JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. CHASLES

Théorèmes sur les surfaces du second degré

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 215-216.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__215_0>

THÉORÈMES SUR LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. CHASLES.

Si par les différents points d'une section plane quelconque d'une surface du second degré, on mène les normales à la surface, leurs pieds sur chacun des plans principaux de la surface seront situés sur une section conique.

Le cône circonscrit à la surface suivant la section plane rencontrera le plan principal suivant une autre conique; et si l'on conçoit la focale de la surface comprise dans ce plan, la première conique, lieu des pieds des normales, sera la polaire de cette seconde conique par rapport à la focale.

Démonstration. J'ai appelé *focales* ou *coniques excentriques* d'une surface du second degré deux certaines courbes, ellipse et hyperbole, situées dans les deux plans principaux qui contiennent l'axe majeur de la surface. Une troisième courbe, qui a la même expression analytique dans le troisième plan principal, est imaginaire. (*Aperçu historique*, page 385).

La considération de ces courbes donne lieu à de nombreuses propriétés des surfaces du second degré, analogues aux propriétés des foyers dans les sections coniques.

Une de ces propriétés, qui va nous servir ici pour démontrer le théorème énoncé, consiste en ce que, si par un point de la surface, on mène la normale et le plan tangent, lesquels rencontreront un plan principal en un point et suivant une droite, ce point sera le pôle de la droite, par rapport à la *focale* comprise dans le plan principal. (*Aperçu historique*, page 384.)

D'après cela, si la droite enveloppe une section conique, le point sera lui-même sur une section conique. Or cela aura lieu si le point de la surface par lequel on a mené le plan tangent et la normale parcourt une section plane ; car le plan tangent enveloppera le cône circonscrit à la surface suivant cette courbe ; et sa trace sur le plan principal enveloppera une conique.

Les deux parties du théorème sont donc démontrées.

Corollaires. 1° Si le plan de la courbe tracée sur la surface est perpendiculaire au plan principal, le cône ciconscrit à la surface suivant cette courbe aura son sommet dans ce plan, et les pieds des normales seront sur la polaire de ce point. Donc :

Si par les différents points d'une section faite dans une surface du second degré par un plan perpendiculaire à un plan principal, on mène les normales à la surface, leurs pieds sur le plan principal seront situés sur une droite.

Et cette droite sera, par rapport à la focale de la surface, la polaire du sommet du cône circonscrit suivant la section plane.

2°. Par une section plane d'un cône du second degré on peut faire passer une infinité de surfaces du second degré inscrites dans le cône ; leurs centres sont sur la droite menée par le sommet du cône et par le centre de la section. Si l'on conçoit les normales au cône, menées par les différents points de la section, leurs pieds sur un plan principal de l'une quelconque de ces surfaces seront sur une courbe du second degré. Donc :

Si par les différents points d'une section plane d'un cône du second degré on mène les normales au cône, ces droites formeront une surface gauche sur laquelle on pourra tracer une infinité de sections coniques.

On peut considérer tous les points situés à l'infini comme appartenant à un même plan ; ce plan coupe aussi la surface suivant une section conique ; c'est-à-dire que, *si par un point fixe on mène des parallèles aux génératrices de la surface, ces droites formeront un cône du second degré.* Cela résulte de ce que les génératrices de la surface sont normales aux plans tangents à un cône du second degré.

Je ne sais si l'on avait déjà rencontré une surface gauche, ou même une surface quelconque d'un ordre supérieur, c'est-à-dire différente des surfaces du second degré, sur laquelle on pût ainsi tracer, d'une infinité de manières, des sections coniques.