JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ALFRED SERRET

Note sur les fonctions elliptiques de première espèce

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 145-154.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__145_0>

NOTE

SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE,

Présentée à l'Académie des Sciences le 24 avril 1843,

Par M. Alfred SERRET,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

1. Legendre, dans son *Traité des fonctions elliptiques*, tome Ier, chap. VII, page 35, a démontré que les fonctions de la première espèce, lorsque l'angle du module est $\frac{\pi}{4}$, sont exactement représentées par les arcs de la lemniscate (lieu géométrique des projections orthogonales du centre d'une hyperbole équilatère sur ses tangentes).

La lemniscate n'est qu'un cas particulier d'une courbe connue sous le nom d'ellipse de Cassini, et dont la définition géométrique est que le produit des distances d'un point de la courbe à deux points fixes est constant. Le but de cette Note est de prouver que les fonctions elliptiques de la première espèce sont exactement représentées, quel que soit l'angle de leur module, par les arcs de l'ellipse de Cassini.

L'équation de cette courbe est en coordonnées polaires

$$(a) \qquad r^4 - 2a^2 r^2 \cos 2t + (a^4 - b^4) = 0,$$

$2a$ étant la distance des deux points fixes, et b^2 le produit constant des distances d'un point de la courbe à ces deux points.

Elle affecte trois formes tout à fait différentes, suivant que le rapport $\frac{b}{a}$ est inférieur égal ou supérieur à l'unité; dans le cas de $\frac{b}{a} = 1$, elle coïncide avec la lemniscate étudiée par Legendre.

2. Si $\frac{b}{a} < 1$, on posera $\frac{b^2}{a^2} = \sin 2\theta$; dans ce cas la courbe est formée de deux boucles fermées égales entre elles, et l'angle 2θ est précisément celui que forment les tangentes issues du centre.

Les rayons vecteurs correspondants aux azimuts t_0 et t_1 détermineront sur la courbe deux arcs que je représenterai par $s(t_0, t_1)$ et $\sigma(t_0, t_1)$, ou simplement par $s(t_1)$ et $\sigma(t_1)$, si $t_0 = 0$.

D'après cela, on aura

$$s(t_0, t_1) = \frac{b^2}{a}\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\cos 2t + \sqrt{\cos^2 2t - \cos^2 2\theta}}}{\sqrt{\cos^2 2t - \cos^2 2\theta}}\, dt,$$

$$\sigma(t_0, t_1) = \frac{b^2}{a}\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\cos 2t - \sqrt{\cos^2 2t - \cos^2 2\theta}}}{\sqrt{\cos^2 2t - \cos^2 2\theta}}\, dt,$$

d'où l'on déduit

$$(1) \qquad s(t_0, t_1) + \sigma(t_0, t_1) = 2^{\frac{1}{2}}\frac{b^2}{a}\int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{\sqrt{\cos 2t - \cos 2\theta}},$$

$$(2) \qquad s(t_0, t_1) - \sigma(t_0, t_1) = 2^{\frac{1}{2}}\frac{b^2}{a}\int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{\sqrt{\cos 2t + \cos 2\theta}}.$$

Si dans l'équation (1) on pose

$$(3) \qquad \sin t = \sin\theta \sin\varphi,$$

et dans l'équation (2)

$$(4) \qquad \sin t = \cos\theta \sin\psi,$$

on aura

$$(5) \qquad s(t_0, t_1) + \sigma(t_0, t_1) = \frac{b^2}{a}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\theta \sin^2\varphi}},$$

$$(6) \qquad s(t_0, t_1) - \sigma(t_0, t_1) = \frac{b^2}{a}\int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2\theta \sin^2\psi}},$$

les angles φ_0, ψ_0, t_0; φ_1, ψ_1, t_1 étant liés par les relations générales (3) et (4).

Si l'on fait $t_0 = 0$, on aura aussi $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, et les équations précédentes deviendront

$$(7) \qquad F(\sin\theta, \varphi) = \frac{a}{b^2}[s(t) + \sigma(t)],$$

$$(8) \qquad F(\cos\theta, \psi) = \frac{a}{b^2}[s(t) - \sigma(t)].$$

Les modules de ces deux fonctions sont complémentaires, et ont pour valeurs

$$\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}},$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}.$$

Il résulte de là que toute fonction elliptique de première espèce est, quel que soit son module, exprimable au moyen de la somme ou de la différence de deux arcs de l'ellipse de Cassini, de l'espèce que nous venons de considérer. Réciproquement, tout arc de cette courbe est exprimable au moyen de la somme ou de la différence de deux fonctions elliptiques, dont les modules sont complémentaires.

Si dans l'équation (7) on pose $t = \theta$, d'où $\varphi = \frac{\pi}{2}$, et qu'on désigne par s la longueur totale de la courbe, on aura

$$F(\sin\theta) = \frac{a}{4b^2}\,s,$$

ce qui montre que la fonction complète est exprimable au moyen du périmètre total de la courbe.

Ce qui précède s'applique évidemment au cas de $\frac{b}{a} = 1$, puisqu'il suffit de poser $\theta = \frac{\pi}{4}$; dans ce cas les deux boucles dont se compose la courbe se réunissent, et les arcs représentés par $\sigma(t_0, t_1)$ se réduisent à 0.

3. Si $\frac{b}{a} > 1$, on posera $\frac{a^2}{b^2} = \sin 2\theta$; la courbe est alors composée d'une seule branche, et sa forme se rapproche, dans certains cas, de celle de l'ellipse. Je désignerai par $s(t_0, t_1)$ l'arc déterminé par les rayons vecteurs correspondants aux azimuts t_0, t_1, et par $\sigma(t_0, t_1)$ celui que déterminent les rayons vecteurs perpendiculaires aux deux premiers. D'après cela, on aura

$$s(t_0, t_1) = \frac{b^2}{a}\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\cos 2t + \sqrt{\cos^2 2t + \cot^2 2\theta}}}{\sqrt{\cos^2 2t + \cot^2 2\theta}}\,dt,$$

$$\sigma(t_0, t_1) = \frac{b^2}{a}\int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{-\cos 2t + \sqrt{\cos^2 2t + \cot^2 2\theta}}}{\sqrt{\cos^2 2t + \cot^2 2\theta}}\,dt;$$

et par suite, en supposant t_0 et t_1 compris entre o et $\frac{\pi}{4}$,

$$(9)\quad s(t_0, t_1) + \sigma(t_0, t_1) = 2^{\frac{1}{2}} \frac{b^2}{a} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{\operatorname{cotg} 2\theta + \sqrt{\cos^2 2t + \operatorname{cotg}^2 2\theta}}}{\sqrt{\cos^2 2t + \operatorname{cotg}^2 2\theta}}\, dt,$$

$$(10)\quad s(t_0, t_1) - \sigma(t_0, t_1) = 2^{\frac{1}{2}} \frac{b^2}{a} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{-\operatorname{cotg} 2\theta + \sqrt{\cos^2 2t + \operatorname{cotg}^2 2\theta}}}{\sqrt{\cos^2 2t + \operatorname{cotg}^2 2\theta}}\, dt.$$

Posons dans l'équation (9)

$$(11)\qquad \sqrt{\cos^2 2t + \operatorname{cotg}^2 2\theta} = \frac{1 - 2\sin^2\theta \sin^2\varphi}{\sin 2\theta},$$

et dans l'équation (10)

$$(12)\qquad \sqrt{\cos^2 2t + \operatorname{cotg}^2 2\theta} = \frac{1 - 2\cos^2\theta \sin^2\psi}{\sin 2\theta},$$

on aura

$$(13)\qquad s(t_0, t_1) + \sigma(t_0, t_1) = b \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\theta \sin^2\varphi}},$$

$$(14)\qquad s(t_0, t_1) - \sigma(t_0, t_1) = b \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \cos^2\theta \sin^2\psi}},$$

les angles φ_0, ψ_0, t_0; φ_1, ψ_1, t_1 étant liés par les relations générales (11) et (12), lesquelles proviennent de l'élimination de φ' et ψ' entre

$$\left.\begin{aligned} \sin 2t &= \frac{\sin 2\varphi'}{\sin 2\theta}, \\ \sin \varphi &= \frac{\sin \varphi'}{\sin \theta}, \end{aligned}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{aligned} \sin 2t &= \frac{\sin 2\psi'}{\sin 2\theta}, \\ \sin \psi &= \frac{\sin \psi'}{\cos \theta}. \end{aligned}\right.$$

Si $t_0 = 0$, on a aussi $\varphi_0 = 0$, $\psi_0 = 0$, et les équations (13) et (14) deviennent

$$(15)\qquad F(\sin\theta, \varphi) = \frac{1}{b}[s(t) + \sigma(t)],$$

$$(16)\qquad F(\cos\theta, \psi) = \frac{1}{b}[s(t) - \sigma(t)].$$

Les modules de ces fonctions sont encore complémentaires et ont pour valeurs

$$\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}},$$
$$\cos\theta = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}.$$

Si l'on fait $t=\frac{\pi}{4}$, on a $\varphi=\frac{\pi}{2}$, et l'équation (15) donne, en désignant par s le périmètre total de la courbe,

$$F(\sin\theta) = \frac{s}{4b}.$$

On voit que cette seconde espèce de courbe conduit aux mêmes conséquences analytiques que la première.

4. Il résulte de ce qui précède que, parmi les courbes représentées généralement par l'équation (a), il en existe deux, d'espèces différentes, dont les arcs représentent exactement telle fonction elliptique de première espèce que l'on voudra.

L'ellipse de Cassini jouit d'une propriété assez importante au point de vue géométrique. Si un cercle de rayon $\frac{b^2}{2a}$ tourne autour d'un axe distant de son centre de la quantité a, il engendrera la surface du quatrième ordre, connue sous le nom de *tore;* et si l'on coupe cette surface par un plan parallèle à l'axe et distant de cet axe de la quantité $\frac{b^2}{2a}$, la section coïncidera avec la courbe que représente l'équation (a).

C'est à tort que M. Auguste Comte avance, dans son *Traité de géométrie analytique*, page 72, qu'un plan qui contiendrait d'abord l'axe d'un tore, et qui ensuite s'en éloignerait en restant toujours parallèle à lui-même, déterminerait successivement sur cette surface toutes les courbes que peut représenter l'équation (a); il est aisé de voir, au contraire, que les sections du tore ne coïncident avec l'ellipse de Cassini que lorsque la distance du plan sécant à l'axe est précisément égale au rayon du cercle générateur du tore.

5. J'énoncerai encore une propriété remarquable de ces courbes qui ne semblent pas avoir été très-bien étudiées jusqu'ici.

La valeur du rayon de courbure s'obtient très-simplement. On trouve

$$R = b^2\frac{r}{r^2+a^2\cos 2t}.$$

Il devient infini aux points où la courbe (a) rencontre la lemniscate

$$(b) \qquad r^2 + a^2 \cos 2t = 0.$$

Les solutions communes aux équations (a) et (b) font connaître les coordonnées des points d'inflexion de la courbe (a), qui sont

$$r^4 = \frac{b^4 - a^4}{3}, \quad \text{et} \quad \cos 2t = -\sqrt{\frac{b^4 - a^4}{3a^4}},$$

d'où l'on conclut aisément que la courbe (a) aura quatre points d'inflexion lorsque le rapport $\frac{b}{a}$ sera compris entre 1 et $\sqrt{2}$.

Il suit de là que si a demeure constant et que le rapport $\frac{b}{a}$ varie de 1 à $\sqrt{2}$, l'équation (a) représentera une série de courbes de même espèce ayant chacune quatre points d'inflexion dont le lieu géométrique sera précisément la lemniscate représentée par l'équation (b).

Il existe une propriété analogue lorsque $\frac{b}{a}$ est compris entre 0 et 1; il est facile de voir en effet que si, a restant constant, $\frac{b}{a}$ varie de 0 à 1, l'équation (a) représentera une série de courbes de même espèce, composées chacune de deux boucles fermées. Cela posé, si l'on construit pour chacune de ces courbes les tangentes qui passent par leur centre commun, le lieu géométrique des points de contact ne sera autre que la lemniscate,

$$(c) \qquad r^2 - a^2 \cos 2t = 0.$$

Les deux lemniscates (b) et (c) sont égales, elles ont même centre, et leurs axes se coupent à angles droits.

6. On sait que lorsque l'angle du module est $\frac{\pi}{4}$, la fonction complète de première espèce est exprimable au moyen des transcendantes eulériennes $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$, d'où il résulte que $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ peut aisément s'exprimer au moyen du périmètre de la lemniscate. J'ai d'ailleurs montré, tome VII de ce Journal, page 114, que les transcendantes eulériennes de seconde espèce peuvent être simplement exprimées dans bien des cas

au moyen des périmètres des courbes représentées généralement par l'équation

$$r^m = \frac{(2a)^m}{2} \cos mt,$$

lesquelles comprennent, comme cas particuliers, le cercle et la lemniscate.

La courbe représentée par l'équation précédente jouit d'une propriété remarquable; elle consiste en ce que le produit des distances d'un de ses points à m points fixes est constant.

Considérons un polygone régulier de m côtés et de rayon a, les carrés des distances d'un point quelconque du plan aux sommets de ce polygone seront

$$(d)\qquad \begin{cases} r^2 - 2ar\cos t + a^2, \\ r^2 - 2ar\cos\left(t - \frac{2\pi}{m}\right) + a^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r^2 - 2ar\cos\left(t - \frac{2k\pi}{m}\right) + a^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r^2 - 2ar\cos\left[t - \frac{2(m-1)\pi}{m}\right] + a^2. \end{cases}$$

Or on a

$$r^{2m} - 2a^m r^m \cos mt + a^{2m} = \left(r^m - a^m e^{mt\sqrt{-1}}\right)\left(r^m - a^m e^{-mt\sqrt{-1}}\right),$$

$$r^2 - 2ar\cos\left(t - \frac{2k\pi}{m}\right) + a^2 = \left[r - ae^{\left(t - \frac{2k\pi}{m}\right)\sqrt{-1}}\right]\left[r - ae^{-\left(t - \frac{2k\pi}{m}\right)\sqrt{-1}}\right].$$

D'ailleurs, k étant entier, chacun des facteurs du second membre de la première de ces identités est divisible par le facteur correspondant de la seconde, d'où il résulte que

$$r^{2m} - 2a^m r^m \cos mt + a^{2m}$$

est divisible par chacune des expressions (d), et par suite, est précisément égal au produit de ces quantités.

On voit, enfin, que l'équation

$$(e)\qquad r^{2m} - 2a^m r^m \cos mt + a^{2m} = b^{2m}$$

représente le lieu géométrique du point dont le produit des distances aux sommets du polygone est constant et égal à b^m. Elle se simplifie si

$b = a$, et l'on trouve, dans ce cas,

$$r^m - 2a^m \cos mt = 0,$$

ainsi qu'on l'avait annoncé.

La discussion de l'équation (e) conduit aux mêmes conséquences que celle de l'équation (a).

Si $\frac{b}{a}$ est compris entre 0 et 1, la courbe qu'elle représente se compose de m boucles fermées ayant pour axes les rayons du polygone régulier dont les sommets sont les m points fixes donnés. Ces m boucles sont tangentes à deux circonférences concentriques ayant pour équations

$$r^m = a^m + b^m, \quad \text{et} \quad r^m = a^m - b^m.$$

Cette seconde circonférence se réduit à son centre si $\frac{b}{a} = 1$, et dans ce cas les m boucles de la courbe se réunissent en ce point.

Enfin, si $\frac{b}{a}$ est compris entre 1 et ∞, la courbe se compose d'une seule branche fermée.

On trouve simplement pour valeur du rayon de courbure

$$R = b^m \frac{r}{r^m + (m-1)\,a^m \cos mt}.$$

Il devient infini pour les points situés sur la courbe ayant pour équation

$$(f) \qquad r^m + (m-1)\,a^m \cos mt = 0.$$

On en conclut aisément que la courbe considérée aura $2m$ points d'inflexion lorsque $\frac{b}{a}$ sera compris entre 1 et $\sqrt[m]{m}$, et que $\frac{b}{a}$ variant entre ces limites, la courbe représentée par l'équation (f) sera précisément le lieu géométrique décrit par ces points d'inflexion.

7. Les courbes représentées par l'équation (a) et qui peuvent affecter trois formes distinctes suivant que le rapport $\frac{b}{a}$ est supérieur égal ou inférieur à l'unité, offrent, sous ce point de vue, quelque analogie avec les sections du cône; cette analogie devient plus frappante si l'on compare les aires de ces trois courbes aux arcs des trois sections coniques.

Considérons d'abord le cas de $\frac{a}{b} > 1$, et désignons par $u\,(t_0, t_1)$, $v\,(t_0, t_1)$ les aires comprises entre les arcs $s\,(t_0, t_1)$, $\sigma\,(t_0, t_1)$ et les rayons vecteurs qui passent par leurs extrémités. On trouve immédiatement

$$u\,(t_0, t_1) = a^2 \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\,dt \left(\cos 2t + \sqrt{\frac{b^4}{a^4} - \sin^2 2t}\right),$$
$$v\,(t_0, t_1) = a^2 \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\,dt \left(\cos 2t - \sqrt{\frac{b^4}{a^4} - \sin^2 2t}\right).$$

On en déduit, en désignant par $A\,(t_0, t_1)$ l'aire comprise entre les deux arcs $s(t_0, t_1)$, $\sigma\,(t_0, t_1)$, et les deux rayons vecteurs qui passent par leurs extrémités,

$$A\,(t_0, t_1) = a^2 \int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{\frac{b^4}{a^4} - \sin^2 2t};$$

et si l'on pose

$$\sin 2t = \frac{b^2}{a^2} \sin \varphi,$$

on trouve aisément

$$A\,(t_0, t_1) = \frac{a^2}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \sqrt{1 - \frac{b^4}{a^4}\sin^2 \varphi} - \left(\frac{a^4 - b^4}{2a^2}\right) \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{b^4}{a^4}\sin^2 \varphi}},$$

Si l'on fait maintenant $t_0 = 0$, on aura aussi $\varphi_0 = 0$, et cette équation deviendra

$$A\,(t) = \frac{a^2}{2}\,E\left(\frac{b^2}{a^2}, \varphi\right) - \left(\frac{a^4 - b^4}{2a^2}\right) F\left(\frac{b^2}{a^2}, \varphi\right).$$

Ce qui montre que l'aire $A\,(t)$ est de même qu'un arc d'hyberbole exprimable au moyen de deux fonctions elliptiques de même module et de même amplitude, l'une de première, et l'autre de seconde espèce.

Si dans l'équation précédente on fait

$$\sin 2t = \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{d'où} \quad \varphi = \frac{\pi}{2};$$

puisqu'on désigne par A l'aire totale des deux boucles de la courbe, on aura

$$A = 2a^2\,E\left(\frac{b^2}{a^2}\right) - \frac{2(a^4 - b^4)}{a^2}\,F\left(\frac{b^2}{a^2}\right).$$

Si $\frac{a}{b} = 1$, ce qui est le cas de la lemniscate, les deux équations précédentes deviennent

$$A(t) = \frac{a^2 \sin 2t}{2}, \quad A = 2a^2.$$

On voit que, dans ce cas, l'aire d'une portion de la courbe peut être obtenue sous forme finie de même qu'un arc de parabole.

8. Considérons enfin le cas de $\frac{a}{b} < 1$, et désignons, comme tout à l'heure, par $u(t_0, t_1)$ et $v(t_0, t_1)$ les aires comprises entre les arcs que nous avons appelés $s(t_0, t_1)$, $\sigma(t_0, t_1)$, et les rayons vecteurs qui passent par leurs extrémités, on aura

$$u(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} dt \left(a^2 \cos 2t + b^2 \sqrt{1 - \frac{a^4}{b^4} \sin^2 2t} \right),$$

$$v(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} dt \left(- a^2 \cos 2t + b^2 \sqrt{1 - \frac{a^4}{b^4} \sin^2 2t} \right),$$

d'où

$$u(t_0, t_1) + v(t_0, t_1) = b^2 \int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{1 - \frac{a^4}{b^4} \sin^2 2t},$$

et en faisant $t_0 = 0$,

$$u(t) + v(t) = \frac{1}{2} b^2 \, \mathrm{E}\left(\frac{a^2}{b^2}, \frac{1}{2} t\right).$$

Quant à la différence de ces deux aires, elle est évidemment algébrique.

Si l'on fait $t = \frac{\pi}{4}$, on en déduit, en désignant par A l'aire totale de la courbe,

$$A = 2b^2 \, \mathrm{E}\left(\frac{a^2}{b^2}\right),$$

ce qui montre que l'aire d'une portion de cette courbe est, de même qu'un arc d'ellipse, exprimable au moyen d'une fonction elliptique de seconde espèce.

Ce rapprochement pourrait légitimer les dénominations de *lemniscate hyperbolique, parabolique ou elliptique*, appliquées à ces trois courbes suivant que le rapport $\frac{a}{b}$ serait supérieur égal ou inférieur à l'unité.