JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

OLINDE RODRIGUES

Du développement des fonctions trigonométriques en produits de facteurs binomes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 217-224.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__217_0>

DU DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

EN PRODUITS DE FACTEURS BINOMES;

PAR M. OLINDE RODRIGUES.

1. On sait que pour des valeurs impaires de m et pour un arc quelconque x, on a

$$\sin mx = m \sin x \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{2\pi}{2m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{4\pi}{2m}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{(m-1)\pi}{2m}}\right).$$

Si dans cette relation on remplace m par $2n+1$, et qu'on pose

$$\pi = ma, \quad mx = \pi y, \quad Y_n = \frac{\sin \pi y}{\pi y (1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{4}\right)\left(1-\frac{y^2}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{y^2}{n^2}\right)},$$

on aura

$$Y_n = \frac{\sin ay}{ay}\left(\frac{1-\frac{\sin^2 ay}{\sin^2 a}}{1-y^2}\right)\left(\frac{1-\frac{\sin^2 ay}{\sin^2 2a}}{1-\frac{y^2}{4}}\right)\cdots\left(\frac{1-\frac{\sin^2 ay}{\sin^2 an}}{1-\frac{y^2}{n^2}}\right),$$

et également, en passant des sinus aux tangentes,

$$Y_n = \cos^{2n+1} ay \,\frac{\tang ay}{ay}\left(\frac{1-\frac{\tang^2 ay}{\tang^2 a}}{1-y^2}\right)\left(\frac{1-\frac{\tang^2 ay}{\tang^2 2a}}{1-\frac{y^2}{n}}\right)\cdots\left(\frac{1-\frac{\tang^2 ay}{\tang^2 an}}{1-\frac{y^2}{n^2}}\right).$$

Quelque grand que puisse être y, on pourra toujours prendre $n > y - \frac{1}{2}$; de manière que l'arc ay, ainsi que tous les arcs a, $2a$, $3a$,..., na, soit compris dans le premier quadrant.

On aura dès lors, parce que dans le premier quadrant les sinus croissent dans un rapport moindre que les arcs, et les tangentes dans un rapport plus grand,

$$1 - \frac{\sin^2 ay}{\sin^2 ap} < 1 - \frac{y^2}{p^2}, \quad 1 - \frac{\operatorname{tang}^2 ay}{\operatorname{tang}^2 ap} > 1 - \frac{y^2}{p^2}, \quad \text{si} \quad y < p,$$
$$\frac{\sin^2 ay}{\sin^2 ap} - 1 < \frac{y^2}{p^2} - 1, \quad \frac{\operatorname{tang}^2 ay}{\operatorname{tang}^2 ap} - 1 > \frac{y^2}{p^2} - 1, \quad \text{si} \quad y > p;$$

et par conséquent, pour toutes les valeurs de $y < n + \frac{1}{2}$,

$$\mathrm{Y}_n < 1, \quad \mathrm{Y}_n > \cos^{2n+1} \frac{\pi y}{2n+1},$$

d'où l'on conclura

$$\sin \pi y = \pi y (1 - y^2)\left(1 - \frac{y^2}{4}\right)\left(1 - \frac{y^2}{9}\right)\ldots\left(1 - \frac{y^2}{n^2}\right)\left\{1 - \theta\left(1 - \cos^{2n+1} \frac{y\pi}{2n+1}\right)\right\},$$

θ désignant un facteur compris entre o et 1, fonction de y et de n.

Ainsi se trouvent démontrées, de la manière la plus simple, et la convergence du produit $\pi y\ (1 - y^2)\left(1 - \frac{y^2}{4}\right)\ldots$ vers $\sin \pi y$, et les limites de cette convergence, en raison du nombre des facteurs [*].

Quand n est un grand nombre par rapport à y, le facteur *complémentaire* $1 - \theta\left(1 - \cos^{2n+1} \frac{\pi y}{2n+1}\right)$, peut être remplacé par celui-ci, $\left\{1 - \frac{\theta \pi^2 y^2}{2(2n+1)}\right\}$.

En effet, on a

$$\cos \frac{\pi y}{2n+1} > 1 - \frac{\pi^2 y^2}{2(2n+1)^2}, \quad \text{et} \quad \cos^{2n+1} \frac{\pi y}{2n+1} > 1 - \frac{\pi^2 y^2}{2(2n+1)}$$

si $\pi^2 y^2 < 2(2n+1)^2$, et dès lors tout facteur entre 1 et $\cos^{2n+1} \frac{\pi y}{2n+1}$ est compris dans la forme $1 - \frac{\theta \pi^2 y^2}{2(2n+1)}$.

L'erreur *relative*, commise en s'arrêtant au facteur $1 - \frac{y^2}{n^2}$, pour obtenir $\sin \pi y$, par son développement en produits de facteurs binômes, est donc réciproque au nombre de ces facteurs, quand ce nombre est très-grand par rapport à l'arc πy.

---

[*] *Cours d'Analyse algébrique*, par M. Cauchy, Note IX^e.

2. Mais examinons particulièrement ce qui arrive lorsque $y < 1$. Dans ce cas, les produits de l'ordre impair en y,

$$\pi y,\quad \pi y(1-y^2),\quad \pi y(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{4}\right),\ldots,$$

que nous désignerons par P_1, P_2, P_3,... forment une série décroissante dès le premier terme, tandis que ceux de l'ordre pair,

$$\pi y(1-y),\quad \pi y(1-y^2)\left(1-\frac{y}{2}\right),\quad \pi y(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{4}\right)\left(1-\frac{y^2}{3}\right),$$
$$\pi y(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{4}\right)\left(1-\frac{y^2}{9}\right)\left(1-\frac{y^2}{4}\right),\ \text{etc.}\ldots,$$

que nous appellerons Q_1, Q_2, Q_3,..., forment, au contraire, une série croissante dès le premier terme, qui converge, ainsi que la première, vers $\sin \pi y$.

En effet, entre les termes consécutifs ou correspondants de ces deux séries, on a évidemment les relations suivantes:

$$P_{n+1} = P_n\left(1-\frac{y^2}{n^2}\right) < P_n,$$
$$Q_{n+1} = Q_n\left(1+\frac{y}{n}\right)\left(1-\frac{y}{n+1}\right) = Q_n\left\{1+\frac{y(1-y)}{n(n+1)}\right\} > Q_n,$$
$$P_{n+1} = Q_n\left(1+\frac{y}{n}\right) = \frac{Q_{n+1}}{1-\frac{y}{n+1}},$$

$$\frac{P_{n+1}}{1+\frac{y}{n}} < \sin \pi y < P_n,\quad P_n\left(1-\frac{y}{n}\right) < \sin \pi y < P_n,$$
$$Q_n < \sin \pi y < Q_n\left(1+\frac{y}{n}\right),$$
$$Q_n < \sin \pi y < \frac{Q_n}{1-\frac{y}{n}},$$

d'où il résulte que θ désignant toujours un facteur numérique compris entre 0 et 1 et variable d'une expression à l'autre, on pourra écrire indifféremment

$$\sin \pi y = P_n\left(1 - \frac{\theta y}{n}\right) = \frac{P_n}{1 + \frac{\theta y}{n-1}} = Q_n\left(1 + \frac{\theta y}{n}\right) = \frac{Q_n}{1 - \frac{\theta y}{n}}.$$

L'erreur *relative*, commise en prenant P_n ou Q_n pour la valeur de $\sin \pi y$, est donc de l'ordre $\frac{y}{n}$.

3. Mais on peut obtenir une approximation de l'ordre $\frac{y^2}{n^2}$ par la considération suivante :

Quelle que soit la fraction par laquelle on remplace θ dans ces formules, les valeurs qu'on en tirera n'en convergeront pas moins vers $\sin \pi y$ à mesure que n augmentera; de manière que si l'on substitue à θ les plus grandes ou les moindres fractions qui puissent rendre ces valeurs approchées de $\sin \pi y$, toutes croissantes ou toutes décroissantes, à partir de celles qu'on aura d'abord déduites de P_n ou de Q_n, en y substituant ces limites de θ, celles-ci se trouveront être beaucoup plus rapprochées de $\sin \pi y$, en plus et en moins, que P_n et Q_n.

Considérons d'abord la formule

$$\sin \pi y = P_n\left(1 - \frac{\theta y}{n}\right),$$

et cherchons les limites de θ, qui rendent

$$P_n\left(1 - \frac{\theta y}{n}\right) < P_{n+1}\left(1 - \frac{\theta y}{n+1}\right) < P_{n+2}\left(1 - \frac{\theta y}{n+2}\right), \text{ etc.}\ldots,$$

ou

$$P_n\left(1 - \frac{\theta y}{n}\right) > P_{n+1}\left(1 - \frac{\theta y}{n+1}\right) > P_{n+2}\left(1 - \frac{\theta y}{n+2}\right), \text{ etc.}\ldots:$$

L'inégalité

$$P_n\left(1 - \frac{\theta y}{n}\right) < P_{n+1}\left(1 - \frac{\theta y}{n+1}\right),$$

au moyen de la relation

$$P_{n+1} = P_n\left(1 - \frac{y^2}{n^2}\right),$$

revient à celle-ci

$$\theta > \frac{(n+1)y}{n+y^2}.$$

Or il est évident que si l'on prend

$$\theta = \frac{(n+1)y}{n+y^2} = \frac{y}{1-\frac{1-y^2}{n+1}},$$

on aura

$$\theta > \frac{(n+2)y}{n+1+y^2} > \frac{(n+3)y}{n+2+y^2}, \text{ etc....}$$

Cette valeur de θ est donc la moindre qu'on puisse lui donner pour rendre croissante dès le premier terme la suite $P_n\left(1-\frac{\theta y}{n}\right)$. On aura donc

$$\sin \pi y > P_n\left\{1-\frac{(n+1)y^2}{n(n+y^2)}\right\}.$$

Si, au contraire, on veut satisfaire aux inégalités

$$P_n\left(1-\frac{\theta y}{n}\right) > P_{n+1}\left(1-\frac{\theta y}{n+1}\right) > P_{n+2}\left(1-\frac{\theta y}{n+2}\right), \text{ etc.},$$

il faudra prendre

$$\theta < \frac{y}{1-\frac{1-y^2}{n+1}} < \frac{y}{1-\frac{1-y^2}{n+2}}, \text{ etc....;}$$

y sera évidemment la plus grande valeur qu'on puisse donner à θ, et l'on aura

$$\sin \pi y < P_n\left(1-\frac{y^2}{n}\right).$$

En combinant ces deux inégalités, on pourra écrire

$$(1) \qquad \sin \pi y = P_n\left(1-\frac{y^2}{n}\right)\left\{1-\frac{\theta y^2(1-y^2)}{n^2-y^4}\right\} = \frac{P_n\left(1-\frac{y^2}{n}\right)}{1+\frac{\varepsilon y^2(1-y^2)}{n^2-y^2}},$$

ε désignant un multiplicateur compris entre o et 1, ainsi que θ.

En suivant une marche analogue pour les autres inégalités, on aurait encore

$$(2)\quad \sin \pi y = \frac{P_n\left\{1+\frac{\theta y^2(1-y^2)}{n(n-1)}\right\}}{1+\frac{y^2}{n-1}} = \frac{P_n}{\left(1+\frac{y^2}{n-1}\right)\left\{1-\frac{\delta y^2(1-y^2)}{(n-y^2)(n-1+y^2)}\right\}},$$

$$(3)\ \sin \pi y = Q_n\left\{1+\frac{y(1-y)}{n}\right\}\left\{1+\frac{\theta y^2(1-y)^2}{\{n+y(1-y)\}\{n+1-y(1-y)\}}\right\} = \frac{Q_n\left\{1+\frac{y(1-y)}{n}\right\}}{1-\frac{\mu y^2(1-y)^2}{n(n+1)+y(1-y)}},$$

$$(4)\quad \sin \pi y = \frac{Q_n\left\{1-\frac{\theta y^2(1-y)^2}{n^2}\right\}}{1-\frac{y(1-y)}{n}} = \frac{Q_n}{\left\{1-\frac{y(1-y)}{n}\right\}\left\{1+\frac{\lambda y^2(1-y)^2}{n^2-y^2(1-y)^2}\right\}},$$

θ, δ, λ, μ désignant des facteurs compris entre o et 1.

Ainsi donc, en multipliant ou en divisant les produits P_n, Q_n par les facteurs *complémentaires*

$$1-\frac{y^2}{n},\quad 1+\frac{y^2}{n-1},\quad 1-\frac{y(1-y)}{n},\quad 1+\frac{y(1-y)}{n},$$

on obtiendra la valeur de $\sin \pi y$ avec une erreur *relative*, réciproque au carré de l'indice n.

4. Dans l'application de ces formules, on pourra préférer l'usage des produits Q_n à cause de leur symétrie par rapport à y et $1-y$.

Soit, en effet, posé

$$x+y=1,\quad U_s=(1+x)(1+y)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{y}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{s}\right)\left(1+\frac{y}{s}\right);$$

on aura

$$Q_{s+1} = \frac{\pi x y U_s}{s+1},$$

et par la formule (4),

$$(5)\qquad \sin \pi y = \sin \pi x = \frac{\pi x y U_s}{(s+1-xy)\left\{1+\frac{\lambda x^2 y^2}{(s+1)^2-x^2y^2}\right\}}.$$

Supposons d'abord

$$x=y=\frac{1}{2},\quad \sin\frac{\pi}{2}=1,$$

on aura

$$(6)\quad \pi = (4s+3)\left\{1+\frac{\lambda}{16(s+1)^2-1}\right\}\frac{2.2}{3.3}\,\frac{4.4}{5.5}\,\frac{6.6}{7.7}\cdots\frac{2s.2s}{2s+1.2s+1},$$

et, par approximation,

$$(7)\quad \pi = (4s+3)\,\frac{2.2}{3.3}\,\frac{4.4}{5.5}\,\frac{6.6}{7.7}\,\frac{8.8}{9.9}\cdots\frac{2s.2s}{2s+1.2s+1},$$

avec une erreur *relative* moindre que $\frac{1}{16(s+1)^2-1}$.

L'expression de Wallis, qui se déduit des produits P_n, donne, en s'arrêtant à $n = s+1$, dans la formule $\sin\pi y = \frac{P_n}{1+\frac{\theta y}{n-1}}$, et en négligeant le facteur θ,

$$\pi = 2\,\frac{4}{3}\,\frac{16}{15}\,\frac{36}{35}\,\frac{64}{63}\cdots\frac{(2s)^2}{(2s)^2-1} = (4s+2)\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{2s}{2s+1}\right)^2,$$

avec une erreur *relative* moindre que $\frac{1}{2s+2}$.

Cette valeur approximative de π croît avec le nombre des facteurs; en considérant les produits Q_n et la formule $\sin\pi y = \frac{Q_n}{1-\frac{\theta y}{n}}$, on aurait celle-ci

$$\pi = 4\,\frac{8}{9}\,\frac{24}{25}\,\frac{48}{49}\cdots\frac{(2s+1)^2-1}{(2s+1)^2} = (4s+4)\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{2s}{2s+1}\right)^2,$$

expression décroissante et convergente, avec une erreur *relative* moindre que $\frac{1}{2s+2}$.

L'expression (7), déduite de la formule (5), est donc la moyenne de ces deux dernières que renferme implicitement celle de Wallis, et qui correspondent, l'une aux produits P_n, et l'autre aux produits Q_n; et l'on voit que, tandis que l'erreur *relative* de celles-ci est réciproque au nombre $s+1$, celle de la moyenne est réciproque au carré de ce nombre.

Si dans la même formule (5) on fait

$$x = \frac{1}{6},\quad y = \frac{5}{6},\quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

on trouve, par approximation,

$$\pi = \left(\frac{36s+31}{10}\right)\left(\frac{6.6}{7.11}\,\frac{12.12}{13.17}\,\frac{18.18}{19.23}\cdots\frac{6s.6s}{6s+1.6s+5}\right),$$

avec une erreur *relative* moindre que $\dfrac{1}{\left\{\dfrac{36(s+1)}{5}\right\}^2-1}$.

Cette expression donnera la valeur de π un peu plus rapidement que l'expression (7).

Toutefois l'usage de ces produits, quelque commode qu'il puisse être pour obtenir la valeur de π sans extraction de racines, exige un trop grand nombre de termes pour donner une approximation de quelques décimales.

5. L'application la plus importante de ces formules est celle qui fournit une expression nouvelle du terme moyen du binôme $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2s}$.

En effet, si l'on représente généralement par $[s]$ le produit $1.2.3\ldots s$, l'expression (6) peut s'écrire ainsi,

$$\pi = (4s+3)\left\{1+\frac{\lambda}{16(s+1)^2-1}\right\}\frac{2^{4s}[s]^4}{(2s+1)^2[2s]^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{[2s]}{[s]^2} = \frac{2^{2s}}{2s+1}\sqrt{\frac{4s+3}{\pi}}\left\{1+\frac{\mu}{32(s+1)^2-2}\right\},$$

et, par approximation,

$$\frac{[2s]}{[s]^2} = \frac{2^{2s}\sqrt{\dfrac{4s+3}{\pi}}}{2s+1} = \frac{2^{2s}\left(1+\dfrac{1}{4s+2}\right)}{\sqrt{\pi\left(s+\dfrac{3}{4}\right)}},$$

avec une erreur *relative* moindre que $\dfrac{1}{32(s+1)^2-2}$.

En comparant cette expression avec celle que Laplace a donnée dans la *Théorie des Probabilités*, page 138, 1^re^ édition, livre I^er^, chap. III, on remarquera l'avantage de la nôtre, qui donne une approximation du même ordre que celle qui résulte de l'emploi des trois premiers termes de celle de Laplace, et qui, de plus, indique la limite de l'erreur commise.