JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

TCHEBICHEF

Note sur une classe d'intégrales définies multiples

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 235-238.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__235_0>

NOTE

SUR UNE CLASSE D'INTÉGRALES DÉFINIES MULTIPLES;

PAR M. TCHEBICHEF.

Théorème. « Quelle que soit la forme de la fonction f, on a

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)\,\varphi_3(z)\ldots f(x^m + y^n + z^p + \ldots)\,dx\,dy\,dz\ldots = \int_0^\infty \Phi(u) f(u)\,du,$$

» équation où $\Phi(u)$ se détermine par les fonctions données $\varphi_1(x)$, » $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(z)$,... au moyen des quadratures, en prenant

$$\Phi(u^2) = \frac{\psi(u\sqrt{-1}) - \psi(-u\sqrt{-1})}{2\pi u^2 \sqrt{-1}}, \tag{1}$$

» et

$$\psi(u) = \int_0^\infty e^{-\alpha}\left[\int_0^\infty \varphi_1(x)\,e^{-\frac{\alpha x^m}{u^2}}\,dx \int_0^\infty \varphi_2(y)\,e^{-\frac{\alpha y^n}{u^2}}\,dy \int_0^\infty \varphi_3(z)\,e^{-\frac{\alpha z^p}{u^2}}\,dz\ldots\right] d\alpha. \text{ »} \tag{2}$$

Ce théorème suppose que les fonctions φ_1, φ_2, φ_3,... sont telles que,

1°. $\psi(u)$ et sa dérivée restent finies pour toutes les valeurs réelles et positives de u, ou pour toutes les valeurs imaginaires de u, dont la partie réelle est une quantité positive;

2°. Que la fonction $\psi(u)$ devient zéro pour

$$u = a \pm z\sqrt{-1}, \quad \text{ou} \quad u = z \pm a\sqrt{-1},$$

lorsque $a = \infty$, quelle que soit la valeur de z, pourvu qu'elle soit réelle et positive.

Soient, par exemple,

$$1^{\circ}. \qquad m = n = p = \ldots = 1,$$

$$\varphi_1(x) = x^{a-1}, \quad \varphi_2(y) = y^{b-1}, \quad \varphi_3(z) = z^{c-1}, \ldots;$$

dans ce cas, pour trouver la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots f(x + y + z + \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots,$$

on a d'abord par l'équation (2),

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \int_0^\infty e^{-\alpha} \left[\int_0^\infty x^{a-1} e^{-\frac{\alpha x}{u^2}} dx \int_0^\infty y^{b-1} e^{-\frac{\alpha y}{u^2}} dy \int_0^\infty z^{c-1} e^{-\frac{\alpha z}{u^2}} dz \ldots \right] d\alpha, \\
&= \int_0^\infty e^{-\alpha} \left[\left(\frac{u^2}{\alpha}\right)^a \Gamma(a) \left(\frac{u^2}{\alpha}\right)^b \Gamma(b) \left(\frac{u^2}{\alpha}\right)^c \Gamma(c) \ldots \right] d\alpha \\
&= \Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c) \ldots u^{2(a+b+c+\ldots)} \int_0^\infty e^{-\alpha} \alpha^{-(a+b+c+\ldots)} d\alpha \\
&= \Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c) \ldots \Gamma(1 - a - b - c - \ldots)\, u^{2(a+b+c+\ldots)},
\end{aligned}$$

et en substituant cette valeur de $\psi(u)$ dans l'équation (1), on trouve

$$\begin{aligned}
\Phi(u^2) &= \Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)\ldots\Gamma(1-a-b-c-\ldots) \frac{(\sqrt{-1})^{2(a+b+c+\ldots)} \; (-\sqrt{-1})^{2(a+b+c+\ldots)}}{2\pi\sqrt{-1}} u^{2(a+b+c+\ldots-1)} \\
&= \Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)\ldots\Gamma(1-a-b-c-\ldots) \frac{\sin \frac{\pi}{2}(a+b+c+\ldots)}{\pi} u^{2(a-b+c+\ldots-1)}.
\end{aligned}$$

Cette équation donne

$$\Phi(u) = \Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)\ldots\Gamma(1-a-b-c-\ldots) \frac{\sin \frac{\pi}{2}(a+b+c+\ldots)}{\pi} u^{a+b+c+\ldots-1}.$$

Mais, d'après une propriété connue de la fonction Γ, on a

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2}(a+b+c+\ldots)}{\pi} \Gamma(1-a-b-c-\ldots) = \frac{1}{\Gamma(a+b+c+\ldots)};$$

donc l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots f(x+y+z+\ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots$$
$$= \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)\ldots}{\Gamma(a+b+c+\ldots)} \int_0^\infty u^{a+b+c+\ldots-1} f(u)\, du,$$

ce qui a déjà été démontré par M. Liouville.

2°. Soient

$$m = n = p = \ldots = 2,$$
$$\varphi_1(x) = \cos ax, \quad \varphi_2(y) = \cos by, \quad \varphi_3(z) = \cos cz, \ldots,$$

on aura, pour trouver l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \cos ax \cos by \cos cz \ldots f(x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots,$$

d'abord

$$\psi(u) = \int_0^\infty e^{-\alpha} \left[\int_0^\infty \cos ax\, e^{-\frac{\alpha x^2}{u^2}} dx \int_0^\infty \cos by\, e^{-\frac{\alpha y^2}{u^2}} dy \int_0^\infty \cos cz\, e^{-\frac{\alpha z}{u^2}} dz \ldots \right] d\alpha$$
$$= \int_0^\infty e^{-\alpha} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} u\, e^{-\frac{a^2u^2}{4\alpha}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} u\, e^{-\frac{b^2u^2}{4\alpha}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} u\, e^{-\frac{c^2u^2}{4\alpha}} \times \ldots \right] d\alpha$$
$$= u^\mu \frac{\pi^{\frac{\mu}{2}}}{2^\mu} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha - \frac{\rho u^2}{4\alpha}}}{\alpha^{\frac{\mu}{2}}}\, d\alpha,$$

où μ désigne le nombre des variables $x, y, z, \ldots$, et $\rho = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots$.
Mais on sait que, pour un nombre impair μ, on a

$$u^\mu \frac{\pi^{\frac{\mu}{2}}}{2^\mu} \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha - \frac{\rho u^2}{4\alpha}}}{\alpha^{\frac{\mu}{2}}}\, d\alpha = u^\mu \frac{\pi^{\frac{\mu}{2}}}{2^\mu} \frac{\sqrt{\pi}}{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}} \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}} . e^{-u\sqrt{\rho}}}{\left(d.\rho \frac{u^2}{4}\right)^{\frac{\mu-1}{2}}}$$
$$= u^\mu \frac{\pi^{\frac{\mu+1}{2}}}{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}} \left(\frac{4}{u^2}\right)^{\frac{\mu-1}{2}} \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}} e^{u\sqrt{\rho}}}{(d\rho)^{\frac{\mu-1}{2}}};$$

donc

$$\psi(u) = \frac{1}{(-1)^{\mu-1}} \frac{\pi^{\frac{\mu+1}{2}}}{2} u \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}} . e^{-u\sqrt{\rho}}}{(d\rho)^{\frac{\mu-1}{2}}},$$

et

$$\Phi(u^2) = \frac{\psi(\sqrt{-1}) - \psi(-u\sqrt{-1})}{2\pi u^2 \sqrt{-1}} = \frac{\pi^{\frac{\mu-1}{2}}}{2(-1)^{\mu-1}} \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}} .\cos u\sqrt{\rho}}{(d\rho)^{\frac{\mu-1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{u}};$$

d'où

$$\Phi(u) = \frac{\pi^{\frac{\mu-1}{2}}}{2(-1)^{\mu-1}} \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}} .\cos \sqrt{u\rho}}{(d\rho)^{\frac{\mu-1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{u}};$$

donc, pour un nombre impair des variables x, y, z,..., l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \cos ax \cos by \cos cz \ldots f(x^2+y^2+z^2+\ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots\ldots$$
$$= \frac{\pi^{\frac{\mu-1}{2}}}{2(-1)^{\mu-1}} \int_0^\infty \frac{d^{\frac{\mu-1}{2}} .\cos \sqrt{u\rho}}{(d\rho)^{\frac{\mu-1}{2}}} f(u)\, du,$$

ce qui est le théorème de M. Cauchy (*Journal de l'Ecole Polytechnique*, XIX^e cahier), d'où il déduit, comme cas particulier, la formule de Poisson.