JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Démonstration d'un théorème de géométrie

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 209-214.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__209_0>

DÉMONSTRATION

D'UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR J. BERTRAND,

Élève-Ingénieur des Mines.

On sait qu'une couche homogène, comprise entre deux ellipsoïdes homothétiques infiniment voisins, n'exerce pas d'action sur les points de son intérieur lorsqu'on suppose que chacune des molécules qui la composent attire ces points proportionnellement à sa masse et en raison inverse du carré de la distance. Ce théorème remarquable se démontre d'une manière fort simple au moyen de la propriété dont jouissent les deux ellipsoïdes d'intercepter entre eux des portions égales d'une sécante à l'entrée et à la sortie de cette sécante. La démonstration étant fondée uniquement sur cette propriété s'appliquerait également à toutes les surfaces infiniment voisines qui présenteraient le même caractère. Je me suis proposé de chercher directement quelles sont ces surfaces; j'ai trouvé qu'elles doivent nécessairement avoir pour sections planes des courbes du second degré; ce sont, par conséquent, des surfaces du second ordre, et le seul système de surfaces fermées qui jouisse de la propriété est celui qu'on connaissait déjà, celui de deux ellipsoïdes semblables et semblablement placés.

Pour arriver d'une manière directe à la démonstration de ce théorème, supposons que les deux courbes ABC, A'B'C' (*fig.* 1, *Pl. I*) soient les sections faites par un même plan dans les deux surfaces qui jouissent de la propriété énoncée. Ces deux courbes doivent jouir évidemment de la même propriété, en sorte que BC étant une sécante quelconque, on doit avoir

$$Bb = Cc_1.$$

Cette seule propriété va nous permettre de trouver l'équation différentielle de la courbe ABC. Supposons, en effet, que l'on se donne deux points A et B de cette courbe et les deux tangentes BO et AO en ces mêmes points; je dis qu'en prenant au hasard un point C dans le plan, et admettant que la courbe y passe, nous pourrons déterminer quelle sera, en ce point, la direction de la normale, et calculer son inclinaison sur les axes de coordonnées, en fonction des coordonnées du point C; faire cela, c'est évidemment trouver l'équation différentielle de la courbe.

Joignons les deux points A et B entre eux, et joignons-les également au point C, pris arbitrairement sur la courbe extérieure; on aura, d'après la définition de nos deux courbes infiniment voisines,

$$\mathrm{B}b_1 = \mathrm{A}a, \quad \mathrm{A}a_1 = \mathrm{C}c, \quad \mathrm{C}c_1 = \mathrm{B}b. \tag{1}$$

Soient α, α' les angles formés par la normale AN avec les droites AB et AC;

β, β' les angles formés par la normale BN′ avec les deux droites BC et BA;

γ, γ' les angles formés par la normale C, CN″ avec les droites CA et CB.

On aura évidemment, à cause de la distance infiniment petite des deux courbes qui permet de traiter l'arc bb_1 comme une ligne droite parallèle à BO,

$$\frac{\mathrm{B}b_1}{\mathrm{B}b} = \frac{\cos\beta}{\cos\beta'}; \quad \frac{\mathrm{A}a}{\mathrm{A}a_1} = \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha},$$

d'où l'on conclut, en divisant membre à membre et remarquant que $\mathrm{A}a = \mathrm{B}b_1$,

$$\frac{\mathrm{A}a_1}{\mathrm{B}b} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha'\cos\beta'}, \tag{2}$$

ou, d'après les équations (1),

$$\frac{\mathrm{C}c}{\mathrm{C}c_1} = \frac{\cos\alpha'\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta'}; \tag{3}$$

mais on a évidemment

$$\frac{\mathrm{C}c}{\mathrm{C}c_1} = \frac{\cos\gamma'}{\cos\gamma};$$

donc

$$(4) \qquad \frac{\cos\gamma'}{\cos\gamma} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha'\cos\beta'} \text{ [*]}.$$

Cette dernière équation, convenablement transformée, sera l'équation différentielle de la courbe cherchée; remarquons, en effet, que le second membre ne renfermant que les angles α, α', β et β', est une fonction des coordonnées du point C : quant au premier membre, il renferme les angles γ, γ' formés par la normale à la courbe avec les droites AC et BC; on peut donc l'exprimer au moyen des coordonnées du point C, et de la direction de la normale en ce point, c'est-à-dire en fonction de x, y et $\frac{dy}{dx}$.

Prenons pour axe des x la droite AO, et pour axe des y la droite BO. Faisons $AO = a$, $BO = b$, et désignons par x', y' les coordonnées du

---

[*] L'équation (4) peut s'écrire de la manière suivante,

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \cos\alpha'\cos\beta'\cos\gamma';$$

sous cette forme elle nous apprend que dans toute courbe satisfaisant à la question, et par conséquent dans toute section conique, si par les trois sommets d'un triangle inscrit on mène des normales à la courbe, de manière à diviser chacun des angles du triangle en deux parties $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, le produit des cosinus de trois de ces angles pris de deux en deux est égal au produit des trois autres cosinus. Cette propriété des sections coniques n'est, du reste, qu'un corollaire très-facile du théorème relatif au triangle circonscrit, savoir que les trois droites menées des sommets du triangle aux points de contact opposés se coupent toujours en un même point.

Au surplus l'équation (4) une fois obtenue, on pourrait, à la rigueur, compléter en peu de mots la démonstration qui fait l'objet de cette Note. Il suffirait d'observer que la propriété renfermée dans l'équation (4) est évidemment caractéristique des sections coniques; cette équation permet, en effet, connaissant deux tangentes, leurs points de contact et un troisième point appartenant à la courbe, de trouver la tangente en ce troisième point, et par suite la position du point infiniment voisin : on comprend, d'après cela, que la courbe est complétement déterminée par un point, deux tangentes et leurs points de contact, et sachant d'ailleurs que toutes les sections coniques satisfont, on en conclut qu'elles satisfont seules.

point C; les équations des quatre lignes AB, AC, BC, CN″ seront

(AB) $$y = -\frac{b}{a}x + b,$$

(AC) $$y - y' = \frac{y'}{x'-a}(x - x'),$$

(BC) $$y - y' = \frac{y'-b}{x'}(x - x'),$$

(CN″) $$y - y' = -\frac{dx'}{dy'}(x - x');$$

et si, pour plus de simplicité, on suppose que les points arbitraires A et B aient été choisis de manière que les tangentes AO et BO soient perpendiculaires, on aura, d'après les formules connues,

$$\cos\gamma = \pm\frac{(x'-a)\,dy' - y'\,dx'}{\sqrt{[y'^2 + (x'-a)^2]\,dx'^2 + dy'^2}},$$

$$\cos\gamma' = \pm\frac{(y'-b)\,dx' - x'\,dy'}{\sqrt{[x'^2 + (y'-b)^2]\,dx'^2 + dy'^2}},$$

$$\cos\alpha' = \pm\frac{y'}{\sqrt{y'^2 + (x'-a)^2}},\quad \cos\alpha = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\cos\beta' = \pm\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + (y'-b)^2}},\quad \cos\beta = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

En substituant ces diverses valeurs dans l'équation (4), il vient

(5) $$\frac{(x'-a)\,dy' - y'\,dx}{(y'-b)\,dx' - x'\,dy'} = \pm\frac{ay'}{bx'},$$

en sorte que la courbe cherchée doit satisfaire à l'une ou l'autre des équations différentielles

(6) $$\frac{(x'-a)\,dy' - y'\,dx'}{(y'-b)\,dx' - x'\,dy'} = \frac{ay'}{bx'},$$

(7) $$\frac{(x'-a)\,dy' - y'\,dx'}{(y'-b)\,dx' - x'\,dy'} = -\frac{ay'}{bx'}:$$

la première devient, lorsqu'on chasse le dénominateur,

(8) $$x'(ay' + bx' - ab)\,dy' - y'(ay' + bx' - ab)\,dx' = 0:$$

elle se décompose dans les deux suivantes,

$$ay' + bx' - ab = 0, \tag{9}$$

et

$$x'dy' = y'dx', \tag{10}$$

dont l'intégrale est

$$y' = cx'. \tag{11}$$

Ces deux solutions sont évidemment étrangères à la question, et les seules courbes qui puissent satisfaire s'obtiendront en intégrant l'équation (7).

Si l'on chasse les dénominateurs, cette équation devient

$$x'(ay' - bx' + ab)\,dy' - y'(ay' - bx' - ab)\,dx' = 0, \tag{12}$$

ou

$$(ay' - bx')(x'dy' - y'\,dx) + ab(x'dy' + y'\,dx') = 0; \tag{13}$$

pour l'intégrer, posons

$$x'y' = u,\quad \frac{y'}{x'} = v; \tag{14}$$

il viendra

$$x'dy' + y'dx' = du, \tag{15}$$

$$x'dy' - y'dx' = x'^2\,dv = \frac{udv}{v}. \tag{16}$$

L'équation (13) devient ainsi

$$\frac{abdu}{u\sqrt{u}} + \frac{adv}{\sqrt{v}} - \frac{bdv}{v\sqrt{v}} = 0, \tag{17}$$

et en intégrant,

$$\frac{ab}{\sqrt{u}} - a\sqrt{v} - \frac{b}{\sqrt{v}} = C, \tag{18}$$

ou, chassant les dénominateurs et remplaçant u et v par leurs valeurs tirées des équations (14),

$$(ay + bx - ab)^2 = C^2xy.$$

Cette équation représente toutes les courbes du second degré qui touchent les axes des coordonnées aux points A et B. Ces courbes n'ont évidemment pas d'autre enveloppe que ces axes mêmes qui fournissent ainsi la solution singulière. Il résulte de là *que deux courbes infiniment voisines qui jouissent de la propriété d'intercepter entre elles des portions égales sur une sécante quelconque à l'entrée et à la sortie de cette sécante, sont nécessairement des courbes du second degré.*

Ce théorème, tel que nous le donnons ici, ne serait qu'un cas particulier d'un autre théorème plus général qui a été énoncé par M. Olivier (tome III de ce Journal, page 156). Le théorème de M. Olivier est relatif à deux courbes quelconques auxquelles il n'impose pas la condition d'être infiniment voisines; il consiste en ce que deux courbes sont nécessairement des sections coniques, si l'on sait

1°. Que toute sécante passant par un point fixe a ses parties interceptées entre les deux courbes égales entre elles;

2°. Que toute sécante parallèle à une droite fixe a également ses parties interceptées égales.

Mais en lisant attentivement la démonstration de l'auteur, on s'apercevra sans peine qu'elle n'est pas suffisante. Je me contenterai ici de prouver par un exemple que le théorème ne serait pas exact si on lui donnait le degré de généralité supposé par M. Olivier.

Soient, en effet (*fig.* 2), deux axes rectangulaires OX et OY, et MBPO une courbe quelconque symétrique par rapport à ces deux axes; construisons une autre courbe M'B'P'Q', semblable à la première, en prenant le point O pour centre de similitude; il est clair que les deux courbes MBPQ, M'B'P'Q' jouiront des deux propriétés nécessaires pour qu'on puisse leur appliquer le théorème de M. Olivier.

Car, 1° toute sécante, telle que OB', passant par le point O, aura ses parties interceptées BB' et AA' égales entre elles;

2°. Toute sécante, telle que PQ, parallèle à l'axe des y, aura ses parties interceptées PP' et QQ' égales entre elles.

Cependant, d'après la manière dont les deux courbes ont été construites, il n'est évidemment pas nécessaire qu'elles soient des sections coniques.