JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

OLINDE RODRIGUES

Note sur l'évaluation des arcs de cercle, en fonction linéaire des sinus ou des tangentes de fractions de ces arcs, décroissant en progression géométrique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 225-234.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__225_0>

NOTE

SUR L'ÉVALUATION DES ARCS DE CERCLE,

EN FONCTION LINÉAIRE DES SINUS OU DES TANGENTES DE FRACTIONS DE CES ARCS, DÉCROISSANT EN PROGRESSION GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. OLINDE RODRIGUES.

1. Soient

$$\frac{x}{a^q},\quad \frac{x}{a^{q+1}},\quad \frac{x}{a^{q+2}},\ldots,\quad \frac{x}{a^{q+m}},$$

$m+1$ arcs décroissants en progression géométrique suivant la raison $\frac{1}{a}$; on aura, par le développement de leurs sinus, les $m+1$ équations suivantes,

$$x = a^q \quad \sin\frac{x}{a^q} + \frac{x^3}{[3]a^{2q}} - \frac{x^5}{[5]a^{4q}} + \frac{x^7}{[7]a^{6q}} \ldots + \frac{(-1)^{p+1}x^{2p+1}\theta_q}{[2p+1]a^{2pq}},$$

$$x = a^{q+1} \sin\frac{x}{a^{q+1}} + \frac{x^3}{[3]a^{2q+2}} - \frac{x^5}{[5]a^{4q+4}} + \frac{x^7}{[7]a^{6q+6}} \ldots + \frac{(-1)^{p+1}x^{2p+1}\theta_{q+1}}{[2p+1]a^{2pq+2p}},$$

$$x = a^{q+2} \sin\frac{x}{a^{q+2}} + \frac{x^3}{[3]a^{2q+4}} - \frac{x^5}{[5]a^{4q+8}} + \frac{x^7}{[7]a^{6q+12}} \ldots + \frac{(-1)^{p+1}x^{2p+1}\theta_{q+2}}{[2p+1]a^{2pq+4p}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x = a^{q+m} \sin\frac{x}{a^{q+m}} + \frac{x^3}{[3]a^{2q+2m}} - \frac{x^5}{[5]a^{4q+4m}} + \frac{x^7}{[7]a^{6q+6m}} \ldots + \frac{(-1)^{p+1}x^{2p+1}\theta_{q+m}}{[2p+1]a^{2pq+2pm}},$$

dans lesquelles θ_q, θ_{q+1}, θ_{q+2},..., θ_{q+m} désignent des fonctions dont la valeur numérique est comprise entre 0 et 1, et p un nombre aussi grand que l'on voudra. Nous représentons généralement par $[s]$ le produit $1.2.3\ldots s$.

En multipliant ces $m+1$ équations par les coefficients successifs du produit

$$\frac{(a^2y-1)(a^4y-1)(a^6y-1)\ldots(a^{2m}y-1)}{(a^2-1)(a^4-1)(a^6-1)\ldots(a^{2m}-1)},$$

développé suivant les puissances ascendantes de y, coefficients que nous représenterons par $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$, et produit que nous désignerons par $\varphi(y, m)$; puis ajoutant ces $m+1$ équations ainsi multipliées, nous trouvons

$$(1)\quad x = \sum_{i=0}^{i=m} A_i a^{q+i} \sin\frac{x}{a^{q+i}} + \frac{u_1 x^{2m+3}}{[2m+3]a^{2q(m+1)}} - \frac{u_2 x^{2m+5}}{[2m+5]a^{2q(m+2)}} + \frac{u_3 x^{2m+7}}{[2m+7]a^{2q(m+3)}} \ldots \frac{(-1)^{p+1} x^{2p+1} \Theta_p}{[2p+1]a^{2qp}},$$

équation dans laquelle,

$$u_1 = (-1)^m \sum_{i=0}^{i=m} \frac{A_i}{a^{2i(m+1)}} = (-1)^m \varphi\{a^{-2(m+1)}, m\} = a^{-m(m+1)},$$

$$u_2 = (-1)^m \sum_{i=0}^{i=m} \frac{A_i}{a^{2i(m+2)}} = (-1)^m \varphi\{a^{-2(m+2)}, m\} = u_1 \left\{\frac{1-a^{-2(m+1)}}{1-a^{-2}}\right\},$$

$$u_3 = (-1)^m \sum_{i=0}^{i=m} \frac{A_i}{a^{2i(m+3)}} = (-1)^m \varphi\{a^{-2(m+3)}, m\} = u_2 \left\{\frac{1-a^{-2(m+2)}}{1-a^{-4}}\right\},$$

. . . .

$$\Theta_p = \sum_{i=0}^{i=m} \frac{A_i \theta_{q+i}}{a^{2ip}}.$$

En effet, par la nature de la fonction $\varphi(y)$, on a évidemment

$$\varphi\left(\frac{y}{a^2}, m\right) = \frac{y-1}{a^{2m}y-1}\varphi(y, m), \quad \varphi(1, m) = 1, \quad \varphi(a^{-2}, m) = 0,$$

$$\varphi(a^{-4}, m) = 0, \quad \varphi(a^{-6}, m) = 0, \ldots, \quad \varphi(a^{-2m}, m) = 0:$$

et la comparaison des puissances de y dans l'équation identique

$$(a^{2m}y-1)\varphi\left(\frac{y}{a^2}, m\right) = (y-1)\varphi(y, m),$$

donne, pour les coefficients de $\varphi(y, m)$, les valeurs suivantes:

$$A_0 = \frac{(-1)^m}{(a^2-1)(a^4-1)(a^6-1)\ldots(a^{2m}-1)},$$

$$A_1 = \frac{A_0(1-a^{2m})}{1-a^{-2}} = \frac{A_0 a^2(1-a^{2m})}{a^2-1},$$

$$A_2 = \frac{A_1(1-a^{2m-2})}{1-a^{-4}} = \frac{A_1 a^4(1-a^{2m-2})}{a^4-1},$$

$$A_3 = \frac{A_2(1-a^{2m-4})}{1-a^{-6}} = \frac{A_2 a^6(1-a^{2m-4})}{a^6-1},$$

. . . .

$$A_m = \frac{A_{m-1}(1-a^2)}{1-a^{-2m}} = \frac{A_{m-1}a^{2m}(1-a^2)}{a^{2m}-1} = \frac{a^{m(m+1)}}{(a^2-1)(a^4-1)(a^6-1)\ldots(a^{2m}-1)}.$$

2. L'équation (1) peut s'écrire ainsi:

$$\begin{aligned} x = \psi(m, q) &+ \frac{x^{2m+3}}{[2m+3]\,a^{(m+1)(2q+m)}}\left\{1 - \frac{u_2 x^2}{u_1 a^{2q}(2m+4)(2m+5)}\right\} \\ &+ \frac{u_3 x^{2m+7}}{[2m+7]a^{2q(m+3)}}\left\{1 - \frac{u_4 x^2}{u_3 a^{2q}(2m+8)(2m+9)}\right\} \\ &+ \text{etc.} \ldots\ldots \pm \frac{x^{2p+1}\Theta_p}{[2p+1]\,a^{2pq}}, \end{aligned}$$

en posant

$$\psi(m, q) = \sum_{i=0}^{i=m} A_i\, a^{q+i} \sin\frac{x}{a^{i+q}}.$$

Mais les rapports $\frac{u_2}{u_1}, \frac{u_3}{u_2}, \ldots, \frac{u_n}{u_{n-1}}$, décroissent à mesure que l'indice n augmente et convergent vers l'unité; le coefficient Θ_p étant toujours moindre que la somme de valeurs positives de A_i, quelles que soient les valeurs des fractions θ_{q+i}, le terme $\frac{x^{2p+1}\Theta_p}{[2p+1]\,a^{2pq}}$ peut être rendu moindre que toute grandeur assignable; et de là on peut conclure que, pour toutes les valeurs de

$$x < a^q\sqrt{\frac{1-a^{-2}}{1-a^{-2m-2}}(2m+4)(2m+5)},$$

on aura

$$x > \psi(m, q),$$

et semblablement,

$$x < \psi(m, q) + \frac{x^{2m+3}}{[2m+3]\, a^{(m+1)(m+2q)}},$$

et enfin,

$$x = \psi(m, q) + \frac{\theta x^{2m+3}}{[2m+3]\, a^{(m+1)(m+2q)}},$$

θ désignant un facteur compris entre o et 1.

3. Avant de passer aux applications numériques de cette formule, nous allons montrer avec quelle simplicité se forment les valeurs successives de la fonction $\psi(m, q)$, linéaire par rapport aux sinus des arcs

$$\frac{x}{a^q}, \quad \frac{x}{a^{q+1}}, \quad \frac{x}{a^{q+2}}, \ldots, \quad \frac{x}{a^{q+m}}.$$

On a

$$\psi(m+1, q) = \sum_{i=0}^{i=m+1} A'_i\, a^{i+q} \sin \frac{x}{a^{i+q}},$$

A'_i désignant le coefficient de y^i dans le développement de $\varphi(y, m+1)$, soit de $\frac{a^{2m+2}y - 1}{a^{2m+2} - 1}\varphi(y, m)$.

On aura donc

$$A'_i = \frac{a^{2m+2}A_{i-1} - A_i}{a^{2m+2} - 1}, \quad A'_0 = \frac{-A_0}{a^{2m+2} - 1}, \quad A'_1 = \frac{a^{2m+2}A_0 - A_1}{a^{2m+2} - 1}, \ldots, \quad A'_{m+1} = \frac{a^{2m+2}A_m}{a^{2m+2} - 1},$$

et par conséquent,

$$(2) \quad \psi(m+1, q) = \frac{a^{2m+2}\psi(m, q+1) - \psi(m, q)}{a^{2m+2} - 1} = \psi(m, q+1) + \frac{\psi(m, q+1) - \psi(m, q)}{a^{2m+2} - 1}.$$

Pour calculer $\psi(m, q)$, on commencera donc par calculer les produits

$$a^q \sin \frac{x}{a^q}, \quad a^{q+1} \sin \frac{x}{a^{q+1}}, \ldots, a^{q+m} \sin \frac{x}{a^{q+m}}.$$

Soient les fonctions

$$\psi(0, q), \quad \psi(0, q+1), \quad \psi(0, q+2), \ldots, \quad \psi(0, q+m);$$

puis, au moyen de leurs différences successives que l'on divisera par

$a^2 - 1$, on obtiendra les valeurs de

$$\psi(1, q), \quad \psi(1, q+1), \ldots, \quad \psi(1, q+m):$$

on emploiera de la même manière les différences de celles-ci, en les divisant par $a^4 - 1$, pour former les valeurs de

$$\psi(2, q), \quad \psi(2, q+1), \ldots, \quad \psi(2, q+m),$$

et en poursuivant ainsi, on arrivera bien facilement à déterminer $\psi(m, q)$, sans avoir besoin de calculer et d'employer les coefficients A_i.

Les valeurs successives de $\psi(m, q)$ convergent rapidement vers x, et croissent même indéfiniment avec leurs indices dans des limites de x très-peu différentes de celles que nous avons indiquées ci-dessus; c'est-à-dire que l'on a

$$\psi(m+1, q) > \psi(m, q), \quad \psi(m, q+1) > \psi(m, q),$$

et même

$$\psi(m+1, q) > \psi(m, q+1).$$

Ces trois inégalités se réduisent en effet à une seule, par suite de l'équation (2); il suffit de démontrer l'une d'entre elles.

Or, si dans l'équation (1) on change m en $m+1$, et qu'on accentue les coefficients $u_1, u_2, u_3, \ldots$, pour indiquer cette transformation, on aura

$$x = \psi(m+1, q) + \frac{u'_1 x^{2m+5}}{[2m+5] a^{2q(m+2)}} - \frac{u'_2 x^{2m+7}}{[2m+7] a^{2q(m+3)}} \cdots \frac{(-1)^{p+1} x^{2p+1} \Theta'_p}{[2p+1] a^{2qp}}.$$

Cette équation, comparée à la précédente, donnera

$$\frac{\psi(m+1, q) - \psi(m, q)}{a^q} = \frac{u_1 \left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+3}}{[2m+3]} - \frac{(u_2 + u'_1)\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+5}}{[2m+5]} + \frac{(u_3 + u'_2)\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+7}}{[2m+7]} \cdots$$
$$\frac{(-1)^{p+1}\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2p+1}}{[2p+1]} (\Theta_p - \Theta'_p);$$

le dernier terme, de l'ordre $2p+1$, pouvant être rendu moindre que toute quantité assignable, il suffira de considérer les premiers pour établir que la différence $\psi(m+1, q) - \psi(m, q)$ est positive.

Mais on a généralement

$$\varphi(y, m+1) = \frac{a^2 y^{m+2} - 1}{a^{2m+2} - 1}\, \varphi(y, m),$$

et par suite,

$$u'_n = (-1)^{m+1} \varphi\{a^{-2(m+n+1)}, m+1\} = \frac{(-1)^{m+1}(a^{-2n}-1)}{a^{2m+2}-1}\, \varphi\{a^{-2(m+n+1)}, m\} = \frac{1-a^{-2n}}{a^{2m+2}-1}\, u_{n+1},$$

$$\frac{u_{n+1}+u'_n}{u_n+u'_{n-1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n}\left(1+\frac{a^2-1}{a^{2m+2n+2}-a^2}\right);$$

comme la plus grande valeur de ce rapport correspond à $n = 1$, ce qui donne

$$\frac{u_2+u'_1}{u_1} = \frac{1-a^{-2m-4}}{1-a^{-2}},$$

on en conclura que, pour toutes les valeurs de

$$x < a^q \sqrt{\frac{1-a^{-2}}{1-a^{-2m-4}}(2m+4)(2m+5)},$$

on aura

$$\psi(m+1, q) - \psi(m, q) > 0.$$

4. Supposons

$$a = 2, \quad q = 0, \quad x = \frac{2\pi}{n}, \quad n2^{m-1} \sin \frac{\pi}{n2^{m-1}} = P_{n2^m},$$

P_{n2^m} désignant l'aire du polygone régulier inscrit de $n2^m$ côtés; on aura évidemment, n étant au moins égal à 3,

$$\frac{2\pi}{n} < \sqrt{\frac{1-2^{-2}}{1-2^{-2m-4}}(2m+4)(2m+5)} < \sqrt{\frac{1-2^{-2}}{1-2^{-2m-2}}(2m+4)(2m+5)},$$

et par conséquent,

$$\pi = \psi(m, 0) + \frac{\theta n \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2m+3}}{[2m+3]2^{(m+1)(m-2)}},$$

en posant

$$\psi(m, 0) = \sum_{i=0}^{i=m} A_i P_{n2^i}.$$

L'approximation que donne cette formule, en prenant simplement $\pi = \psi(m, 0)$, est très-rapide, car si l'on désigne par ε_m, ε_{m+1} les limites des erreurs correspondantes aux indices m, $m+1$, on aura

$$\varepsilon_m = \frac{n\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2m+3}}{[2m+3]\,2^{(m+1)(m-2)}}, \qquad \varepsilon_{m+1} = \frac{\varepsilon_m\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{(2m+2)(2m+3)\,2^{2m}}.$$

Si l'on compare cette approximation avec celle qui résulte, ainsi qu'on l'expose dans les Éléments de Géométrie, de l'emploi simple des polygones réguliers inscrits, dont les nombres des côtés sont successivement doublés, on trouve, en partant du carré, qu'il suffit des quatre premiers polygones de 4, 8, 16, 32 côtés, pour que la fonction $\psi(3, 0)$ fournisse la valeur de π avec sept décimales exactes; tandis que la méthode connue, qui revient à n'employer que les fonctions $\psi(0, 0)$, exige le calcul de 14 polygones jusqu'à celui de 32768 côtés pour obtenir la même approximation.

L'emploi de ces quatorze polygones, pour la formation de $\psi(13, 0)$, donnerait, par notre méthode, π avec soixante-dix-neuf décimales exactes.

Pour $m = 1$, on a

$$\psi(1, 0) = P_{2n} + \frac{P_{2n} - P_n}{3},$$

qui donne π avec une erreur moindre que $< \frac{2,6}{n^4}$. Le polygone de 128 côtés, combiné avec le suivant de 256, auquel on ajoutera le tiers de sa différence avec le premier, suffit donc pour donner π avec sept décimales, ainsi qu'il est facile de le vérifier.

5. Considérons maintenant les tangentes. Pour toutes les valeurs de $x < \frac{\pi}{2}$, on a l'équation

$$x = \operatorname{tang} x - t_1 x^3 - t_2 x^5 - t_3 x^7 - \ldots - t_p x^{2p+1}\left(\frac{\pi^2 - 4\theta x^2}{\pi^2 - 4x^2}\right),$$

dans laquelle un coefficient quelconque

$$t_n = \frac{2^{2n+3}}{\pi^{2n+2}}\left(1 + \frac{1}{3^{2n+2}} + \frac{1}{5^{2n+2}} + \frac{1}{7^{2n+2}} + \text{etc.}\ldots\right),$$

θ désignant toujours un multiplicateur compris entre 0 et 1.

Écrivons successivement dans cette équation, à la place de x,

$$\frac{x}{a^q}, \quad \frac{x}{a^{q+1}}, \quad \frac{x}{a^{q+2}}, \ldots, \quad \frac{x}{a^{q+m}},$$

et multiplions les nouvelles équations par

$$a^q \mathrm{A}_0, \quad a^{q+1} \mathrm{A}_1, \quad a^{q+2} \mathrm{A}_2, \quad \text{etc.}\ldots,$$

l'addition donnera

$$x = \sum \mathrm{A}_i a^{i+q} \operatorname{tang} \frac{x}{a^{i+q}} + \frac{(-1)^{m+1} t_{m+1} x^{2m+3}}{a^{(m+1)(m+2q)}} \left(1 + \frac{t_{m+2}}{t_{m+1}} \frac{u_2}{u_1} \frac{x^2}{a^{2q}} + \frac{t_{m+3}}{t_{m+1}} \frac{u_3}{u_1} \frac{x^4}{a^{4q}} \ldots + \frac{t_p x^{2p+1}}{t_{m+1}} \Theta_p\right),$$

Θ_p désignant un facteur nécessairement moindre qu'une limite très-facile à assigner, quelles que puissent être les fractions désignées par θ, tandis que le facteur

$$t_p x^{2p+1} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{2x}{\pi}\right)^{2p+1} \left(1 + \frac{1}{3^{2p+2}} + \frac{1}{5^{2p+2}} \ldots \text{ etc.}\right)$$

peut devenir moindre que toute grandeur donnée, par l'accroissement du nombre p.

Soit posé

$$\sum_{i=0}^{i=m} \mathrm{A}_i a^{i+q} \operatorname{tang} \frac{x}{a^{i+q}} = \psi(m, q),$$

on voit déjà que les valeurs de $\psi(0, q)$, $\psi(1, q)$, $\psi(2, q)$, dont le mode de formation a été exposé ci-dessus, seront alternativement moindres et plus grandes que x. Il reste à prouver qu'elles convergeront vers x, et à montrer le degré de l'approximation. Or les coefficients t_{m+1}, t_{m+2}, t_{m+3},... convergent vers zéro, et leurs rapports successifs, $\frac{t_{m+2}}{t_{m+1}}$, $\frac{t_{m+3}}{t_{m+2}}$, $\frac{t_{m+4}}{t_{m+3}}$,... vers une limite supérieure $\frac{4}{\pi^2}$ en même temps que les rapports $\frac{u_2}{u_1}$, $\frac{u_3}{u_2}$, $\frac{u_3}{u_2}$,... vers leur limite inférieure qui est l'unité.

On aura donc

$$1 + \frac{t_{m+2} u_2}{t_{m+1} u_1} \frac{x^2}{a^{2q}} + \frac{t_{m+3}}{t_{m+1}} \frac{u_3}{u_1} \frac{x^4}{a^{4q}} \ldots < \frac{1}{1 - \frac{u^2}{u_1}\left(\frac{2x}{\pi a^q}\right)^2},$$

et enfin,

$$x = \psi(m, q) + \frac{(-1)^{m+1}\theta\, t_{m+1}\, x^{2m+3}}{\left\{1 - \frac{u_2}{u_1}\left(\frac{2x}{\pi a^q}\right)^2\right\} a^{(m+1)(m+2q)}}.$$

Les limites de l'erreur pour chaque valeur de $\psi(m, q)$ seront donc exprimées par la fraction

$$\frac{t_{m+1}\, x^{2m+3}}{\left\{1 - \frac{u_2}{u_1}\left(\frac{2x}{\pi a^q}\right)^2\right\} a^{(m+1)(m+2q)}},$$

et décroîtront très-rapidement.

Il reste à démontrer que des deux valeurs consécutives $\psi(m, q)$, $\psi(m + 1, q)$, la seconde différera moins de x que la première.

Si m est pair, on aura

$$\psi(m, q) > x, \quad \psi(m + 1, q) < x;$$

il faut prouver qu'on aura aussi

$$\psi(m, q) - x > x - \psi(m + 1, q), \quad \text{ou} \quad 2x - \psi(m, q) - \psi(m + 1, q) < 0.$$

Si m est impair, on aura

$$\psi(m, q) < x, \quad \psi(m + 1, q) > x;$$

l'inégalité à démontrer devient

$$\psi(m+1, q) - x < x - \psi(m, q), \quad \text{ou} \quad 2x - \psi(m, q) - \psi(m+1, q) > 0.$$

Ces deux inégalités sont comprises dans celle-ci,

$$\frac{2x - \psi(m, q) - \psi(m+1, q)}{(-1)^{m+1}} > 0,$$

que nous allons établir.

En effet, en ajoutant les deux équations

$$\frac{x - \psi(m, q)}{(-1)^{m+1} a^q} = t_{m+1}\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+3} u_1 + t_{m+2}\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+5} u_2 + t_{m+3}\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+7} u_3 \ldots + t_p\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2p+1} \Theta_p,$$

$$\frac{x - \psi(m+1, q)}{(-1)^{m+1} a^q} = - t_{m+2}\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+4} u'_1 - t_{m+3}\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+2} u'_2 \ldots\ldots\ldots\ldots - t_p\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2p+1} \Theta'_p,$$

on trouve

$$\frac{2x - \psi m, q - \psi(m+1, q)}{(-1)^{m+1} a^q} = t_{m+1}\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+3} u_1 + t_{m+2}\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+5} (u_2 - u'_1)\, t_{m+3}\left(\frac{x}{a^q}\right)^{2m+7} (u_3 - u'_2) + \ldots > 0,$$

car on a généralement

$$u_{n+1} - u'_n = u_{n+1}\left(1 - \frac{1 - a^{-2n}}{a^{2m+2} - 1}\right) > 0.$$

Le produit a^{i+q} tang $\frac{x}{a^{i+q}}$ exprimant l'aire du secteur polygonal régulier de a^{i+q} côtés circonscrit à l'arc $2x$, il en résulte que le mode de formation successive des fonctions $\psi(m, q)$ s'applique aux aires des polygones réguliers circonscrits, comme à celles des polygones inscrits, et donnerait la valeur de π avec une approximation du même ordre.

6. Le même procédé s'applique à la recherche du rayon du cercle, dont l'aire doit être équivalente à celle d'un polygone régulier donné, que l'on transforme successivement en polygones équivalents d'un nombre de côtés double, ou dont la circonférence doit être égale au contour d'un polygone régulier donné que l'on transforme successivement en polygones isopérimètres d'un nombre de côtés double, au moyen des rayons des cercles inscrits ou circonscrits à ces polygones.

Il suffit, pour le comprendre, de considérer les développements des fonctions cot x, coséc x; nous ne nous y arrêterons pas.

En général, le mode d'évaluation que nous venons d'exposer pour les arcs de cercle en fonction linéaire des sinus ou des tangentes de parties de ces arcs décroissant en progression géométrique, présente un procédé pour le retour des suites convergentes, qui pourra s'employer avec avantage toutes les fois que, par la nature de la fonction développée, il sera facile de calculer les valeurs de cette fonction correspondantes aux fractions de la variable, décroissant en progression géométrique.