JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CATALAN

Note sur une formule relative aux intégrales multiples

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 239-240.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__239_0>

NOTE

SUR UNE FORMULE RELATIVE AUX INTÉGRALES MULTIPLES;

Par E. CATALAN [*].

Cette Note a pour but la détermination de l'intégrale d'ordre n,

$$(1)\quad A = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\dots\varphi_n(x_n)\,f(x_1 + x_2 + \dots + x_n)\,dx_1\,dx_2\dots dx_n.$$

Considérons d'abord, pour plus de simplicité, l'intégrale double

$$(2)\qquad B = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\,f(x_1 + x_2)\,dx_1\,dx_2.$$

Afin de pouvoir séparer les variables, j'emploie la formule de Fourier :

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\alpha u - \alpha x)\,f(u)\,du.$$

Elle donne, en remplaçant x par $x_1 + x_2$,

$$B = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\,dx_1\,dx_2 \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\alpha u - \alpha x_1 - \alpha x_2)\,f(u)\,du.$$

En vertu des relations qui existent entre les lignes trigonométriques et les exponentielles imaginaires, le second membre sera égal à la partie réelle de

$$C = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2)\,dx_1\,dx_2 \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha u - \alpha x_1 - \alpha x_2)\sqrt{-1}}\,f(u)\,du.$$

[*] Ayant cherché à démontrer le théorème de M. *Tchebichef*, je suis arrivé à la formule (7), laquelle ne diffère de celle de ce géomètre que par la manière dont elle est écrite.

Changeant l'ordre des intégrations, nous aurons

$$(3)\quad C = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du \int_0^{\infty} e^{\alpha u\sqrt{-1}}\,d\alpha \int_0^{\infty} \varphi_1(x_1)\,e^{-\alpha x_1\sqrt{-1}}\,dx_1 \int_0^{\infty} \varphi_2(x_2)\,e^{-\alpha x_2\sqrt{-1}}\,dx_2.$$

Posons

$$(4)\quad \psi_1(\alpha) = \int_0^{\infty} \varphi_1(x_1)\,e^{-\alpha x_1\sqrt{-1}}\,dx_1,\quad \psi_2(\alpha) = \int_0^{\infty} \varphi_2(x_2)\,e^{-\alpha x_2\sqrt{-1}}\,dx_2,$$

$$(5)\quad F(u) = \int_0^{\infty} e^{\alpha u\sqrt{-1}}\,\psi_1(\alpha)\,\psi_2(\alpha)\,d\alpha,$$

d'où

$$(6)\quad C = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,F(u)\,du;$$

et la partie réelle de cette dernière intégrale sera la valeur de B.

La méthode que nous venons d'employer est évidemment générale; donc, pour trouver l'intégrale (1), nous ferons

$$\psi_1(\alpha) = \int_0^{\infty} \varphi_1(x_1)\,e^{-\alpha x_1\sqrt{-1}}\,dx_1,$$

$$\psi_2(\alpha) = \int_0^{\infty} \varphi_2(x_2)\,e^{-\alpha x_2\sqrt{-1}}\,dx_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_n(\alpha) = \int_0^{\infty} \varphi_n(x_n)\,e^{-\alpha x_n\sqrt{-1}}\,dx_n.$$

$$F(u) = \int_0^{\infty} e^{\alpha u\sqrt{-1}}\,\psi_1(\alpha)\,\psi_2(\alpha)\ldots\psi_n(\alpha)\,d\alpha;$$

et nous aurons

$$(7)\quad A = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,F(u)\,du,$$

pourvu que, dans cette dernière intégrale, nous négligions la partie imaginaire.