JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DUHAMEL

Mémoire sur un phénomène relatif à la communication des mouvements vibratoires

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 113-131.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__113_0>

MÉMOIRE
SUR UN PHÉNOMÈNE
RELATIF
A LA COMMUNICATION DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES;

Par M. DUHAMEL.

Dans son premier Mémoire sur la communication des mouvements vibratoires, M. Savart a fait connaître un phénomène qui lui paraissait très-singulier, mais dont il n'a pas donné l'explication. Il s'est borné à indiquer une cause à laquelle on pouvait, disait-il, l'attribuer; mais il ne s'est pas prononcé d'une manière absolue, et je montrerai d'ailleurs que les choses se passent autrement qu'il ne le supposait. Le Mémoire que je publie aujourd'hui a pour objet de donner l'explication générale de ce phénomène et d'en soumettre les différentes circonstances à l'analyse mathématique. Je commencerai par extraire du Mémoire de M. Savart le passage suivant, qui fera connaître en quoi consiste le phénomène et comment cet illustre physicien l'envisageait.

« Quand deux verges sont réunies de manière que l'une des deux » tombe perpendiculairement sur l'un des points de l'autre, destiné » à être le milieu d'une partie vibrante, si l'on excite des ondes longi» tudinales dans la première, la seconde deviendra le siége de vibra» tions transversales.

» Il se présente ici une question très-difficile à résoudre. Comment » se fait-il que des vibrations longitudinales excitées dans une verge » très-courte, vibrations dont le nombre doit être très-considérable » dans un temps donné, et qui devraient produire un son extrême» ment aigu, puissent provoquer l'existence de vibrations transver» sales beaucoup plus lentes.

» Les circonstances qui accompagnent cette expérience pourront

» peut-être jeter quelque jour sur un phénomène si singulier. Si l'on
» place verticalement l'appareil, et qu'on excite des vibrations trans-
» versales dans la grande verge A, nous avons vu que la petite verge A'
» devenait le siége de vibrations longitudinales; si l'on tient compte
» de la disposition des lignes nodales formées par le sable, on remar-
» que que quand on ébranle directement la petite verge A' dans le sens
» longitudinal, ces lignes prennent le même arrangement que dans le
» premier cas; on pourrait donc penser que la première série d'ondes
» excitées directement arrivant contre la grande verge A, est pour elle
» un mode d'ébranlement quelconque, une espèce d'archet qui la dé-
» termine à osciller suivant que le comportent ses dimensions; et
» qu'aussitôt qu'elle est en jeu, elle réagit sur la petite verge A', qui
» devient alors le siége d'ondes dont la longueur est déterminée par
» l'espace que le son parcourt pendant le temps que dure une des vi-
» brations de la grande verge A; ce qui supposerait par conséquent
» que A' vibrerait toujours à l'unisson avec A, quelque différentes que
» fussent les dimensions de ces deux corps. »

Ainsi le phénomène reconnu par M. Savart consiste en ce qu'une verge adaptée perpendiculairement à une autre, et frottée dans le sens de sa longueur, détermine la seconde à vibrer de la même manière que si on l'ébranlait au moyen d'un archet. Et quant à la manière dont ce résultat est produit, il pense que les ondes excitées dans la première verge, arrivant à la seconde, la mettent en mouvement, comme le ferait tout autre mode d'ébranlement.

Si les choses se passaient de cette manière, le phénomène serait en effet très-difficile à concevoir et à analyser. Il paraîtrait peu naturel que des vibrations d'une durée et d'une amplitude excessivement petite en produisissent d'autres très-lentes et d'une amplitude beaucoup plus grande.

Mais les vibrations excitées dans la première verge ne sont pour rien dans ce phénomène, qui ne serait nullement altéré, lors même que cette verge ne serait pas susceptible de vibrer longitudinalement. La véritable cause est la force que produit le frottement dans le sens de la première verge, que l'on peut même supposer entièrement rigide; cette force peut être considérée comme appliquée au point où la petite verge rencontre la grande, et, en l'introduisant, on peut faire abstraction de toute autre cause extérieure. La question revient donc à calculer le mouvement de la seconde verge, à laquelle on adapte une masse égale à celle de la petite en un de ses points mobiles, et qui se trouve sollicitée par une force perpendiculaire à sa longueur.

Le même phénomène aurait lieu si la première verge était fixée à une corde dont deux points seraient fixes, ou à une surface dont le contour ou seulement plusieurs points seraient immobiles. Le calcul peut être plus compliqué dans un cas que dans l'autre; mais ce qui est le plus important ici, c'est de reconnaître la vraie cause du phénomène, et de montrer à quelle question d'analyse il conduit. Pour s'assurer ensuite si la théorie s'accorde avec l'expérience, on prendra des cas où les calculs pourront s'exécuter complétement et donneront des résultats facilement comparables avec les faits; on remplira ces conditions de la manière la plus simple dans le cas actuel, en supposant la première verge adaptée à une corde fixée à ses deux extrémités.

C'est en vue de résoudre ce problème que je me suis d'abord occupé du mouvement des cordes chargées de curseurs. Dans le Mémoire que j'ai eu l'honneur de communiquer sur ce sujet à l'Académie, j'ai donné à cette question plus d'extension qu'il n'était nécessaire pour l'application que j'avais d'abord l'intention d'en faire; mais les lois auxquelles j'avais été conduit m'avaient paru assez importantes par elles-mêmes pour faire l'objet d'un travail spécial; j'aurai l'occasion d'y renvoyer dans le cours de ce Mémoire.

L'accord de ces lois et des résultats que l'expérience m'a donnés pour le phénomène qui nous occupe, suffirait pour démontrer la justesse de mon explication; mais on peut obtenir encore de nouvelles confirmations par la considération de circonstances remarquables qui doivent se produire si les choses se passent comme je l'ai indiqué.

En effet, des raisonnements analogues à ceux qui se trouvent dans mon Mémoire sur l'archet démontrent que lorsque le corps frottant a toujours une vitesse plus grande que celle de la tige frottée, le mouvement de la corde doit s'arrêter, quoique le frottement soit produit indéfiniment; qu'au contraire, lorsque la corde acquiert à certains instants une vitesse égale à celle du corps frottant, le mouvement se prolonge indéfiniment, mais que le son peut s'abaisser au-dessous du son fondamental. Or ces deux résultats, annoncés par la théorie, sont pleinement confirmés par l'expérience. Lorsque le mouvement du corps frottant est assez rapide, on voit promptement celui de la corde diminuer et devenir imperceptible, et celle-ci s'arrête dans la position où elle serait en équilibre sous l'action d'une force égale au frottement; et de même aussi, lorsque le mouvement du corps frottant est devenu assez lent, on reconnaît un abaissement notable dans le ton.

On voit donc que le phénomène observé par M. Savart doit se produire, ainsi que plusieurs autres qu'il n'a pas connus, en faisant usage d'une tige entièrement rigide, dans laquelle il ne pourrait se produire de vibrations longitudinales. Les vibrations de la corde ne sont donc pas excitées par celles de la tige, puisqu'elles doivent avoir lieu lors même que celles-ci n'existent pas. Il en résulte même que lorsque la tige est susceptible de vibrer longitudinalement, cette nouvelle circonstance ne peut tendre qu'à troubler entre certaines limites l'effet des autres. La cause à laquelle M. Savart semblait disposé à attribuer le phénomène, serait donc au contraire une de celles qui tendraient à l'empêcher. Mais je ne m'en suis pas tenu à cette vue générale, et j'ai calculé l'effet que produirait sur une corde sa liaison avec une tige qui aurait un mouvement vibratoire connu.

L'analyse m'a conduit à une proposition qu'on peut énoncer de la manière suivante, et qui renferme le cas d'une corde à laquelle seraient appliquées des forces constantes, en observant qu'une force constante peut toujours être remplacée par un état initial convenable.

Lorsqu'une corde, partant d'un état initial quelconque, a l'une de ses extrémités fixes et l'autre animée d'un mouvement périodique permanent, son mouvement est la superposition de trois autres dont l'un dépend de l'état initial, et les deux autres en sont indépendants. L'un de ces derniers est périodique, et la durée de sa période est la même que celle qui se rapporte à l'extrémité. L'autre est aussi périodique, mais la durée de sa période est la même que si la corde vibrait avec ses extrémités fixes.

Cette indication de l'analyse méritait d'être vérifiée par l'expérience. Pour cela j'ai pris une corde tendue par un poids arbitraire, ayant une de ses extrémités fixe, et l'autre attachée à l'un des angles d'une plaque métallique carrée, dans le plan de laquelle la corde était comprise; puis j'ai fait vibrer la plaque de manière à avoir deux lignes nodales parallèles aux côtés et passant par le centre : les angles ont eu le plus grand mouvement possible, ainsi que l'extrémité de la corde; de sorte que les vibrations de tous les points de celle-ci étaient très-sensibles. Pour les déterminer, j'ai employé le moyen dont j'ai souvent fait usage, et que j'avais imaginé il y a bien des années. J'ai adapté en un point quelconque de la corde une petite lame élastique recourbée en pointe à son extrémité, et d'une masse insensible. La pointe pressait légèrement un plateau de verre recouvert d'une légère couche de fumée, et auquel on donnait un mouvement arbitraire, les vibrations se peignaient ainsi d'une manière parfaitement nette. J'ai de même adapté une seconde lame à l'angle de la plaque, et j'ai pu facilement comparer les nombres de vibrations exécutées dans un même temps par un point quelconque de la corde et par son extrémité, dont le mouvement était identique à celui de l'angle de la plaque. Or voici ce qui résulte de mes observations.

Lorsque, dans son état initial, la corde est sensiblement écartée de sa position d'équilibre, le mouvement de ses différents points résulte de la superposition clairement dessinée de deux mouvements partiels : le premier est celui qu'on aurait obtenu d'après l'état initial, en supposant fixes les deux extrémités de la corde; le second est périodique et synchrone avec celui de la plaque ou de l'extrémité mobile. Peu à peu le premier s'affaiblit et finit bientôt par s'anéantir; le second, au contraire, persiste avec la plus grande régularité, aussi longtemps que la plaque elle-même conserve son mouvement. Dans ce mouvement final il se forme des nœuds si la corde a une tension telle, que si l'on fixait les extrémités, elle vibrerait moins rapidement que la plaque. Dans le cas contraire il ne s'en forme pas, et quelque rapides que dussent être les vibrations de la corde abandonnée à elle-même avec ses extrémités fixes, celles qui ont lieu ont toujours la même période que celles de la place, et les choses se passent comme si la corde était prolongée et que le premier nœud fût au delà de l'extrémité mobile.

Ces expériences font voir que l'un des mouvements dont l'existence est annoncée par l'analyse est généralement insensible, après un certain temps, sans que l'on doive conclure toutefois qu'il ne puisse jamais être manifesté. Et l'on doit toujours remarquer cette indication de l'analyse, que *des systèmes en repos, mis en communication avec des* *systèmes vibrants, peuvent exécuter des mouvements qui n'arrivent pas à avoir la même période que ceux qui les produisent.*

Il résulte de ce qui précède que si, dans l'expérience de M. Savart, la corde était mise en mouvement par les vibrations longitudinales excitées dans la petite tige, chacune de ses parties se trouverait dans les circonstances que nous venons d'étudier, et par conséquent exécuterait des vibrations de même durée que celles de la tige, c'est-à-dire très-différentes de celles qu'indique l'observation. Ainsi ce phénomène, que nous avons si naturellement et si complétement expliqué et calculé, ne peut qu'être troublé par la cause que lui assignait notre illustre confrère. Cette cause ne pourrait, du reste, le modifier que d'une quantité insensible, vu la petitesse de l'amplitude des vibrations longitudinales de la tige, comparativement aux vibrations transversales de la corde. Enfin on peut ajouter que cette cause si minime n'existe même pas toujours; car il ne suffit pas de frotter une tige pour la faire vibrer, il faut y déterminer d'abord des points immobiles, destinés à devenir des nœuds de vibration, ce qui ne se fait pas dans l'expérience que nous discutons : et par conséquent il y a lieu de croire que, le plus ordinairement, les vibrations longitudinales, dont l'effet serait insensible, n'existent même pas réellement dans la tige frottée.

Pour épuiser en quelque sorte l'analyse de cette partie du phénomène, j'ai cherché à produire effectivement des vibrations longitudinales dans la tige et à déterminer le mouvement résultant de la corde. Mais, pour obtenir ce résultat, il fallait faire l'expérience autrement que M. Savart, et rendre immobiles certains points de cette tige. A cet effet j'ai fixé son milieu seulement, pour que ses mouvements fussent plus perceptibles, et j'y ai excité immédiatement des vibrations longitudinales accompagnées d'un son très-pur, propre par lui seul à les faire reconnaître. La corde s'est trouvée dans le même cas que nous avons examiné tout à l'heure en considérant une corde dont une extrémité était mise en mouvement par les vibrations d'une plaque, et l'expérience a donné des résultats analogues; seulement les mouvements de la corde produits par les vibrations de la tige avaient, comme celles-ci, une amplitude très-petite; mais il était très-facile de compter les nombres des vibrations exécutées de part et d'autre dans un même temps, et de reconnaître leur parfaite égalité.

Il résulte de là que *des vibrations longitudinales excitées dans la tige produisent des vibrations transversales synchrones dans la corde, quelle que soit sa longueur, ainsi que sa masse et celle de la tige, et que par conséquent elles ne sont pour rien dans le phénomène que nous étudions.*

Le mouvement de la corde étant connu, il reste à déterminer celui de la verge, et comme elle est supposée susceptible de condensation et de dilatation, le calcul de ses vibrations présente une question assez délicate à résoudre. Il s'agit alors de *déterminer le mouvement des différents points d'une verge élastique dont une extrémité est animée d'un mouvement connu dirigé dans le sens de sa longueur, et dont l'amplitude est incomparablement plus grande que celle des vibrations longitudinales dont cette verge peut être le siége.* La solution de cette question pourrait facilement donner lieu à des méprises, et peut sembler au premier abord plus facile qu'elle ne l'est réellement; je l'ai obtenue au moyen d'une méthode générale que j'ai fait connaître, il y a longtemps, dans mon Mémoire sur les vibrations d'un système de points matériels.

J'ai été conduit ainsi à reconnaître deux espèces de vibrations longitudinales dans la verge : les unes ont la même période que celles de la corde, et les autres ont pour période celles des vibrations de cette verge dont on fixerait une extrémité en laissant l'autre libre; elles seraient produites en partant d'un certain état initial et abandonnant la verge à elle-même. Si, comme nous le supposons ici, la verge a une petite longueur, ces dernières seront très-rapides, et les points où le sable répandu sur leur face horizontale supérieure se réunirait seraient très-rapprochés. Il n'en sera pas de même des vibrations beaucoup plus lentes de la première espèce : elles donneront pour le sable des points de repos plus distants; et comme les mouvements qui les déterminent auront plus d'amplitude, l'accumulation du sable ne sera réellement due qu'à ces vibrations, synchrones avec celles de la corde.

Or, c'est aussi ce que l'expérience a donné à M. Savart, et il n'a pu reconnaître que cette seule espèce de vibrations. Il aurait fallu un mode d'expérimentation plus délicat pour distinguer l'autre espèce de mouvement indiqué par le calcul.

Le Mémoire dont je viens de donner l'analyse offre un nouvel exemple des mouvements vibratoires produits par le frottement. C'est dans mon Mémoire sur la théorie de l'archet que j'ai introduit pour la première fois cette force dans l'acoustique, et cette considération était essentielle pour l'intelligence de phénomènes jusqu'alors inexpliqués. Les physiciens expérimentateurs verront sans doute avec plaisir cette nouvelle application de l'analyse, qui non-seulement a conduit à l'explication complète de phénomènes dont ils ne s'étaient pas rendu compte, mais qui en a fait prévoir d'autres que l'expérience a pleinement confirmés.

Mouvement d'une corde élastique en un point de laquelle est fixée perpendiculairement une tige rigide que l'on frotte longitudinalement.

Le frottement exercé sur la tige produit une force dépendante de la nature de la tige et du corps frottant, et de leur pression mutuelle, que nous supposerons constante. Cette force est dirigée suivant la longueur de la verge, dans le sens de la vitesse relative du corps frottant; mais son intensité est indépendante de la grandeur de cette vitesse. On peut la supposer appliquée à tel point qu'on voudra de sa direction, par exemple à celui où la tige est fixée à la corde, et le problème se ramène à celui-ci :

« Déterminer le mouvement d'une corde chargée d'un curseur en » un quelconque de ses points, et sollicitée par une force appliquée » en ce même point. »

Il y a ici deux cas à distinguer: celui où la vitesse du corps frottant est telle, que jamais celle de la verge ne lui soit égale, et celui où cette égalité a lieu à certains instants du mouvement.

Dans le premier cas, le corps frottant ayant toujours une vitesse plus grande que celle de la tige, la force qu'il produit est toujours dirigée dans le même sens; elle est d'ailleurs d'intensité constante, puisque la pression ne varie pas, et par conséquent la corde est soumise à l'action d'une force indépendante du temps. On rentre alors dans une question plus générale, traitée dans mon Mémoire sur les vibrations des cordes chargées de curseurs, et l'on en déduira la solution suivante du problème qui nous occupe :

On commencera par chercher la position d'équilibre de la corde sous l'influence d'une force égale à celle du frottement longitudinal exercé sur la tige; on en déduira la position relative des points de la corde dans l'état initial et dans cet état d'équilibre; on considérera ensuite un état initial où les positions de la corde seraient exactement les mêmes par rapport à leur position naturelle d'équilibre en ligne droite, et où les vitesses de ces points seraient celles de l'état initial proposé; on supposera de plus que cette corde soit chargée d'un curseur ayant une masse égale à celle de la tige et appliquée au même point. Cela posé, le mouvement de la corde dans ces circonstances sera identiquement le même par rapport à la droite qui joint ses extrémités, que celui de la corde dans les circonstances données le sera par rapport à sa position d'équilibre sous l'influence du frottement.

Les lois du mouvement de la corde mise en vibration par le frottement de la tige sont donc celles que j'ai fait connaître dans le Mémoire déjà cité, et il est inutile de les rappeler ici. Elles s'accordent avec les résultats de l'expérience, et cela suffirait pour en conclure la justesse de notre explication. Mais si la manière dont nous avons envisagé ce phénomène est exacte, il doit, en outre, se produire des phénomènes remarquables qui en fourniront de nouvelles vérifications.

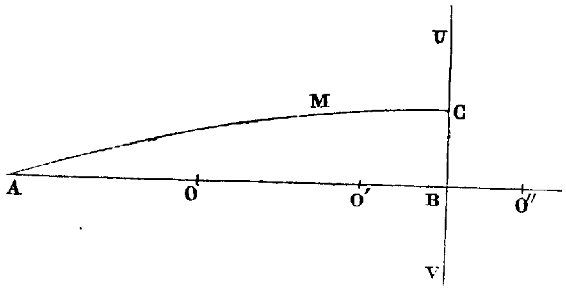
En effet, une discussion tout à fait semblable à celle que j'ai faite dans la théorie de l'action de l'archet démontre que si la roue frottante a une vitesse suffisamment grande, les vibrations doivent s'anéantir promptement; comme si la corde, écartée de sa position d'équilibre, était abandonnée à elle-même sous l'influence de toutes les causes qui tendent à éteindre progressivement son mouvement. Et, au contraire, si la roue a une vitesse assez petite relativement à la pression qu'elle exerce sur la corde, le nombre des vibrations de celle-ci doit diminuer, et par conséquent, le ton doit baisser. Or, comme je l'ai dit dans le préambule de ce Mémoire, l'expérience a confirmé ces deux indications de la théorie.

Mouvement d'une corde liée à une tige perpendiculaire qui vibre longitudinalement.

Étudions maintenant le mouvement que produiraient dans la corde des vibrations longitudinales existant dans la tige, et voyons s'il confirme ou s'il détruit l'explication de M. Savart.

Supposons une tige solide fixée par l'une de ses extrémités perpendiculairement en un point d'une corde tendue dont les extrémités sont fixes. Rendons immobile le milieu de cette tige, et excitons en elle des vibrations longitudinales. L'extrémité liée à la corde ne supportera qu'une pression insensible à cause de la petite amplitude de ses vibrations, à moins que la corde n'ait une masse considérable, ce que nous ne supposons pas. La tige vibrera donc à très-peu de chose près comme si elle était libre, et si elle rend le son le plus grave dont elle soit susceptible dans ces circonstances, il y aura un nœud unique en son milieu. Le point de la corde en contact avec son extrémité partagera son mouvement périodique qui sera connu; et pour les deux parties de la corde on a à résoudre ce problème :

Trouver le mouvement d'une corde tendue dont une extrémité est fixe, tandis que l'autre a un mouvement périodique donné.



Soit A l'extrémité fixe, B l'extrémité mobile sur une ligne UV perpendiculaire sur AB; AMC la position initiale de la corde dont tous les points ont à ce moment des vitesses connues perpendiculaires à AB. Supposons que le point B ait un mouvement représenté par l'équation

$$y = k \sin(mt + \varepsilon),$$

la quantité k étant assez petite pour que les équations ordinaires soient satisfaites. Le problème consistera alors à satisfaire aux conditions suivantes:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0,$$

$$y = k \sin(mt + \varepsilon) \quad \text{pour} \quad x = l,$$

$$\left.\begin{aligned} y &= F(x) \\ \frac{dy}{dt} &= f(x) \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Les fonctions F et f devront satisfaire aux conditions

$$F(l) = k \sin \varepsilon, \quad f(l) = mk \cos \varepsilon,$$

pour qu'il n'y ait pas d'incompatibilités dans les données.

On satisfera aux trois premières équations en prenant

$$y = \frac{k}{\sin \frac{ml}{a}} \sin(mt + \varepsilon) \sin \frac{mx}{a}.$$

Pour avoir la solution complète, il suffira d'ajouter à cette valeur de y une nouvelle valeur satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0, \quad y = 0 \quad \text{pour} \quad x = l,$$

$$\left.\begin{aligned} y &= F(x) - \frac{k \sin \varepsilon}{\sin \frac{ml}{a}} \sin \frac{mx}{a} \\ \frac{dy}{dt} &= f(x) - \frac{mk \cos \varepsilon}{\sin \frac{ml}{a}} \sin \frac{mx}{a} \end{aligned}\right\} \text{pour} \quad t = 0.$$

La solution du problème est donc donnée par la formule suivante :

$$(1) \left\{\begin{aligned} y = {} & \frac{k}{\sin \frac{ml}{a}} \sin(mt + \varepsilon) \sin \frac{mx}{a} \\ & + \frac{2}{l} \sum \sin \frac{i\pi x}{l} \cos \frac{i\pi at}{l} \int_0^l \sin \frac{i\pi\alpha}{l} d\alpha \left[F(\alpha) - \frac{k \sin \varepsilon}{\sin \frac{ml}{a}} \sin \frac{m\alpha}{a}\right] \\ & + \frac{2}{\pi a} \sum \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{i\pi at}{l} \int_0^l \sin \frac{i\pi\alpha}{l} d\alpha \left[f(\alpha) - \frac{mk \cos \varepsilon}{\sin \frac{ml}{a}} \sin \frac{m\alpha}{a}\right]. \end{aligned}\right.$$

Le premier terme de cette formule représente un mouvement périodique simple, dans lequel la corde présenterait des nœuds o, o', o'',... distants les uns des autres de $\frac{\pi a}{m}$; et ce mouvement se produirait de lui-même en supposant la corde prolongée en o'' et fixée en ce point, pourvu qu'on lui donnât l'état initial relatif à cette expression.

Les autres parties de la formule (1) représentent le mouvement de la corde dont les extrémités A et B seraient fixes et qui partiraient d'un certain état initial connu. La superposition de ces deux mouvements forme le mouvement demandé. Il resterait le même indéfiniment sans les diverses causes dont le calcul n'a pas tenu compte et qui l'affaiblissent insensiblement. Ces causes ne sauraient anéantir entièrement le mouvement, puisque par un moyen quelconque on entretient constamment celui du point B; mais tout ce qui dépend des fonctions F et f finit bientôt par disparaître, et il ne reste plus de trace de l'état initial arbitraire de la corde. Néanmoins il restera deux séries de termes représentant un mouvement, dans lequel les deux extrémités de la corde seraient fixes. Or l'expérience montre qu'en vertu des résistances dont on ne peut faire abstraction dans la réalité, *le mouvement de la corde finit toujours par être périodique, et que la durée de la période est la même que celle de l'extrémité mobile.*

C'est ce que j'ai vérifié en fixant un des points de la corde soit à l'extrémité d'une verge animée d'un mouvement vibratoire longitudinal, soit en un point d'une plaque vibrant normalement. Ce dernier moyen est le plus commode, vu la plus grande amplitude et la plus grande durée des vibrations.

Dans toutes ces expériences le mouvement indiqué par l'analyse et correspondant aux extrémités fixes est resté insensible.

Ce résultat ne permet donc pas d'attribuer les vibrations de la corde à celles de la tige, puisqu'elles devraient être synchrones avec ces dernières, et que cependant elles sont beaucoup plus lentes.

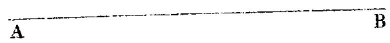
L'explication de M. Savart ne saurait donc être admise; et il ne me semble pas qu'on puisse en donner une autre que celle que j'ai proposée dans ce Mémoire.

Mouvement absolu et relatif des points d'une verge dont une extrémité est libre et l'autre a un mouvement donné, d'une amplitude quelconque dans le sens de sa longueur.

Maintenant que le mouvement de la corde est connu, on peut déterminer celui des différents points de la verge, en la supposant élastique et par conséquent susceptible de condensation et de dilatation.

L'extrémité de cette verge aura un mouvement connu, qui sera celui de la corde au point où elle est attachée, et la question que nous nous proposons pourra être énoncée de la manière suivante :

Trouver le mouvement absolu et relatif des points d'une verge élastique dont une extrémité est libre, et dont l'autre a un mouvement connu d'une amplitude quelconque dans le sens de sa longueur.



Soit A la position initiale de l'extrémité dont le mouvement est connu, et que nous choisissons pour plus de simplicité au moment où sa vitesse est nulle; désignons par u le déplacement d'un point quelconque de la verge, par rapport à la position qu'il occupait dans l'état naturel d'équilibre, où la première extrémité était en A. Prenons A pour origine des x qui seront dirigées dans le sens de la verge; u sera une fonction de x et t qu'il s'agit de déterminer.

On remarquera d'abord que le mouvement d'un élément quelconque entre A et B ne dépend que des pressions qu'il supporte à chaque instant à ses deux extrémités, quelles que soient d'ailleurs les conditions auxquelles certains points particuliers soient assujettis, ce qui donnera d'abord l'équation générale

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2},$$

a étant une constante connue.

Le mouvement connu de l'extrémité A est déterminé par une fonction $\varphi(t)$ qui représente u pour $x = 0$, d'où résulte la condition particulière

$$(2) \qquad u = \varphi(t) \quad \text{pour} \quad x = 0,$$

et, d'après la manière dont nous avons choisi l'origine du temps et celle des x, on aura

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi'(0) = 0.$$

La seconde extrémité de la verge étant entièrement libre sera soumise à une pression constante qu'on peut toujours supposer nulle; ce qui donnera, en désignant par l la longueur de la verge,

$$\frac{du}{dx} = 0 \quad \text{pour} \quad x = l. \tag{3}$$

Enfin on pourra supposer, pour donner toute la généralité possible à la question, que l'état inital de la verge ne soit pas celui de l'équilibre naturel ; et que l'on ait

$$u = \mathrm{F}(x) \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt} = f(x) \quad \text{pour} \quad t = 0, \tag{4}$$

ce qui exigera

$$\mathrm{F}(0) = 0, \quad f(0) = 0,$$

d'après les suppositions précédentes.

Cela posé, il s'agit de trouver une valeur de (u) qui satisfasse aux équations (1), (2), (3), (4).

En faisant usage de la méthode que j'ai exposée dans mon Mémoire sur les vibrations d'*un système de points matériels*, on obtiendra la formule suivante, qui subsisterait encore sans modifications si l'on n'avait pas $\varphi'(0) = 0$,

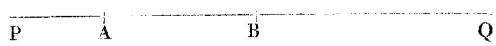
$$\left\{\begin{aligned} u = \varphi(t) &- \frac{4}{\pi} \sum \frac{\sin(2n+1)\pi \frac{x}{2l}}{2n+1} \int_0^t \varphi'(\varepsilon)\, d\varepsilon \cos \frac{(2n+1)\pi a(t-\varepsilon)}{2l} \\ &+ \frac{2}{l} \sum \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \left\{\begin{aligned} &\cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \int_0^l \mathrm{F}(\alpha) \sin \frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}\, d\alpha \\ &+ \frac{2l \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2l}}{(2n+1)\pi a} \int_0^l f(\alpha) \sin \frac{(2n+1)\pi\alpha}{2l}\, d\alpha \end{aligned}\right\}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

La dernière partie de cette expression représente le mouvement de la verge dans l'hypothèse où son extrémité A serait fixe et l'autre libre, l'état initial étant déterminé par les fonctions $\mathrm{F}(x)$, $f(x)$. Le mouvement total résulte donc de la superposition de celui-ci, et d'un autre où, l'état initial étant l'état naturel, l'extrémité A, au lieu d'être immobile, serait assujettie au mouvement donné. La première partie du mouvement finit bientôt par disparaître, et la seconde subsiste aussi longtemps que le mouvement même du point A. On peut donc, après un temps très-court, se borner à la valeur suivante de u qui ne conserve aucune trace de l'état initial,

$$(6) \qquad u = \varphi(t) - \frac{4}{\pi}\sum \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\int_0^t \varphi'(\varepsilon)\,d\varepsilon \cos\frac{(2n+1)\pi a(t-\varepsilon)}{2l}.$$

Le premier terme $\varphi(t)$ qui représente le mouvement de l'extrémité A, étant une partie commune au mouvement de toutes les autres, la seconde partie représente le mouvement relatif de tous les points de la verge, ce qui était l'objet de la question.

Avant d'aller plus loin, vérifions la formule (5) en l'appliquant à un cas particulier dont la solution soit déjà connue.



Considérons, par exemple, une verge PQ ayant ses extrémités fixes, et dont les points aient un mouvement simple, exprimé par la formule

$$v = \mathrm{M}\sin\frac{\pi a t}{d}\sin\frac{\pi x}{d},$$

d désignant la longueur PQ. La condensation sera constamment nulle au milieu B, et le mouvement d'un point A correspondant à $x = (1 - m)\frac{d}{2}$ sera exprimé par l'équation

$$v = \mathrm{M}\sin\frac{\pi a t}{d}\sin(1 - m)\frac{\pi}{2}.$$

Donc, si dans la formule (5) on fait

$$\varphi(t) = \mathrm{M}\sin\frac{(1-m)\pi}{2}\sin\frac{\pi a t}{d},$$

$$l = \frac{md}{2}, \quad \mathrm{F}(x) = 0, \quad f(x) = \frac{\mathrm{M}\pi a}{d}\sin\left[\frac{\pi x}{d} + \frac{(1-m)\pi}{2}\right],$$

l'origine des x étant prise en A, on doit trouver pour u la valeur même de v, qui est alors

$$(7) \qquad v = \mathrm{M}\sin\frac{m\pi a t}{2l}\sin\left[\frac{m\pi x}{2l} + \frac{(1-m)\pi}{2}\right].$$

En effectuant les intégrations indiquées dans l'équation (5), elle devient, dans ce cas particulier,

$$u = \mathrm{M}\sin(1-m)\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi amt}{2l}$$
$$-\frac{4\mathrm{M}m\sin(1-m)\frac{\pi}{2}}{\pi}\sum\left[\frac{m\sin\frac{\pi amt}{2l}-(2n+1)\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}}{m^2-(2n+1)^2}\right]\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}}{2n+1}$$
$$-\frac{4\mathrm{M}m\sin(1-m)\frac{\pi}{2}}{\pi}\sum\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}}{m^2-(2n+1)^2}\,,$$

ou, en réduisant,

$$u = \mathrm{M}\sin(1-m)\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi amt}{2l}$$
$$+\frac{4\mathrm{M}m^2\sin(1-m)\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi amt}{2l}}{\pi}\sum\frac{1}{-m^2+(2n+1)^2}\,\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi x}{2l}}{2n+1}.$$

Or, entre les limites $x = 0$ et $x = 2l$, on a la formule

$$\sum\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi x}{2l}}{(2n+1)[(2n+1)^2-m^2]} = -\frac{\pi}{4m^2}+\frac{\pi}{4m^2}\,\frac{\cos m\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2l}\right)}{\cos\frac{m\pi}{2}}.$$

En faisant cette substitution dans l'équation précédente, et réduisant, on trouve

$$u = \mathrm{M}\sin\frac{\pi mat}{2l}\sin\left[\frac{m\pi x}{2l}+(1-m)\frac{\pi}{2}\right],$$

et cette formule coïncide, comme cela devait être, avec la valeur de v.

Cas où le mouvement de A *est périodique.*

Appliquons la formule (6) au cas particulier où la fonction $\varphi(t)$ serait périodique et de la forme

$$\varphi(t) = \mathrm{A}(1-\cos mt),$$

qui donne

$$\varphi(0) = 0,\quad \varphi'(0) = 0;$$

la durée θ de la période aura pour valeur

$$\theta = \frac{2\pi}{m}.$$

Si nous désignons par θ' la durée des vibrations de la verge ayant une extrémité fixe et l'autre libre, on aura

$$\theta' = \frac{4l}{a},$$

et le rapport $\frac{\theta}{\theta'}$ sera, en général, un très-grand nombre; en le désignant par p, on aura

$$p = \frac{\pi a}{2ml}.$$

Cela posé, on trouvera, en effectuant les calculs,

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} u = {} & \mathrm{A}(1 - \cos mt) + \mathrm{A} \cos mt \left[1 - \frac{\cos \frac{m(l-x)}{a}}{\cos \frac{ml}{a}} \right] \\ & + \frac{4\mathrm{A}}{\pi} \sum \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l}}{(2n+1)^2 p^2 - 1}. \end{aligned} \right.$$

Le mouvement d'un point quelconque se compose donc du mouvement du point A, exprimé par le premier terme $\mathrm{A}(1 - \cos mt)$, plus un autre qui est le mouvement relatif de ce point comparé à l'extrémité A. Désignant ce déplacement relatif par v, nous aurons

$$v = \mathrm{A} \cos mt \left[1 - \frac{\cos \frac{m(l-x)}{a}}{\cos \frac{ml}{a}} \right] + \frac{4\mathrm{A}}{\pi} \sum \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l}}{(2n+1)^2 p^2 - 1},$$

ou

$$(9)\quad v = -\frac{2\mathrm{A} \cos mt}{\cos \frac{ml}{a}} \sin\left(\frac{ml}{a} - \frac{mx}{2a}\right) \sin \frac{mx}{2a} + \frac{4\mathrm{A}}{\pi} \sum \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l}}{(2n+1)^2 p^2 - 1}.$$

On voit que ce mouvement est très-petit. En effet, $\frac{ml}{a} = \frac{\pi}{2p}$, et par conséquent la première partie de v renferme deux facteurs extrêmement petits; d'où il suit qu'elle est excessivement petite par rapport à $A \cos mt$, ou au mouvement absolu de l'extrémité A. Quant à la seconde partie, elle est évidemment moindre que

$$\frac{4A}{\pi} \sum \frac{1}{(2n+1)^2 p^2 - 1},$$

dont la valeur est

$$\frac{A}{p} \operatorname{tang} \frac{\pi}{2p}.$$

Cette seconde partie est donc au moins du même ordre de petitesse que la première.

En bornant les mouvements relatifs des molécules de la verge à ceux dont la période a la plus longue durée, et qui, par cette raison, doivent être les plus sensibles, comme nous l'avons fait voir précédemment, on aura

$$v = A \cos mt \left[1 - \frac{\cos m\left(\frac{l-x}{a}\right)}{\cos \frac{ml}{a}} \right].$$

Ces mouvements sont les seuls que M. Savart ait pu apercevoir dans ses expériences.

On déterminera les ventres, ou les points où la condensation est nulle, en posant

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dx} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sin \frac{m(l-x)}{a} = 0;$$

d'où l'on tire, en désignant par r un nombre entier quelconque,

$$l - x = r \frac{\pi a}{m}.$$

Les ventres sont donc situés à la distance $\frac{\pi a}{m}$ les uns des autres, à partir de l'extrémité libre qui fait partie de ces points.

Les nœuds, ou les points où la condensation est maximum ou minimum sont donnés par la condition $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$, quel que soit t, ce qui conduit à

$$\cos \frac{m(l-x)}{a} = 0,$$

d'où

$$l - x = (2r+1)\frac{\pi a}{2m},$$

ce qui donne les points milieux entre les ventres.

Mais il faut bien remarquer que ces différents points ne sont nullement ceux où le sable se réunit. M. Savart a démontré que quand une verge vibre longitudinalement, il existe un mouvement transversal synchrone, et que c'est aux milieux entre les lignes nodales de celui-ci que le sable vient se réunir. La distance de ces lignes dépend de l'épaisseur de la verge et de sa longueur, tandis que les nœuds relatifs aux vibrations longitudinales ne dépendent que de la longueur. Il résulte de là que les distances des points où le sable se réunit peuvent être beaucoup moindres que celles des nœuds relatifs aux vibrations longitudinales.

Notre analyse, ayant démontré que les seules vibrations longitudinales sensibles qui animeront la verge seront synchrones avec celles de la corde ou du corps quelconque qui donne son mouvement à l'extrémité de la verge, s'accorde complétement avec les expériences de M. Savart, comme nous l'avons annoncé dans la première partie de ce Mémoire.