *à tous les instants*, cette dernière pression est égale à la résultante verticale des forces centrifuges, puisqu'elle y est égale pendant un instant, et il en est ainsi à fortiori de leurs moyennes par rapport au temps. C'est la somme de ces deux espèces de pressions qui compose la pression totale, et si l'on admet, comme on va d'ailleurs le prouver, que la somme des deux moyennes est égale au poids de la colonne en repos absolu, il en résulte, puisque ces moyennes sont égales, que l'état d'oscillation diminue précisément de moitié le poids apparent, dont l'autre moitié se *retrouve en force centrifuge, mais n'agit que dans la partie courbe*.

Il n'est peut-être pas évident à priori que l'état de mouvement d'un système de corps ne peut pas changer son poids moyen, en ce sens qu'il se retrouve en forces centrifuges, percussions, etc., puisque l'opinion de Du Buat, et d'après lui, de quelques auteurs [*], sur la diminution des pressions dans les rivières à mouvement uniforme, semble au fond tout à fait contraire à ce résultat, comme Bernard l'a remarqué dans son ouvrage intitulé : *Principes d'hydraulique*, page 172; il n'est donc pas inutile de le démontrer.

Supposons qu'un vase soit tenu en équilibre au moyen de forces directement opposées à celles de la pesanteur. On sait, par le principe de la conservation du centre de gravité, que si l'on n'introduit pas de forces étrangères dans le système, le centre de gravité de son ensemble doit rester en repos malgré l'état d'ondulation quelconque de l'eau qu'il renferme. Si donc le centre de gravité de cette eau descend d'un mouvement accéléré, c'est parce qu'à cette époque, les forces qui agissent sur l'eau en tirant le vase de bas en haut sont moindres que le poids total du liquide en repos. Si le centre de gravité de cette eau monte d'un mouvement accéléré, c'est le contraire qui a lieu, et *vice versâ* si le mouvement est retardé. Il en résulte que si les mouvements de bas en haut et de haut en bas sont symétriques, et qu'en définitive,

---

[*] Du Buat n'avait établi son opinion que sur des expériences très-curieuses, mais incomplétement expliquées.

le mouvement du centre de gravité de tout l'ensemble solide et liquide soit nul, *le poids moyen* du liquide en mouvement sera le même que dans l'état de repos absolu.

Bien que l'on pût voir, au moyen de ce résultat, ce que devient la pression exercée par suite du mouvement du liquide sur le fond du vase, en supposant ce vase invariable de position, cela devient encore plus clair, abstraction faite des résistances passives, quand on considère les oscillations d'une colonne liquide dans un siphon renversé ordinaire à branches verticales, puisqu'alors tout est symétrique.

J'ai pensé que ces considérations générales sur le mouvement du centre de gravité pourraient donner plus d'évidence au principe que j'avais d'abord déduit des lois de la communication du mouvement. Il est d'ailleurs facile de voir directement que, si un corps isolé tombe d'une certaine hauteur sur un plan horizontal dans le vide, la somme totale des pressions ou réactions, par rapport au temps, exercées sur le plan, sera égale à la somme des pressions motrices ou retardatrices de la pesanteur, par rapport au temps, pendant que le corps ne touche pas le plan. Ainsi, en définitive, la pression moyenne n'aura pas changé sur le fond du système horizontal, si l'on considère le mouvement depuis l'instant où le corps a une vitesse donnée jusqu'à celui où il repasse par la même vitesse dirigée en sens contraire. Le raisonnement sera le même si l'on considère un système quelconque de corps en mouvement, quelles que soient les liaisons ou réactions mutuelles. Ainsi le *poids moyen* est le même que pour l'état de repos dans toutes les hypothèses, en considérant une durée assez longue et ayant égard à ce qui vient d'être dit.

Revenons maintenant au cas le plus général des oscillations dans un siphon renversé à branches verticales, abstraction faite des résistances passives. La solution du problème sur la diminution de la pression moyenne au point donné dans les branches verticales devient extrêmement simple, puisqu'il suffit d'apprécier la résultante moyenne verticale de la force centrifuge, cette résultante étant précisément la partie à déduire de la somme totale des deux espèces de pressions verticales moyennes qui doit être égale au poids de la colonne liquide en repos stable. Or nous savons que la pression moyenne de la force centrifuge varie comme la force vive moyenne, laquelle varie comme l'expression ci-dessus. Il suffit donc de déterminer le rapport de la force vive moyenne à la course de ces oscillations isochrones. Or, comme je l'ai dit dans mes précédents Mémoires, la partie soulevée au-dessus du niveau d'équilibre stable dans les deux branches étant précisément en raison du chemin que la force parcourt à chaque oscillation, la force vive moyenne est comme le carré de la course de chaque oscillation. Ainsi la quantité dont la pression moyenne est diminuée est en raison de ce carré. En définitive, si l'on nomme H_0 la différence de hauteur des niveaux à l'origine de l'oscillation, la quantité dont il faut diminuer, par suite de l'état du mouvement, la valeur de la pression moyenne dans l'état de repos absolu, ou d'équilibre stable dans les deux branches, est évidemment

$$\frac{H_0^2}{4L}.$$

Si l'on pose $H_0 = L$, cette quantité devient $\frac{1}{4}L$; c'est précisément ce que l'on trouve *pour cette limite* par le calcul ci-dessus, d'après lequel la pression moyenne est diminuée de moitié à l'origine de chaque branche dont chacune a une hauteur égale à $\frac{1}{2}$ L.

L'expression de la diminution de pression moyenne, provenant dans un siphon du mouvement d'une colonne liquide oscillante, peut servir à apprécier approximativement la diminution analogue résultant de l'oscillation d'une colonne liquide dans un simple tuyau rectiligne enfoncé en partie au milieu d'un réservoir. Il est facile de voir que si la masse en oscillation pouvait être considérée comme sensiblement constante, la force accélératrice étant sensiblement moitié moindre que dans un siphon, pour une masse donnée analogue, la diminution de pression dont il s'agit serait aussi moitié moindre, abstraction faite des résistances passives. Il semblerait assez difficile de tenir compte des résistances passives (pour ce cas particulier de diminution dans les pressions), si elles étaient considérables par rapport à la force accélératrice, la question se compliquant encore, surtout dans le cas où les tuyaux sont très-courts par rapport à la course de l'oscillation, de ce que la partie de la course comprise au-dessous du niveau du réservoir est d'abord bien plus grande que la partie comprise au-dessus. Il est clair que, dans cette hypothèse, il serait impossible de regarder la masse oscillante comme assez sensiblement constante et que la moyenne serait même difficile à déterminer.

Les phénomènes de l'écrasement du pied de la colonne ne sont pas d'ailleurs encore assez connus pour que l'on puisse en conclure de combien une diminution donnée dans cette moyenne pourrait diminuer la pression moyenne de la colonne oscillante vers son extrémité inférieure [*].

L'appareil pour les épuisements, objet principal de la présente Note, pouvant peut-être offrir par la suite quelques avantages à l'industrie en utilisant le mouvement des flots sur des côtes, le long desquelles il paraît que leur agitation se transmet assez loin des régions où les vents les ont soulevés pour qu'on n'y puisse pas utiliser ces vents, nous ferons la remarque suivante sur les phénomènes de l'espèce d'écrasement dont on vient de parler. Quand on fait déboucher sous le niveau d'un réservoir un robinet d'où sort de l'eau colorée ayant un mouvement permanent, la veine prend une forme très-évasée à une petite distance de l'orifice, parce que le mouvement a le temps de se propager par communication latérale à l'eau du réservoir, de manière à produire cet effet. Mais l'évasement est plus allongé quand une colonne sort par le bas d'un tube, avec un mouvement alternatif, qui n'a pas le temps de se communiquer latéralement de la même manière que dans un mouvement permanent. Ainsi j'ai enfoncé en partie dans un réservoir un siphon renversé d'un diamètre analogue à celui du tube dont j'ai parlé plus haut, et dont les branches étaient très-inégales en hauteur. Ce siphon étant rempli d'eau et la longue branche étant bouchée avec la main,

---

[*] Si l'on faisait abstraction du mouvement de l'eau dans l'intérieur du réservoir, on trouverait, par des moyens qui ne sont pas assez rigoureux pour que je m'y arrête, que, dans la descente, la limite de la vitesse, à chaque instant, serait celle d'un corps grave tombant dans le vide, en supposant la gravité diminuée de moitié. On trouverait alors pour chaque instant donné que la pression de dedans en dehors du tube vertical serait exprimée par la moitié de la hauteur actuelle de la colonne liquide en ce point, et, en tenant compte de la durée de chaque pression élémentaire, on trouverait que la diminution de la pression moyenne à l'origine inférieure du tube serait exprimée par le tiers de la hauteur du niveau du réservoir au-dessous de cette origine inférieure. Cela s'obtient au moyen d'une intégrale algébrique facile à trouver; mais il est d'autant plus inutile d'insister sur ce calcul dont les bases ne sont pas d'ailleurs assez rigoureuses, que, par suite des résistances passives, la diminution de pression sera sans doute encore moindre que nous ne l'avons indiqué, ou que le quart de la hauteur du niveau du réservoir au-dessus de l'origine du tuyau.

tandis que la courte branche était enfoncée en entier au-dessous du niveau du réservoir, on débouchait subitement la première et la colonne liquide, se précipitant de bas en haut, venait couper par un *bouillon* assez régulier le niveau du réservoir. On avait ainsi un moyen d'apprécier l'évasement du tronc de cône liquide, dont l'angle dépend évidemment de la hauteur de la colonne de chasse. Je ne parle d'ailleurs ici de ce fait, que pour donner une idée des moyens dont on pourra se servir dans l'étude de cet appareil s'il doit plus tard être utile à l'industrie, et pour ajouter seulement que la masse en mouvement dans le réservoir ne peut pas être négligée dans les calculs; de sorte que l'expérience seule peut éclaircir complétement cette matière, comme on le verra dans un prochain travail sur les ajutages divergents. Ce qu'il y a de certain, c'est que la nouvelle force de succion, mise en jeu dans cet appareil, est assez puissante. On peut remarquer, qu'abstraction faite de ses applications, elle servira à varier encore les formes des appareils sans pièce mobile quelconque, que j'ai décrits dans le tome VI de ce Journal, et qui sont en forme de $\int$.

Pour étudier maintenant l'action d'un ensemble quelconque de colonnes liquides les unes sur les autres, il faut se bien rendre compte du principe de la succion dont il s'agit et du peu de puissance qu'exerce ici, relativement à cette succion, le phénomène de la communication latérale du mouvement simplement rectiligne des liquides observé par Venturi.

On sait par expérience qu'en général les surfaces mouillées exercent sur l'eau dans les canaux un frottement moindre que celles qui ne le sont pas encore; c'est du moins ce que dit Bossut d'après ses propres observations, et cela semble très-rationnel. La communication latérale du mouvement rectiligne dans les liquides provient de quelque chose d'analogue à ce qu'on est convenu d'appeler frottement des liquides. Quand il ne s'agira, comme dans le cas présent, que d'apprécier à beaucoup près ce frottement sur un point donné d'un tuyau, c'est-à-dire en craignant seulement de l'apprécier au-dessous de sa valeur réelle, il est clair qu'on pourra s'en former une idée au moyen du frottement connu de l'eau dans un tuyau de diamètre donné. En effet, s'il y avait une erreur à craindre, elle serait sans doute en sens contraire de celle que l'on commettra dans le cas présent, l'eau retenue aux parois fixes devant faire éprouver plus de résistance que si elle se laissait entraîner librement, surtout si l'on a égard à la chance quelconque de rencontrer des aspérités solides, malgré la couche d'eau qui les tapisse. Or l'abaissement du niveau de l'eau dans le réservoir latéral de notre appareil étant d'environ un sixième ou un septième de la course de la colonne oscillante au-dessous du niveau du réservoir supérieur, il est facile de voir que le frottement sur la seule section normale à l'axe du tube latéral, par laquelle la colonne verticale peut agir sur celle du tuyau horizontal, est tout à fait insuffisant pour donner lieu à un pareil abaissement. En effet, d'après les expériences de Dubuat sur des tuyaux de diamètres analogues à celui du tube dont je me suis servi, il faut un frottement sur une longueur d'une trentaine de fois ce diamètre pour perdre sur la hauteur du réservoir moteur, dans un mouvement uniforme, une fraction de cette hauteur égale à la *hauteur due* à la fraction de la vitesse (*due à la hauteur totale*), qui est observée dans le tuyau. D'après des expériences d'Eytelwein sur des tuyaux d'un diamètre analogue, *d'une petite longueur* analogue aussi à celle de notre tuyau, le coefficient du frottement est encore moindre; enfin, d'après mes propres expériences que j'ai rapportées dans mes précédents Mémoires, le coefficient est encore moindre dans le mouvement oscillatoire que dans le mouvement uniforme. On voit donc qu'il faudrait un frottement sur une étendue beaucoup plus grande que la seule section du tuyau latéral pour diminuer d'une quantité bien moins considérable que nous ne l'avons dit la hauteur du niveau dans le réservoir latéral, quand même la vitesse de la couche frottante serait égale à celle qu'un corps acquerrait en tombant dans le vide de toute la hauteur du niveau le plus élevé. Or il est évident que cette vitesse sera toujours bien moindre, puisqu'elle rencontre de l'eau à soulever. Si d'ailleurs on tenait compte des mouvements irréguliers sur la section frottante, ce serait plutôt une raison pour penser qu'il y aurait une action en sens contraire de la succion. Au reste, en faisant tomber une colonne liquide dans le tube vertical portant à angle droit sa tubulure latérale, alors assez courte pour que l'on vît passer l'eau s'il devait en jaillir de ce côté, j'ai constaté qu'il en passe fort peu par cette tubulure dans ce mouvement de chute rapide.

Il résulte de ce qui vient d'être dit que la succion opérée par ce nouvel appareil oscillant ne provient pas du principe de la communication latérale du mouvement dans les liquides, au moins quant à sa partie la plus considérable à beaucoup près. Voyons quel en est le véritable principe; bien qu'à la rigueur ce qui a été dit dans le théorème ci-dessus pût être suffisant, il est toujours utile de se rendre compte de la raison des choses, d'une manière en quelque sorte sensible.

Quand une pression agit sur un corps fixe, elle s'exerce, comme on sait, avec plus d'intensité que si ce corps cède. C'est par cette raison que pour le mouvement uniforme de l'eau dans les tuyaux de conduite, D. Bernoulli a trouvé la pression moindre que dans l'état de repos, et c'est aussi, par la même raison que, sans aucune déviation de filets fluides et abstraction faite de toute communication latérale du mouvement, nous avons trouvé une diminution de pression si notable provenant de l'état d'oscillation des colonnes liquides dans de simples tubes verticaux et dans des siphons renversés. Mais il faut bien faire attention que ce n'est pas *l'état de mouvement* en lui-même qui détermine ce phénomène provenant de ce que le point d'application d'une force *cède* en prenant du mouvement. Il faut prendre garde de mal interpréter la loi de D. Bernoulli, qui n'est établie que pour le mouvement permanent.

Pour nous former une idée bien nette sur ce sujet, supposons qu'un siphon renversé ordinaire, à branches verticales d'égales hauteurs, soit disposé sous le fond d'un réservoir avec lequel il est en communication, et dont la hauteur d'eau soit précisément égale à la *hauteur due* à la vitesse uniforme dans ce siphon où l'on fait abstraction des résistances passives. D'après le théorème de D. Bernoulli, dans les branches verticales la pression sur un point donné de la paroi est exprimée par la hauteur du niveau du réservoir au-dessus de ce point moins la *hauteur due* à vitesse, hauteur égale, en vertu de l'hypothèse, à celle du niveau de l'eau au-dessus de la naissance du siphon. Or, si l'on supprime instantanément ce réservoir, puisque la pression de celui-ci ne s'exerçait pas sur le siphon, il en résulte que les pressions dans les branches verticales seront partout égales à ce qu'elles seraient si dans cet instant le liquide était en repos. Ce qui se passe alors est parfaitement analogue à ce qui se présente à l'époque où, dans un siphon renversé, une colonne liquide oscillante arrive par ses deux extrémités à un même niveau. Comme il ne s'agit ici que d'un mode de démonstration, nous n'avons point considéré ce qui se passe dans le coude ou aux environs, par suite de la force centrifuge, non plus que le *bouillon* ou *champignon* de sortie, le tube étant d'ailleurs censé avoir un assez grand développement. Mais il nous a semblé que les considérations précédentes éclairciraient bien le principe de mécanique objet de ce travail, en s'accordant d'ailleurs avec le calcul ci-dessus.

Pour achever d'éclaircir le principe de l'appareil objet de cet article et son utilité dans l'étude des applications proposées, il faut considérer les expériences en variant de trois manières bien distinctes le mode de la succion sur lequel il repose, et pour cela reprendre l'appareil tel que nous l'avons d'abord décrit :

1°. Quand la partie du tube vertical qui est au-dessous du tube horizontal n'avait qu'environ deux fois la longueur de son diamètre et se terminait par des parois vives, il n'y avait, à proprement parler, rien de bien nouveau dans le mode de succion parfaitement analogue à celle que Venturi, et avant lui Bernoulli, ont observée dans les ajutages comme provenant de la contraction de la veine fluide. Seulement on n'avait pas observé cette succion dans le mouvement *oscillatoire* d'une veine liquide.

2°. Quand on augmentait la longueur de cette sorte d'ajutage (qui n'est que le prolongement du tube vertical au-dessous du tube horizontal) de deux fois environ la longueur de son diamètre, alors l'abaissement dans le réservoir latéral était diminué de plus de moitié. L'addition d'une si petite longueur produit cette diminution, évidemment parce que les filets liquides ont parcouru le chemin nécessaire pour se redresser beaucoup mieux avant de passer devant le tube latéral, ce qui modifie le phénomène de la succion par la contraction de la veine liquide.

3°. On conservait cette longueur d'ajutage ainsi augmentée, on le terminait inférieurement par un entonnoir convenablement évasé, au lieu de le terminer par de simples parois vives; alors, malgré la même augmentation de longueur, plus encore celle de la partie évasée, on obtenait cependant un abaissement de niveau dans le réservoir latéral aussi grand que dans le cas où l'ajutage à parois vives n'avait qu'une longueur d'environ deux fois le diamètre du tube vertical, bien que la colonne s'élevât plus haut dans le tube.

C'est en ceci que consiste le phénomène dont nous avons particulièrement à nous occuper ici, parce qu'il en résulte que l'état d'oscillation quelconque, même abstraction faite des phénomènes de succion dans les ajutages, diminue en général la moyenne des pressions à une certaine profondeur au-dessous du niveau d'équilibre stable d'une masse liquide. Pour mieux encore préciser cette idée, je ferai mention ici d'un phénomène parfaitement analogue dans un siphon renversé d'égal diamètre partout, et portant latéralement un tube normal à son axe, débouchant de la même manière dans un réservoir latéral. Je l'ai observé avec des tubes de même diamètre que ci-dessus. Mais il faut évidemment, pour bien faire l'expérience, que le réservoir n'ait qu'un diamètre analogue à celui du siphon; l'eau de ce petit réservoir baissait jusqu'à une certaine profondeur au-dessous du niveau d'équilibre stable de la colonne oscillante, et cela pendant plusieurs périodes consécutives.

Il faut maintenant revenir sur un détail essentiel dans ce genre d'appareils, non-seulement dans le but de bien faire voir quelques-unes de leurs propriétés, mais dans celui de montrer les précautions à prendre pour que les expériences précédentes soient concluantes.

Quand le tube latéral est très-court, il y a des époques où l'eau est repoussée de dedans en dehors du tube vertical au lieu d'y être aspirée. Or, si l'on n'avait pas un moyen de se débarrasser de ce mouvement alternatif, il resterait quelque doute sur un point capital; il serait, en effet, difficile de savoir si une partie essentielle de la force de succion ne serait pas seulement apparente, et ne proviendrait pas tout simplement de ce que l'eau du tube latéral éprouverait moins de résistances passives dans un sens que dans l'autre.

Le moyen de se débarrasser de cette difficulté est, comme je l'ai dit plus haut, parfaitement analogue pour nos pièces fixes à celui que l'on emploie dans les machines à pièces mobiles où l'on *emmagasine* la force vive dans une masse, de manière à ce que son mouvement persiste toujours dans un même sens, bien que la résistance surpasse périodiquement la puissance.

Si le tuyau latéral a une longueur analogue à celle du tuyau vertical et un diamètre égal partout, cette longueur ne suffit pas pour que la force vive s'emmagasine dans la colonne horizontale de façon à ce que la vitesse persévère toujours dans un même sens. Mais si l'on rétrécit graduellement la partie intermédiaire, en disposant entre deux tubes coniques un tube plus étroit que leur plus grande base, alors il n'en est plus ainsi, pourvu que le diamètre de ce tube intermédiaire ne soit pas encore trop grand par rapport à celui de ces extrémités. Il n'est pas, du reste, nécessaire que les raccords soient exécutés d'une manière bien parfaite. Le tuyau intermédiaire n'ayant qu'un diamètre d'environ les deux cinquièmes de celui de ces extrémités, il y avait encore un mouvement de va-et-vient dans ce tuyau; mais, pour le rendre tout à fait sans oscillation rétrograde dans cette partie, il suffisait d'introduire dans ce tuyau un tube de verre à parois un peu épaisses, d'un diamètre environ moitié moindre.

La composante de la pression du vent qui s'exerce de haut en bas semblerait, au premier aperçu, devoir compenser les diminutions dans les pressions des colonnes liquides oscillantes entre les rochers, par suite du mouvement des flots. Je remarquerai d'abord, à ce sujet que la pression, motrice s'exerçait aussi précisément de haut en bas dans les expériences que j'ai rapportées, où cependant la succion latérale était très-puissante par rapport à la course verticale de la colonne en oscillation au-dessous d'un niveau extérieur. Je remarquerai, en second lieu, que la puissance de cette succion est d'autant plus évidente que les résistances passives sont moindres; or, dans les grandes masses liquides en oscillation entre les rochers, les résistances passives seront, en général, bien moindres par rapport à la force vive que dans des tubes d'un petit diamètre.

Pour se rendre compte de la manière dont les choses se passent, il faut faire attention que les flots ne se soulèvent pas instantanément. Ils s'élèvent graduellement sous l'action de la force motrice, en augmentant de grandeur comme toutes les oscillations sur lesquelles une force motrice agit alternativement. Il en résulte qu'en définitive le poids des flots est très-considérable par rapport à celui auquel on pourrait comparer la force du vent sur une surface d'une grandeur analogue à leur base. La Coudraye, pour en donner une idée très-imparfaite et vraisemblablement bien au-dessous de la vérité, a trouvé dans un essai de calcul que le poids des flots est plus de cent soixante-seize fois plus grand que la force du vent qui les entretient, estimée en poids d'une manière analogue. Or, en supposant avec lui les oscillations sensiblement isochrones, on pourait obtenir un résultat plus approché de la vérité en observant de combien les flots baissent en un temps donné après la cessation du vent. On sait d'ailleurs que la mer est assez longtemps à se calmer pour que la différence de deux élévations consécutives soit en général très-faible. La force du vent qui maintenait les flots à une hauteur donnée, en faisant équilibre aux résistances passives, était donc aussi très-faible par rapport au poids de la masse liquide soulevée au-dessus du niveau de l'eau tranquille. On voit, d'après cela, que s'il en est ainsi jusqu'à un certain point pour les masses liquides en balancement dans les rochers qui d'ailleurs abritent plus ou moins le sommet de ces masses liquides, il y a nécessairement des localités où elles exercent une assez puissante succion à l'embouchure des cours d'eau souterrains qui se jettent dans la mer ou dans les grands lacs.

Tout ce que nous venons de dire suppose seulement que les colonnes liquides se balancent entre les rochers, abstraction faite encore du système de mouvements intérieurs qui se présente dans les flots. Mais il résulte des expériences que j'ai faites sur le mouvement des flots dans un canal rectangulaire, que sur le fond du canal les molécules ont un mouvement de va-et-vient analogue à celui de l'eau dans la branche horizontale d'un siphon renversé. Ces expériences ne pouvant être bien décrites que dans une Note séparée, j'énonce seulement ici ce fait, afin de faire pressentir que les considérations objet de cet article ne doivent pas être négligées dans le calcul des actions mutuelles des grandes masses d'eau, et que du moins, même abstraction faite des longues colonnes liquides en balancement dans les rochers, il y a lieu de penser que les vagues les plus régulières doivent, dans les détroits, donner lieu à des succions sur l'embouchure des cours d'eau souterrains. Dans les régions supérieures des masses liquides en ondulation, il se présente des espèces de tourbillons elliptiques dans des plans verticaux; nous verrons de quelle manière on doit y avoir égard.

CONCLUSIONS.

Il résulte des expériences et des considérations précédentes, que le mouvement oscillatoire des liquides présente une nouvelle cause de succion, bien distincte des phénomènes de succion dans les ajutages et de communication latérale du mouvement dans les liquides.

L'appareil objet de cette Note offre un nouveau principe de transformation élémentaire du mouvement alternatif *irrégulier* en mouvement *continu sans pièce mobile*, qui pourra être appliqué aux appareils décrits dans mes précédents Mémoires. Toutes les nouvelles transformations élémentaires peuvent d'ailleurs être susceptibles d'applications ultérieures, abstraction faite de celles que l'inventeur peut proposer lui-même.

Il serait sans doute difficile de prévoir le degré d'utilité que ce nouvel appareil sans pièce mobile pourra avoir dans l'application de la puissance des flots ou *d'un moteur quelconque irrégulier*; mais on peut au moins le considérer comme le premier essai qui ait été proposé pour expliquer par les lois de l'hydraulique les phénomènes curieux du mouvement des eaux qui, partant d'un niveau inférieur à celui de la mer autour des îles où elles se trouvent, semblent cependant ne s'écouler que dans la mer. On verra, dans un prochain Mémoire sur les ondes, comment les principes précédents modifient de diverses manières les actions mutuelles des masses liquides en ondulation [*].

---

[*] Le principe de la puissance de succion qui vient d'être developpé ayant, comme on le verra dans un prochain Mémoire, beaucoup plus d'utilité qu'on ne pourrait le penser au premier aperçu, M. Combes a bien voulu, à ma prière, le vérifier par des moyens analytiques différents de ceux que j'avais employés; il est parvenu au même résultat que moi et m'a autorisé à publier la Note suivante à la fin du présent travail. L'accord des résultats obtenus par des méthodes si différentes est un sûr garant de leur exactitude.

Calcul de la pression exercée dans le sens vertical par une colonne liquide d'un diamètre uniforme oscillant dans un siphon à branches verticales; par M. Combes.

Si une colonne fluide *amb* oscille dans un siphon à branches verticales, la pression que le liquide exerce sur le siphon dans le sens vertical varie à chaque instant, avec la position et la vitesse de la colonne liquide. Si l'on désigne par q le poids spécifique du liquide, par a la section constante de la colonne, par L sa longueur développée, par H la distance verticale variable entre le niveau du fluide, dans les deux branches, par P la pression que le fluide exerce sur le siphon dans le sens vertical, on a

$$\mathrm{P} = qa\mathrm{L} + \frac{qa}{\mathrm{L}}(\mathrm{H}_0^2 - 2\mathrm{H}^2),$$

H_0 désignant la valeur initiale de H, la hauteur sous laquelle l'oscillation a commencé.

Le poids de la colonne liquide est $qa\mathrm{L}$. Il est augmenté, pendant la durée de l'oscillation, de $\frac{qa}{\mathrm{L}}(\mathrm{H}_0^2 - 2\mathrm{H}^2)$, quantité qui peut être négative, positive ou nulle.

Ainsi, au commencement de l'oscillation, on a

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_0, \quad \mathrm{P} = qa\mathrm{L} - \frac{qa}{\mathrm{L}}\mathrm{H}_0^2;$$

le poids est diminué de celui d'une colonne liquide ayant pour hauteur $\frac{\mathrm{H}_0^2}{\mathrm{L}}$.

A la fin de l'oscillation, on a également

$$\mathrm{H} = -\mathrm{H}_0, \quad \mathrm{H}^2 = \mathrm{H}_0^2, \quad \mathrm{P} = qa\mathrm{L} - \frac{qa}{\mathrm{L}}\mathrm{H}_0^2.$$

Au milieu de l'oscillation, quand le fluide est de niveau dans les deux branches, $\mathrm{H} = 0$; le poids est augmenté de $\frac{qa\mathrm{H}_0^2}{\mathrm{L}}$, autant qu'il est diminué au commencement et à la fin de l'oscillation. C'est le maximum de l'augmentation, comme le maximum de la diminution.

Le poids moyen, pendant toute la durée d'une oscillation, est égal au poids de la colonne liquide elle-même.

Ce poids moyen est l'intégrale $\frac{\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{P}\,dt}{\mathrm{T}}$, T désignant la durée d'une oscillation complète. Or on a

$$\mathrm{T} = \frac{\pi\sqrt{\mathrm{L}}}{\sqrt{2g}},$$

et il est facile de voir que l'intégrale

$$\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{H}^2 dt = \frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{H}_0^2\sqrt{\mathrm{L}}}{\sqrt{2g}},$$

de sorte que

$$\mathrm{H}_0^2\mathrm{T} = 2\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{H}^2\,dt,$$

T désignant toujours la durée complète d'une oscillation.

L'équation multipliée par dt et intégrée entre les limites o et T, se réduit, en conséquence, à

$$\int_0^T \mathrm{P}\,dt = qa\mathrm{L} \times \mathrm{T},$$

d'où

$$\frac{\int_0^T \mathrm{P}\,dt}{\mathrm{T}} = qa\mathrm{L},$$

poids de la colonne liquide en équilibre.

Si les branches du siphon n'étaient point verticales, on aurait pour la pression sur le siphon, dans le sens de la verticale,

$$\mathrm{P} = qa\mathrm{L} + \frac{qa}{g}u^2(\cos\gamma_0 - \cos\gamma_1) - qa\frac{\mathrm{H}^2}{\mathrm{L}},$$

équation dans laquelle u est la vitesse du liquide à l'instant que l'on considère, γ_0, γ_1 les angles respectifs que forment avec la verticale les tangentes aux deux extrémités de l'axe de la colonne liquide oscillante. Si le tube est recourbé, γ_1 est toujours un angle obtus dont le cosinus est négatif. Quand les deux branches sont verticales, on a

$$\cos\gamma_0 - \cos\gamma_1 = 1 + 1 = 2;$$

et comme on a aussi

$$u^2 = \frac{g}{2\mathrm{L}}(\mathrm{H}_0^2 - \mathrm{H}^2),$$

on retombe sur la formule donnée d'abord.

Si l'appareil se réduit à un simple tube vertical, dans lequel une colonne d'eau tombe librement, on a

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad \cos\gamma_0 - \cos\gamma_1 = 1 - 1 = 0.$$

D'ailleurs $\mathrm{H} = \mathrm{L}$, et l'on trouve $\mathrm{P} = 0$, ce qui est évident.

Ces formules sont une conséquence du principe de d'Alembert, ou du principe des forces vives.

Quand un corps pesant, soumis à des liaisons quelconques, prend un mouvement, le *poids moyen* de ce corps, dans le système dont il fait partie, est égal à son propre poids, toutes les fois que l'on prend ce poids moyen pendant un intervalle de temps, au commencement et à la fin duquel les vitesses du corps pesant dans le *sens vertical*, sont égales et de même sens. Cette proposition est une conséquence des premières notions sur les forces. En effet, soient Q le poids réel d'un corps, P son poids dans le système, c'est-à-dire l'action que ce corps exerce sur le système, dans le sens vertical, de haut en bas, et que le système exerce à son tour sur lui dans le sens vertical de bas en haut,

u_0, u_1 les vitesses du corps, dans le sens vertical, au commencement et à la fin d'un temps donné T. On a, conformément aux principes de la proportionnalité des forces aux quantités de mouvement qu'elles impriment, et de l'indépendance de l'action des forces, ou de leurs composantes,

$$QT - \int_0^T P\,dt = \frac{Q}{g}(u_1 - u_0).$$

Si donc $u_1 = u_0$,

$$\int_0^T P\,dt = QT; \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce principe, vrai pour un corps pesant, s'étend à un ensemble quelconque de corps pesants, même quand on suppose que ces corps sont liés entre eux d'une manière quelconque, ou même s'attirent et se repoussent mutuellement.

Le poids moyen de l'ensemble dans le système sera égal au poids réel de l'ensemble, toutes les fois que ce poids moyen sera pris pendant un intervalle de temps aux extrémités duquel les sommes algébriques des quantités de mouvement de tous les corps pesants, *dans le sens vertical*, seront égales entre en elles. En effet, pour un seul corps pesant, on a

$$QT - \int_0^T P\,dt = \frac{Q}{g}(u_1 - u_0),$$

P désignant ici la résultante de toutes les forces de liaison appliquées au poids Q, estimées dans le sens vertical de bas en haut, y compris les actions des autres corps sur le corps Q.

On a, de même, pour un autre corps qui pèse Q′,

$$Q'T - \int_0^T P'\,dt = \frac{Q'}{g}(u'_1 - u'_0);$$

pour un troisième, dont le poids est Q″,

$$Q''T - \int_0^T P''\,dt = \frac{Q''}{g}(u''_1 - u''_0);$$

etc.

Ajoutant toutes ces équations,

$$(Q + Q' + Q'' + \ldots)T - \int_0^T (P + P' + P'' + \ldots)\,dt$$
$$= \frac{Q}{g}u_1 + \frac{Q'}{g}u'_1 + \frac{Q''}{g}u''_1 + \ldots - \left(\frac{Q}{g}u_0 + \frac{Q'}{g}u'_0 + \frac{Q''}{g}u''_0 + \ldots\right).$$

Si le second membre est nul, le premier l'est aussi. Donc

$$(Q + Q' + Q'' + \ldots)\, T = \int_0^T (P + P' + P'' + \ldots)\, dt.$$

Or, dans la somme $P + P' + P'' + \ldots$, les forces d'attraction et de répulsion mutuelle disparaissent naturellement, parce qu'elles sont deux à deux égales et directement opposées (action et réaction); il ne reste donc plus que la somme des actions des points fixes du système sur l'ensemble des poids. Donc, etc.

Ainsi, dans l'oscillation d'un pendule, le poids moyen du pendule dans le système est égal à son poids réel, si l'on prend ce poids moyen pendant une demi-oscillation descendante, ou pendant une demi-oscillation montante, parce que, au commencement et à la fin de ces intervalles, les vitesses verticales du pendule sont égales (elles sont nulles).

Dans une colonne liquide qui oscille, quelle que soit sa forme, le poids moyen de la colonne est égal à son poids réel, en prenant ce poids moyen pendant une demi-oscillation, c'est-à-dire depuis le moment où la colonne commence à se mouvoir jusqu'au moment où son centre de gravité est au point le plus bas, ou pendant une oscillation entière.

Lorsqu'une colonne liquide oscille dans un siphon à branches verticales, la pression sur un point m de la paroi verticale est donnée par l'équation

$$p = h - \frac{h}{g}\frac{du}{dt};$$

h exprimant la hauteur actuelle du niveau du liquide au-dessus du point considéré, et u la vitesse de la colonne liquide. Comme on a

$$\frac{du}{dt} = g\,\frac{H}{L},$$

cette expression devient

$$p = h\left(1 - \frac{H}{L}\right);$$

L étant la longueur totale de la colonne et H la différence variable du niveau dans les deux branches, qui est d'abord positive, et ensuite négative.

En appelant h_0 et H_0 les valeurs de h et H au commencement de l'oscillation, on a la relation

$$h_0 - h = \frac{1}{2}(H_0 - H),$$

d'où

$$h = h_0 - \frac{1}{2} H_0 + \frac{1}{2} H,$$

et

$$p = \left(h_0 - \frac{1}{2} H_0 + \frac{1}{2} H\right)\left(1 - \frac{H}{L}\right);$$

la pression moyenne pendant l'oscillation

$$\frac{\int_0^T pdt}{T} = h_0 - \frac{1}{2} H_0 + \frac{1}{2} \frac{\int_0^T Hdt}{T} - \frac{h_0 - \frac{1}{2} H_0}{LT} \int_0^T Hdt - \frac{1}{2LT} \int_0^T H^2 dt.$$

T désignant la durée complète d'une oscillation.

Or, l'intégrale

$$\int_0^T Hdt = 0,$$

car on a

$$\int_0^T H dt = \int_0^T \frac{L}{g} du,$$

et la vitesse devient nulle à l'origine et à la fin de l'oscillation : d'un autre côté

$$\int_0^T H^2 dt = \frac{TH_0^2}{2};$$

on a donc, pour la pression moyenne,

$$h_0 - \frac{1}{2} H_0 - \frac{H_0^2}{4L}.$$

La pression sur le point m, dans le cas où le liquide aurait été stagnant et de niveau dans les deux branches, serait évidemment mesurée par la hauteur $h_0 - \frac{1}{2} H_0$. La pression moyenne, dans l'état de mouvement, est donc inférieure à la pression qui aurait lieu, dans l'état de repos, d'une quantité mesurée par une hauteur de colonne liquide égale à $\frac{H_0^2}{4L}$.