JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. MOLINS

Sur les trajectoires qui coupent sous un angle donné les tangentes a une courbe à double courbure

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 132-144.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__132_0>

SUR LES TRAJECTOIRES
QUI COUPENT SOUS UN ANGLE DONNÉ
LES TANGENTES A UNE COURBE A DOUBLE COURBURE;

PAR H. MOLINS,

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

1. Dans un Mémoire qui fait partie du tome II des *Mémoires des Savants étrangers,* Lancret s'est occupé des courbes formées par les intersections successives de droites qui coupent une courbe donnée quelconque sous un angle constant; après avoir exposé les propriétés de ces courbes qu'il nomme développoïdes, il cherche leurs équations, et il montre que pour les obtenir sous forme finie, il faudrait intégrer une équation différentielle du premier ordre à deux variables qui, généralement, n'est pas intégrable ou ne peut pas être réduite aux quadratures. Ce n'est que lorsque les tangentes aux développoïdes coupent la courbe donnée à angle droit, auquel cas elles en sont les développées, qu'il est parvenu à vaincre cette difficulté (tome Ier des *Mémoires* cités). Nous nous sommes proposé la question inverse qui consiste à trouver les courbes qui auraient pour développoïde une courbe donnée quelconque, et nous sommes arrivé à voir que leur détermination dépend d'une équation différentielle du premier ordre qu'on peut toujours intégrer. Ces courbes s'appelleront trajectoires des tangentes, ou simplement trajectoires, et il est clair, en effet, que le problème dont il s'agit rentre dans le problème général des trajectoires qui n'a été résolu que dans un petit nombre de cas. Lorsque les trajectoires couperont à angle droit les tangentes à la courbe donnée, elles en seront les développantes, de sorte que l'on pourra toujours obtenir sous forme intégrable les équations des développantes d'une courbe quelconque.

Considérons donc une courbe quelconque, et, pour trouver les trajectoires de ses tangentes, concevons une surface développable dont elle serait l'arête de rebroussement; il est clair que chaque trajectoire sera une courbe tracée sur la surface qui aura la propriété de couper sous un angle constant ses diverses génératrices. Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de cette courbe; elles satisferont à l'équation de la surface; et, si l'on considère un autre point infiniment voisin sur la surface, on aura

$$dz = pdx + qdy.$$

On sait que pour une surface développable on a

$$s^2 - rt = 0,$$

et si l'on portait la valeur de r en fonction de s et t dans l'expression du rayon de courbure d'une section normale, on verrait que ce rayon devient infini lorsqu'on fait

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{s}{t};$$

de sorte que cette quantité détermine la section principale qui se confond avec la génératrice passant au point donné. D'après cela, les coordonnées d'un point de la génératrice infiniment voisin du point (x, y, z) seront

$$x + dx, \quad y - \frac{s}{t}dx, \quad z + pdx - q\frac{s}{t}dx,$$

et l'on aura pour les équations de la génératrice

$$x' - x = \frac{1}{p - q\frac{s}{t}}(z' - z), \quad y' - y = \frac{-\frac{s}{t}}{p - q\frac{s}{t}}(z' - z).$$

On trouverait de même pour les équations de la tangente à la trajectoire au point (x, y, z),

$$x' - x = \frac{1}{p + q\frac{dy}{dx}}(z' - z), \quad y' - y = \frac{\frac{dy}{dx}}{p + q\frac{dy}{dx}}(z' - z),$$

$\frac{dy}{dx}$ étant une quantité inconnue qui détermine la projection de la tangente sur le plan des x, y. Pour déterminer cette quantité, on exprimera que les droites dont nous venons d'écrire les équations font entre elles un angle constant et donné ω; or, si l'on forme le cosinus de l'angle des deux droites et qu'on l'égale à $\cos\omega$, on obtiendra

$$\cos\omega = \frac{t(1+p^2) - pqs + \frac{dy}{dx}[pqt - s(1+q^2)]}{\sqrt{s^2+t^2+(pt-qs)^2}\sqrt{1+p^2+2pq\frac{dy}{dx}+(1+q^2)\frac{dy^2}{dx^2}}}.$$

De là on déduirait, après diverses réductions,

$$\sin\omega = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\left(s+t\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{s^2+t^2+(pt-qs)^2}\sqrt{1+p^2+2pq\frac{dy}{dx}+(1+q^2)\frac{dy^2}{dx^2}}},$$

et en divisant ces deux expressions l'une par l'autre,

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\left(s+t\frac{dy}{dx}\right)}{t(1+p^2) - pqs + \frac{dy}{dx}[pqt - s(1+q^2)]}.$$

On remarquera que par chaque point de la surface passent deux trajectoires qui coupent la génératrice suivant deux angles dont l'un est égal à ω et l'autre à son supplément; il faudra donc, pour obtenir en même temps ces deux trajectoires, affecter du double signe $\pm$ l'expression de $\operatorname{tang}\omega$. Si nous posons pour abréger

$$\pm \operatorname{tang}\omega = k,$$

quantité connue et donnée, on tirera de la formule précédente

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{k[pqs - t(1+p^2)] - s\sqrt{1+p^2+q^2}}{k[pqt - s(1+q^2)] - t\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

quantité qui détermine la direction de la tangente à la projection de la trajectoire sur le plan des x, y. Mais il faudra substituer aux quantités

p, q, s, t leurs valeurs que l'on formera à l'aide des équations de la courbe donnée qui est l'arète de rebroussement de la surface.

2. Soient

$$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z)$$

les équations de cette courbe; celles de sa tangente au point pour lequel $z = \alpha$ seront

$$x - \varphi\alpha = (z - \alpha)\varphi'\alpha, \quad y - \psi\alpha = (z - \alpha)\psi'\alpha,$$

d'où l'on déduira

$$(2) \qquad (x - \varphi\alpha)\psi'\alpha - (y - \psi\alpha)\varphi'\alpha = 0;$$

cette tangente est une génératrice de la surface, et nous pouvons supposer que c'est celle qui passe au point (x, y, z). Si l'on éliminait α entre deux de ces équations, on aurait l'équation du lieu des tangentes ou de la surface développable; cette élimination ne pouvant être ici qu'indiquée, on regardera α et z comme des fonctions de x, y données par les deux premières équations, et, en différentiant chacune de ces équations successivement par rapport à x et à y, on trouvera les expressions connues

$$p = \frac{\psi''\alpha}{\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha}, \quad q = -\frac{\varphi''\alpha}{\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha};$$

d'où l'on déduit, en les différentiant par rapport à y,

$$s = \frac{\psi'\alpha(\psi''\alpha\varphi'''\alpha - \varphi''\alpha\psi'''\alpha)}{(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)^2}\frac{d\alpha}{dy}, \quad t = -\frac{\varphi'\alpha(\psi''\alpha\varphi'''\alpha - \varphi''\alpha\psi'''\alpha)}{(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)^2}\frac{d\alpha}{dy}.$$

Substituant dans la formule (1) ces expressions de p, q, s, t, la quantité $\frac{d\alpha}{dy}$ se trouve éliminée et l'on obtient

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{k[\psi''\alpha + \varphi'\alpha(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)] + \psi'\alpha\sqrt{(\varphi''\alpha)^2 + (\psi''\alpha)^2 + (\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)^2}}{k[\varphi''\alpha - \psi'\alpha(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)] + \varphi'\alpha\sqrt{(\varphi''\alpha)^2 + (\psi''\alpha)^2 + (\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)^2}}.$$

Enfin, si dans cette expression on mettait pour α sa valeur en fonction de x, y donnée par l'équation (2), on aurait une équation entre x, y et $\frac{dy}{dx}$, qui serait l'équation différentielle de la projection de la trajectoire sur le plan des x, y. Je dis qu'on pourra toujours intégrer cette équation différentielle du premier ordre.

3. En effet, l'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$(4)\qquad y = \frac{\psi'\alpha}{\varphi'\alpha}\,x + \frac{\psi\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha\psi'\alpha}{\varphi'\alpha},$$

et, d'un autre côté, l'équation (3) donnerait α en fonction de $\frac{dy}{dx}$; de sorte que si, dans l'équation précédente, on considère α comme une fonction connue de $\frac{dy}{dx}$, cette équation sera de la forme

$$y = Px + Q,$$

P et Q étant des fonctions de $\frac{dy}{dx}$. Or on sait toujours intégrer ces sortes d'équations. Pour cela, je différentie l'équation (4), ce qui me donne

$$\left(\frac{dy}{dx} - \frac{\psi'\alpha}{\varphi'\alpha}\right) dx = \frac{\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha}{(\varphi'\alpha)^2}\,(x - \varphi\alpha)\,d\alpha,$$

et je mets pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur fournie par l'équation (3); je trouve, toutes réductions faites,

$$(5)\qquad dx = \frac{k\,[\varphi''\alpha - \psi'\alpha(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)] + \varphi'\alpha\sqrt{(\varphi''\alpha)^2 + (\psi''\alpha)^2 + (\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)^2}}{k\,\varphi'\alpha\,[1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2]}\,(x - \varphi\alpha)\,d\alpha.$$

En désignant le multiplicateur de $(x - \varphi\alpha)\,d\alpha$ par $\pi\alpha$, il viendra pour l'intégrale de cette équation

$$x = e^{\int\pi\alpha d\alpha}\left[C - \int \varphi\alpha.\pi\alpha.e^{-\int\pi\alpha d\alpha}\,d\alpha\right],$$

C étant une constante arbitraire. Il ne resterait plus qu'à éliminer α entre cette équation et l'équation (2), et l'on aurait l'équation de la projection sur le plan des x, y de chacune des trajectoires qui coupent les tangentes à la courbe donnée sous un angle égal à ω; ces trajectoires en nombre infini répondent au nombre infini de valeurs que l'on peut attribuer à la constante C. Pour achever de déterminer ces trajectoires, il faudra joindre à l'équation précédente celle de la surface développable qui les contient toutes.

Si l'on voulait avoir les trajectoires orthogonales, ou, ce qui est la même chose, les développantes de la courbe donnée, on ferait $k=\infty$ dans la formule (5), après avoir toutefois divisé par k les deux termes de la fraction qui est au second membre, et cette formule deviendrait

$$dx = \frac{\varphi''\alpha - \psi'\alpha(\varphi'\alpha\,\psi''\alpha - \psi'\alpha\,\varphi''\alpha)}{\varphi'\alpha\,[1+(\varphi'\alpha)^2+(\psi'\alpha)^2]}(x-\varphi\alpha)\,d\alpha.$$

4. Si la courbe donnée était plane et rapportée aux axes rectangulaires Ox, Oz situés dans son plan, son équation serait $x=\varphi(z)$ et la quantité y serait constamment nulle, ou, ce qui revient au même, la fonction $\psi(z)$ cesserait d'exister. En la supprimant ainsi que ses dérivées dans la formule (5), on trouvera

$$dx = \frac{(k+\varphi'\alpha)\,\varphi''\alpha}{k\,[1+(\varphi'\alpha)^2]\,\varphi'\alpha}(x-\varphi\alpha)\,d\alpha,$$

équation qu'on pourrait aussi obtenir directement. Si l'on remarque que l'on a

$$\int \frac{(k+\varphi'\alpha)\,\varphi''\alpha}{k[1+(\varphi'\alpha)^2]\,\varphi'\alpha}\,d\alpha = \frac{1}{k}\,\text{arc tang}\,\varphi'\alpha + l\,\frac{\varphi'\alpha}{\sqrt{1+(\varphi'\alpha)^2}},$$

on trouvera pour l'intégrale de l'équation précédente,

$$x = \frac{\varphi'\alpha}{\sqrt{1+(\varphi'\alpha)^2}}\,e^{\frac{1}{k}\,\text{arc tang}\,\varphi'\alpha}\left[\mathrm{C} - \frac{1}{k}\int e^{-\frac{1}{k}\,\text{arc tang}\,\varphi'\alpha}\,\frac{(k+\varphi'\alpha)\varphi\alpha\,\varphi''\alpha}{(\varphi'\alpha)^2\sqrt{1+(\varphi'\alpha)^2}}\,d\alpha\right],$$

C étant une constante arbitraire. A cette équation il faudra joindre celle de la tangente à la courbe donnée au point pour lequel $z=\alpha$,

$$x-\varphi\alpha = (z-\alpha)\,\varphi'\alpha,$$

et éliminer α entre ces équations.

Dans le cas où la trajectoire serait orthogonale, il faudrait faire $k=\infty$, et l'on aurait

$$x = \frac{\varphi'\alpha}{\sqrt{1+(\varphi'\alpha)^2}}\left[\mathrm{C} - \int \frac{\varphi\alpha\,\varphi''\alpha}{(\varphi'\alpha)^2\sqrt{1+(\varphi'\alpha)^2}}\,d\alpha\right],$$

ou bien, en observant que l'on a

$$\int \frac{\varphi\alpha\varphi''\alpha}{(\varphi'\alpha)^2\sqrt{1+(\varphi'\alpha)^2}}\,d\alpha = -\frac{\varphi\alpha}{\varphi'\alpha}\sqrt{1+(\varphi'\alpha)^2} + \int\sqrt{1+(\varphi'\alpha)^2}\,d\alpha,$$

on obtiendra

$$x = \varphi\alpha + \frac{\varphi'\alpha}{\sqrt{1+(\varphi'\alpha)^2}}\left[C - \int\sqrt{1+(\varphi'\alpha)^2}\,d\alpha\right],$$

et par suite

$$z = \alpha + \frac{1}{\sqrt{1+(\varphi'\alpha)^2}}\left[C - \int\sqrt{1+(\varphi'\alpha)^2}\,d\alpha\right].$$

Si l'on appliquait cette dernière formule au cas où la courbe donnée serait une parabole cubique $x = pz^{\frac{3}{2}}$, et qu'on fît la constante C nulle, on trouverait

$$z - \alpha = -\frac{8}{27p^2}\left(1 + \frac{9}{4}p^2\alpha\right),$$

et l'élimination de α entre cette équation et celle de la tangente,

$$x - p\alpha^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}p\alpha^{\frac{1}{2}}(z - \alpha),$$

conduirait à l'équation d'une parabole ordinaire,

$$x^2 = \frac{16}{81p^4}\left(3p^2z + \frac{8}{9}\right).$$

En changeant z en $z' - \frac{8}{27p^2}$, et posant $p^2 = \frac{8}{27p'}$, les équations de la parabole cubique et de sa développante deviendraient

$$x^2 = \frac{8}{27p'}(z' - p')^3, \quad x^2 = 2p'z'$$

5. Les formules générales obtenues pour le cas où la courbe donnée est à double courbure devraient être modifiées s'il s'agissait de trouver sur une surface conique une courbe qui coupât ses génératrices sous un angle constant. En effet, dans ce cas, l'arête de rebroussement de la surface est un point, et si a, b, c sont les coordonnées de ce point,

les équations d'une génératrice quelconque seront de la forme

$$x - a = \alpha(z - c), \quad y - b = (z - c)\varphi\alpha,$$

α étant une quantité variable pour chaque génératrice, et $\varphi\alpha$ une fonction de α qui sera déterminée pour chaque surface conique. Comme l'élimination de α entre ces deux équations donnerait l'équation de la surface, si on les différentie successivement par rapport à x et à y en regardant α et z comme des fonctions de ces deux coordonnées, on trouvera

$$p = \frac{\varphi'\alpha}{\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha}, \quad q = -\frac{1}{\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha},$$

par suite

$$s = -\frac{\varphi\alpha\varphi''\alpha}{(\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha)^2}\frac{d\alpha}{dy}, \quad t = \frac{\alpha\varphi''\alpha}{(\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha)^2}\frac{d\alpha}{dy}.$$

La substitution de ces valeurs dans la formule (1) donnerait

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k[\varphi'\alpha + \alpha(\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha)] + \varphi\alpha\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha)^2}}{k[1 - \varphi\alpha(\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha)] + \alpha\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha)^2}}.$$

On a d'ailleurs

$$(x - a)\varphi\alpha = \alpha(y - b), \quad \text{d'où} \quad y = \frac{\varphi\alpha}{\alpha}(x - a) + b.$$

On différentiera cette dernière équation, puis on mettra pour $\frac{dy}{dx}$, l'expression précédente, et l'on trouvera

$$\frac{dx}{x - a} = \frac{k[1 - \varphi\alpha(\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha)] + \alpha\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha)^2}}{k\alpha[1 + \alpha^2 + (\varphi\alpha)^2]}d\alpha,$$

équation dans laquelle les variables se trouvent séparées et qui s'intégrera immédiatement. Entre cette intégrale et l'équation

$$y = \frac{\varphi\alpha}{\alpha}(x - a) + b,$$

on éliminera α et l'on aura l'équation de la projection de chaque trajectoire sur le plan des x, y.

Supposons, par exemple, que la surface donnée soit un cône droit et circulaire dont le sommet soit à l'origine des coordonnées et dont l'axe soit pris pour axe des z; l'équation de cette surface serait

$$m^2 z^2 = x^2 + y^2,$$

m étant une constante, et les équations d'une génératrice seraient

$$x = \alpha z, \quad y = \sqrt{m^2 - \alpha^2}.z.$$

On trouverait pour l'équation de la projection de chaque trajectoire sur le plan des x, y,

$$l.C\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{m}{k\sqrt{1+m^2}} \text{ arc sin } \frac{1}{\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}},$$

C étant une constante arbitraire. Si l'on veut que la trajectoire soit orthogonale, on fera

$$k = \infty,$$

ce qui donnera

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{c^2},$$

équation d'un cercle, comme on devait s'y attendre.

6. Nous allons enfin appliquer les formules générales des nos 2 et 3 au cas où la courbe donnée serait une hélice tracée sur un cylindre circulaire droit, et où par conséquent la surface lieu de ses tangentes serait une héliçoïde développable. Si l'on prend pour axe des z l'axe du cylindre, et pour axes des x et des y deux axes rectangulaires situés dans le plan de la base, les équations de l'hélice seront

$$x = \mathrm{R} \cos \frac{z}{\mathrm{R}a}, \quad y = \mathrm{R} \sin \frac{z}{\mathrm{R}a},$$

R étant le rayon du cylindre et a la cotangente de l'angle constant que fait chaque tangente à l'hélice avec la direction des génératrices.

On voit donc, en posant $z = \alpha$, que les fonctions que nous avons désignées par $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ seront ici

$$\varphi\alpha = \mathrm{R} \cos \frac{\alpha}{\mathrm{R}a}, \quad \psi\alpha = \mathrm{R} \sin \frac{\alpha}{\mathrm{R}a},$$

et l'on trouvera, après de nombreuses réductions, que l'équation (5) devient

$$(6)\qquad dx = \left(\frac{1}{\mathrm{R}a}\cot\frac{\alpha}{\mathrm{R}a} + \frac{1}{\mathrm{R}ak\sqrt{1+a^2}}\right)\left(x - \mathrm{R}\cos\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\right)d\alpha.$$

Intégrant, il vient

$$x = \sin\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\, e^{\frac{\alpha}{\mathrm{R}ak\sqrt{1+a^2}}}\left[\mathrm{C} - \frac{1}{\alpha}\int e^{-\frac{\alpha}{\mathrm{R}ak\sqrt{1+a^2}}}\left(\cot^2\frac{\alpha}{\mathrm{R}a} + \frac{1}{k\sqrt{1+a^2}}\cot\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\right)d\alpha\right].$$

Mais on trouve

$$\int e^{-\frac{\alpha}{\mathrm{R}ak\sqrt{1+a^2}}}\cot^2\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\,d\alpha = \mathrm{R}a.e^{-\frac{\alpha}{\mathrm{R}ak\sqrt{1+a^2}}}\left[k\sqrt{1+a^2} - \cot\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\right]$$
$$- \frac{1}{k\sqrt{1+a^2}}\int e^{-\frac{\alpha}{\mathrm{R}ak\sqrt{1+a^2}}}\cot\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\,d\alpha,$$

de sorte qu'en substituant, les deux intégrales qui resteront dans l'expression de x se détruiront, et l'on obtiendra enfin

$$(7)\qquad x = \mathrm{C}\sin\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\, e^{\frac{\alpha}{\mathrm{R}ak\sqrt{1+a^2}}} - \mathrm{R}\left[k\sqrt{1+a^2}\sin\frac{\alpha}{\mathrm{R}a} - \cos\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\right],$$

équation à laquelle on joindra celle de la tangente à l'hélice au point pour lequel $z = \alpha$,

$$(8)\qquad y\sin\frac{\alpha}{\mathrm{R}a} + x\cos\frac{\alpha}{\mathrm{R}a} = \mathrm{R}.$$

L'élimination de α entre ces deux équations donnera l'équation de la projection de chacune des trajectoires sur le plan des x, y; de la dernière on déduirait d'ailleurs sans difficulté la valeur de α.

Considérons la trajectoire qui répond à $\mathrm{C} = 0$; les équations (7) et (8) donneront

$$x = \mathrm{R}\left(\cos\frac{\alpha}{\mathrm{R}a} - k\sqrt{1+a^2}\sin\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\right),$$
$$y = \mathrm{R}\left(\sin\frac{\alpha}{\mathrm{R}a} + k\sqrt{1+a^2}\cos\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\right),$$

et, en élevant celles-ci au carré et ajoutant les résultats

$$x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2 [1 + k^2 (1 + a^2)].$$

D'où il suit que la trajectoire est l'intersection de l'héliçoïde avec un cylindre circulaire droit de même axe que le premier et d'un rayon égal à

$$\mathrm{R}\sqrt{1 + k^2(1 + a^2)};$$

si l'on se donnait ce rayon, que j'appelle R', on en conclurait

$$k = \frac{1}{\mathrm{R}}\sqrt{\frac{\mathrm{R}'^2 - \mathrm{R}^2}{1 + a^2}}.$$

En outre, l'équation de l'héliçoïde étant

$$(9) \quad y \sin\left(\frac{z}{\mathrm{R}a} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - \mathrm{R}^2}}{\mathrm{R}}\right) + x \cos\left(\frac{z}{\mathrm{R}a} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - \mathrm{R}^2}}{\mathrm{R}}\right) = \mathrm{R};$$

si l'on remplace $x^2 + y^2$ par sa valeur, elle deviendra

$$y \sin\left(\frac{z}{\mathrm{R}a} + k\sqrt{1 + a^2}\right) + x \cos\left(\frac{z}{\mathrm{R}a} + k\sqrt{1 + a^2}\right) = \mathrm{R},$$

et en différentiant cette équation, et observant que l'on a

$$xdx + ydy = 0,$$

on trouvera

$$dx = -\frac{y}{\mathrm{R}a}dz, \quad dy = \frac{x}{\mathrm{R}a}dz.$$

Donc, en désignant par s l'arc de la trajectoire compté à partir d'un point quelconque, on aura

$$ds = dz\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}\sqrt{1 + k^2}}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dz}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}\sqrt{1 + k^2}}},$$

quantité constante, ce qui montre que la trajectoire est telle que ses tangentes font un angle constant avec les génératrices du cylindre qui la contient, ou, en d'autres termes, qu'elle est une hélice; on s'assurerait aisément que cette hélice a même pas que l'hélice donnée. Les autres trajectoires qui répondent à la même valeur de k, mais à des valeurs quelconques de C, sont aussi des hélices, puisque leurs tangentes sont respectivement parallèles à celles de la première trajectoire et qu'elles font, par conséquent, un angle constant avec la direction des génératrices du cylindre; mais les cylindres sur lesquels sont situées les nouvelles trajectoires ne sont plus à base circulaire.

Ces résultats ne sont pas applicables au cas où k est infini, c'est-à-dire lorsque les trajectoires deviennent des développantes de l'hélice ou les lignes de courbure de l'héliçoïde, car la forme de l'intégrale qui donne x en fonction de α n'est plus la même qu'auparavant. En effet, la formule (6) devient

$$dx = \frac{1}{Ra} \cot \frac{\alpha}{Ra}\left(x - R\cos\frac{\alpha}{Ra}\right) d\alpha,$$

et en intégrant

$$x = \sin\frac{\alpha}{Ra}\left(C + R\cot\frac{\alpha}{Ra} + \frac{\alpha}{a}\right),$$

d'où

$$x - R\cos\frac{\alpha}{Ra} = \sin\frac{\alpha}{Ra}\left(C + \frac{\alpha}{a}\right).$$

Il faut éliminer α entre cette équation et l'équation

$$y\sin\frac{\alpha}{Ra} + x\cos\frac{\alpha}{Ra} = R;$$

or celle-ci donnerait

$$x - R\cos\frac{\alpha}{Ra} = \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}\sin\frac{\alpha}{Ra},$$

valeur qui, substituée dans la première, donne

$$\alpha = a\left(\sqrt{x^2 + y^2 - R^2} - C\right).$$

Enfin, portant cette valeur de a dans la seconde, on aura

$$y\sin\frac{-C + \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}}{R} + x\cos\frac{-C + \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}}{R} = R,$$

ce qui est l'équation de la projection de chacune des lignes de courbure de l'héliçoïde sur le plan des x, y; en la joignant à celle de l'héliçoïde (9), on aura les deux équations qui déterminent chaque ligne de courbure. Or, si l'on compare ces deux équations, on verra, par leur composition analogue, que les valeurs des sinus et des cosinus qui y sont renfermés doivent être les mêmes; par suite, les arcs eux-mêmes doivent être égaux. Donc on aura, pour tous les points d'une même trajectoire orthogonale,

$$\frac{z}{a} = -C,$$

ou simplement

$$z = \text{une constante},$$

ce qui est l'équation d'un plan parallèle au plan des x, y. Ainsi les trajectoires orthogonales des tangentes à l'hélice sont les sections faites sur l'héliçoïde développable par des plans parallèles au plan de la base du cylindre. Si l'on faisait $C = 0$, la trajectoire serait la trace de l'héliçoïde sur le plan des x, y, ou bien la développante du cercle qui sert de base au cylindre.