JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C.-G.-J. JACOBI

Démonstration élémentaire d'une formule analytique remarquable, suivie de quelques propositions arithmétiques qui s'en déduisent

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 85-109.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__85_0>

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE

D'UNE

FORMULE ANALYTIQUE REMARQUABLE,

SUIVIE

DE QUELQUES PROPOSITIONS ARITHMÉTIQUES QUI S'EN DÉDUISENT;

PAR M. C.-G.-J. JACOBI.

(Extrait du Journal de M. Crelle. — Traduction de M. Cabart.)

Le premier exemple d'une série développée suivant des puissances croissantes dont les exposants forment une progression arithmétique du second ordre a été donné par Euler dans l'*Introductio in Analysin infinitorum*.

Dans le chapitre *De partitione numerorum*, § 323, il trouve, par induction, que le développement du produit infini

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots$$

donne une série dont le terme général est

$$(-1)^m x^{\frac{3m^2 \pm m}{2}}.$$

On a donc, puisque $3m^2 - m$ se déduit de $3m^2 + m$ en changeant $+m$ en $-m$,

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}}.$$

Ce résultat intéressant, que plus tard Euler a démontré de la manière la plus ingénieuse dans les *Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, est une conséquence immédiate des développements que fournit la théorie des *fonctions elliptiques*. (Voyez *Fundam. nova funct. ellipt.*, § 66.)

La théorie des fonctions elliptiques ne fournit pas seulement le développement du produit infini ci-dessus: elle donne encore le développement du cube de ce produit; et, dans la série qui l'exprime, les exposants forment pareillement une progression arithmétique du second ordre. Voici cette série :

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n (2n+1) x^{\frac{n^2+n}{2}}.$$

De là ce résultat remarquable, et jusqu'à ce jour unique dans l'analyse,

$$[1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \ldots]^3 = 1 - 3x + 5x^3 - 7x^6 \ldots,$$

ou

$$(1)\qquad \left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} (-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}}\right]^3 = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n (2n+1) x^{\frac{n^2+n}{2}}.$$

[Voyez *Fundam. nova funct. ellipt.*, § 66, *équation* (7).]

Je ne connais du moins aucune autre série dans laquelle les exposants des puissances forment une progression arithmétique du second ordre, et dont le cube ou toute autre puissance reproduise une série semblable. Mais plus cette formule est remarquable, plus, ce me semble, il est digne de nos efforts de montrer qu'on y est conduit, indépendamment de toute théorie, par une voie élémentaire.

Prenons dans l'équation (1) les logarithmes des deux membres, différentions par rapport à x et multiplions par $2x$; nous aurons

$$\frac{3\sum(-1)^m (3m^2+m)\, x^{\frac{3m^2+m}{2}}}{\sum(-1)^m x^{\frac{3m^2+m}{2}}} = \frac{\sum(-1)^n (2n+1)(n^2+n)\, x^{\frac{n^2+n}{2}}}{\sum(-1)^n (2n+1)\, x^{\frac{n^2+n}{2}}}.$$

Chassant les dénominateurs et écrivant tout dans un membre,

$$(2)\quad \sum\sum(-1)^{m+n}(2n+1)[3(3m^2+m)-(n^2+n)]\,x^{\frac{3m^2+m}{2}+\frac{n^2+n}{2}}=0.$$

Dans cette équation on doit mettre pour n tous les *nombres entiers* depuis o jusqu'à $+\infty$, et pour m tous les *nombres entiers* depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. L'expression

$$3(3m^2+m)-(n^2+n)$$

se décompose dans les deux facteurs

$$3m-n,\quad 3m+n+1.$$

Nous pouvons de plus, puisque l'équation (2) doit subsister pour toute valeur de x, remplacer x par une puissance quelconque de x, et multiplier aussi l'équation par une puissance de x. Si de la sorte on écrit x^{24} pour x, l'exposant de x dans le terme général deviendra

$$36m^2+12m+3(4n^2+4n)=(6m+1)^2+3(2n+1)^2-4;$$

multipliée en outre par x^4, l'équation (2) se change en

$$\sum\sum(-1)^{m+n}(2n+1)(3m-n)(3m+n+1)\,x^{(6m+1)^2+3(2n+1)^2}=0.$$

Posons ici

$$(3)\qquad 6m+1=a,\quad 2n+1=b.$$

Il vient

$$3m+n+1=\frac{a+b}{2},\quad 3m-n=\frac{a-b}{2},$$

$$(-1)^{m+n}=(-1)^{3m-n}=(-1)^{\frac{a-b}{2}},$$

et finalement

$$(4)\qquad \sum(-1)^{\frac{a-b}{2}}\,b(a^2-b^2)\,x^{a^2+3b^2}=0.$$

Cette sommation se rapporte à toute valeur positive ou négative de a de la forme $6m+1$ et à toute valeur impaire positive de b.

De même que l'équation (4) a été déduite de l'équation (1), on pourrait inversement déduire l'équation (1) de l'équation (4). Nous n'avons donc qu'à vérifier l'équation (4), puisque par cela seul l'équation (1) sera établie.

Comme l'équation (4) doit subsister pour toute valeur de x, les termes pour lesquels a^2+3b^2 prend la même valeur doivent disparaître d'eux-mêmes. Nous verrons qu'en effet il en est ainsi, et de telle sorte que deux termes prennent toujours le même coefficient avec des signes contraires, et par conséquent se détruisent l'un l'autre.

Les entiers a et b étant impairs, la formule

$$a^2+3b^2 = \left(\frac{a\mp 3b}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{a\pm b}{2}\right)^2$$

donne deux nouveaux systèmes de valeurs entières a', b', pour lesquels $a'^2+3b'^2$ prend la même valeur que a^2+3b^2, à savoir,

$$a' = \frac{a-3b}{2}, \quad b' = \frac{a+b}{2},$$

$$a' = \frac{a+3b}{2}, \quad b' = \frac{a-b}{2};$$

comme a' et b' peuvent être aussi bien négatifs que positifs, on a en tout huit couples de valeurs des nombres a' et b', qui sont

$$(5) \qquad a' = \pm\frac{a-3b}{2}, \quad b' = \pm\frac{a+b}{2},$$

$$(6) \qquad a' = \pm\frac{a+3b}{2}, \quad b' = \pm\frac{a-b}{2}.$$

Mais pour que ces formules se rapportent à un nouveau terme de la série (4), a' et b' doivent être soumis aux mêmes conditions que a et b; a' doit donc laisser le reste $+1$ à la division par 6, et b' être impair et positif. Ces restrictions réduisent à une seule les huit paires de valeurs que présentaient les équations (5) et (6).

En effet, la somme des deux nombres $\frac{a+b}{2}$ et $\frac{a-b}{2}$ étant a, et a étant un nombre impair, l'un de ces nombres doit être pair et l'autre doit être impair. Nous représenterons l'impair par $\frac{a+\varepsilon b}{2}$, de sorte que $\varepsilon = +1$ quand $\frac{a+b}{2}$ est impair, $\frac{a-b}{2}$ pair; $\varepsilon = -1$, quand $\frac{a+b}{2}$ est pair, $\frac{a-b}{2}$ impair; ou, en notations,

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{a-b}{2}}.$$

D'après cela, on doit avoir

$$b' = \pm \frac{a+\varepsilon b}{2}$$

pour que la condition que b' soit un nombre impair soit remplie.

A cette valeur de b' se joint la valeur de

$$a' = \pm \frac{a-3\varepsilon b}{2},$$

ce qui nous donne

$$a' = \pm \frac{a-3\varepsilon b}{2}, \quad b' = \pm \frac{a+\varepsilon b}{2}.$$

Des quatre couples de valeurs qui sont contenus dans ces formules, nous devons encore en exclure deux, car, puisque b' doit être positif, nous devons déterminer le double signe de $\frac{a+\varepsilon b}{2}$, de sorte que $\pm \frac{a+\varepsilon b}{2}$ soit positif. Nous écrirons $b' = \varepsilon' \frac{a+\varepsilon b}{2}$; ε' étant $= \pm 1$ et choisi de façon à rendre b' positif. Ainsi

$$a' = \pm \frac{a-3\varepsilon b}{2}, \quad b' = \varepsilon' \frac{a+\varepsilon b}{2}.$$

Nous pouvons maintenant facilement décider de l'ambiguité du signe de a'. La formule qui le fournit montre que, selon qu'on choisit le signe supérieur ou le signe inférieur, $2a' - a$, ou $2a' + a$ est divisible par 3; mais comme $a' = 6m' + 1$, et que a doit être de même forme, $2a' + a$ peut seul être divisible par 3, tandis que $2a' - a$ laisse 1 pour reste.

C'est donc le signe inférieur que nous devons prendre, et nous aurons

$$a' = -\frac{a - 3\varepsilon b}{2}.$$

Que cette formule soit effectivement de la forme $6m' + 1$, c'est ce qu'il est facile de démontrer. Pour cela, il faut qu'elle laisse le reste 1 à la division par 2 aussi bien qu'à la division par 3. Cela est vrai pour le dernier cas, et la valeur de $a' = -\varepsilon' b' + 2\varepsilon b$ prouve qu'il en est de même pour le premier.

Nous avons d'après cela a' et b' au moyen des formules

$$(7) \qquad a' = -\frac{a - 3\varepsilon b}{2}, \quad b' = \varepsilon' \frac{a + \varepsilon b}{2},$$

dans lesquelles $\varepsilon = (-1)^{\frac{a-b}{2}}$, et $\varepsilon' = \pm 1$, selon que $\frac{a+\varepsilon b}{2}$ est positif ou négatif.

Ainsi a' et b' forment un système de nouvelles valeurs que a et b peuvent recevoir dans la somme (4), et pour lesquelles l'exposant $a^2 + 3b^2$ conserve sa valeur primitive.

Résolvons les équations (7) par rapport à a et b, et nous obtiendrons

$$(8) \qquad a = -\frac{a' - 3\varepsilon' b'}{2}, \quad b = \varepsilon \frac{a' + \varepsilon' b'}{2}.$$

Ces équations ont exactement la forme des équations (7); seulement ε et ε' ont changé de rôle. Ce résultat est très-important, car il nous fait voir d'abord que ε' dépend de a' et de b' comme ε dépend de a et de b. Comme b est impair, il suit de l'équation

$$b = \varepsilon \frac{a' + \varepsilon' b'}{2},$$

que $\varepsilon' = +1$ quand $\frac{a'+b'}{2}$ est impair et $\frac{a'-b'}{2}$ pair, et que $\varepsilon' = -1$ quand $\frac{a'-b'}{2}$ est impair et $\frac{a'+b'}{2}$ pair. On a donc

$$\varepsilon' = (-1)^{\frac{a'-b'}{2}}.$$

Les équations (8) montrent en outre, que l'opération qui conduit des valeurs de a et de b aux valeurs de a' et de b', conduirait des valeurs de a' et de b' aux valeurs de a et de b. Les deux couples de valeurs a, b et a', b' sont ainsi réciproques l'un de l'autre, et l'on serait ramené en suivant la même méthode aux valeurs primitives, et pas à d'autres.

L'équation (4) sera donc vérifiée, aussitôt que nous aurons prouvé que les deux coefficients de $x^{a^2+3b^2} = x^{a'^2+3b'^2}$ qui correspondent aux valeurs a, b et a', b', se détruisent mutuellement. Cette preuve se fait sans difficulté. La somme de ces deux coefficients est en effet

$$(-1)^{\frac{a-b}{2}} b(a^2 - b^2) + (-1)^{\frac{a'-b'}{2}} b'(a'^2 - b'^2);$$

mais par la substitution des valeurs de a' et de b' de (7) on obtient

$$a'^2 - b'^2 = \frac{(a-3\varepsilon b)^2 - (a+\varepsilon b)^2}{4} = -2\varepsilon ab + 2b^2 = -2\varepsilon b(a - \varepsilon b),$$

et par suite

$$b'(a'^2 - b'^2) = -\varepsilon\varepsilon' b(a^2 - b^2),$$

ce qui rend la somme des deux coefficients égale à

$$\left[(-1)^{\frac{a-b}{2}} - \varepsilon\varepsilon'(-1)^{\frac{a'-b'}{2}}\right] b(a^2 - b^2):$$

or on a

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{a-b}{2}}, \quad \varepsilon' = (-1)^{\frac{a'-b'}{2}};$$

il vient donc

$$(-1)^{\frac{a-b}{2}} - \varepsilon\varepsilon'(-1)^{\frac{a'-b'}{2}} = (-1)^{\frac{a-b}{2}} - (-1)^{\frac{a-b}{2}} = 0.$$

Ainsi les deux termes considérés se détruisent, et l'équation (4) est satisfaite.

Il pourrait arriver que l'on eût $a' = a$ et $b' = b$. Dans ce cas, le coefficient de $x^{a^2+3b^2}$ qui, dans la somme (4), est composé avec a et b, se détruit de lui-même et disparaît. En effet, il résulte de la première des équations (7) que, si $a' = a$,

$$3a = 3\varepsilon b,$$

donc

$$a = \pm b.$$

Or le coefficient de la série (4) a le facteur $(a^2 - b^2)$; il devient donc, dans ce cas, $= 0$.

La facilité avec laquelle on démontre la formule (1) porte à rechercher les propositions de la théorie des nombres auxquelles elle conduit; cette recherche n'est pas sans intérêt.

Écrivons encore x^{24} à la place de x dans l'équation (1), et multiplions les deux membres par x^3, nous aurons

$$(9) \qquad \left[\sum (-1)^m x^{(6m+1)^2}\right]^3 = \sum (-1)^n (2n+1) x^{3(2n+1)^2}.$$

Dans cette équation, m peut recevoir toutes les valeurs possibles, positives et négatives, tandis que n n'admet que des valeurs entières positives, 0 compris comme aussi dans le premier cas. Si l'on pose

$$(6m+1)^2 = a^2,$$

et qu'on prenne a toujours positivement, a sera de la forme $6x + 1$ pour m positif, et de la forme $6x - 1$ pour m négatif.

On peut donc écrire ainsi l'équation (9),

$$(10) \qquad \left[\sum \pm x^{aa}\right]^3 = \sum (-1)^{\frac{b-1}{2}} b x^{bb},$$

dans laquelle b représente un nombre impair positif quelconque, a tout nombre impair positif de la forme $6k \pm 1$, ou tout nombre impair non divisible par 3. Le signe de x^{aa} dans la première somme doit être pris positivement quand a est de la forme $12k \pm 1$, et négativement quand a est de la forme $12k \pm 5$.

L'équation (9) ou l'équation (10) a été déduite de l'équation (1), en remplaçant x par x^{24} et multipliant ensuite par x^3; il en résulte, puisque les exposants dans l'équation (9) sont des nombres entiers, que dans l'équation (10) l'exposant de chaque terme dans le développement du cube $\left(\sum \pm x^{aa}\right)^3$ est de la forme $24k + 3$. En effet, chaque exposant dans le développement du cube de cette série est la somme de trois carrés impairs dont aucun ne procède de 3 ; et comme tout carré impair est de la forme $8k + 1$, la somme de trois carrés impairs divisée par 8 doit laisser pour reste 3. De plus, tout carré qui ne procède pas de 3 a la forme $3k + 1$; donc la somme de trois carrés dont aucun ne procède de 3 doit être un multiple de trois. La somme de trois carrés impairs, dont aucun ne procède de 3, doit donc laisser 3 pour reste à la division par 8 et se diviser par 3, partant être de la forme $24k + 3$.

Réciproquement on peut démontrer que si l'on décompose un nombre quelconque de la forme $24k + 3$ en trois carrés, chacun de ces carrés doit être impair et non divisible par 3, ou avoir une racine de la forme $6k \pm 1$, en exceptant toutefois le cas où le nombre procédant de 9, chacun des carrés dans lesquels il se décompose est divisible par 9 ou a sa racine divisible par 3.

En effet, quand on décompose un nombre impair en trois carrés, il peut se faire ou qu'un seul soit impair ou que tous les trois soient impairs. Comme un carré impair a la forme $4k + 1$, et que les carrés pairs procèdent de 4, le nombre dans le premier cas doit avoir la forme $4k + 1$; tout nombre de la forme $4k+3$ peut donc seulement être décomposé en trois carrés impairs. De plus, quand il arrive qu'on décompose un nombre divisible par 3 en trois carrés, aucun de ces carrés n'est divisible par 3 ou tous le sont. En effet, un carré divisé par 3 ou s'évanouit, ou laisse $+1$ pour reste; la somme de trois carrés divisée par 3, laissera pour reste ou 0 ou $+1$ ou $+2$, selon que tous les carrés seront divisibles par 3 ou qu'aucun d'eux ne le sera, que deux d'entre eux seront divisibles par 3, qu'un seul le sera. Quand donc on excepte le cas où chacun des trois carrés est divisible par 3, et aussi nécessairement par 9, ce qui ne peut arriver que lorsque le nombre proposé est lui-même divisible par 9, on ne peut décomposer un nombre divisible par 3 qu'en trois carrés dont aucun n'est divisible par 3. Or un nombre de la forme $24k+3$ a la forme $4k+3$ tout aussi bien que la forme $3k$; il n'est donc, par suite de ce qui précède, décomposable qu'en trois carrés impairs dont aucun ne procède de 3, quand on exclut le cas où le nombre, étant un multiple de 9, se décompose en trois carrés divisibles chacun par 3.

Si l'on élève, d'après les règles connues, la série

$$\sum \pm x^{aa}$$

à la troisième puissance, et si l'on recherche le coefficient du terme en x^p où p a la forme $24\alpha + 3$, chaque décomposition de p en trois carrés dont aucun n'est divisible par 3, donne pour la partie du coefficient total correspondante à chaque résultat particulier, ou le nombre ± 6 quand les trois carrés sont inégaux, ou le nombre ± 3 quand deux des carrés sont égaux, ou le nombre ± 1 quand les trois carrés sont égaux. Dans le premier cas on doit prendre le signe supérieur quand les trois racines ou une seule ont la forme $12k \pm 1$; le signe inférieur, au contraire, quand deux racines ont la forme $12k \pm 1$ ou qu'aucune n'a cette forme. Dans les deux autres cas où $p = aa + 2a'a'$, ou $p = 3aa$, on doit choisir le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que a est de la forme $12k \pm 1$ ou de la forme $12k \pm 5$.

Soit C_p le coefficient de x^p dans le développement du cube de la série proposée, de sorte que

$$\left(\sum \pm x^{aa}\right)^3 = \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^m x^{6(m+1)^2}\right]^3 = \sum C_p x^p;$$

p est, comme nous l'avons vu, un nombre de la forme $24k+3$, et n'est assujetti qu'à cette condition. Maintenant, p étant un nombre quelconque de la forme $24k+3$, soit :

A le nombre total des décompositions de p en trois carrés inégaux non divisibles par 3, dans le cas où les racines sont toutes les trois comprises dans l'une des formes $12k+1$, $12k-1$, ou bien sont l'une de la forme $12k+1$, $12k-1$, les deux autres ayant, au contraire, la forme $12k+5$, $12k-5$;

A′ le nombre total des décompositions de p en trois carrés inégaux non divisibles par 3, dans le cas où les racines sont toutes les trois représentées par $12k+5$, $12k-5$; ou bien, l'une étant donnée par $12k+5$, $12k-5$, les deux autres sont données par $12k+1$, $12k-1$;

B le nombre total des décompositions de p dans la forme $aa+2a'a'$, dans laquelle a et a' ne procèdent pas de 3 et sont différents l'un de l'autre, et a est compris sous l'une des formes $12k+1$, $12k-1$;

B′ le nombre des décompositions de p dans une expression de la forme $aa+2a'a'$, expression dans laquelle a et a' ne sont pas divisibles par 3 et sont différents, et dans laquelle aussi a a l'une des formes $12k+5$, $12k-5$.

Par suite des remarques précédemment faites, quand p n'est pas le triple d'un carré non divisible par 3, on a

$$C_p = 6(A - A') + 3(B - B').$$

Si p est le triple d'un carré non divisible par 3, on ajoute à la droite de cette expression $+1$ ou -1, selon que la racine de ce carré a l'une des formes $12k+1$, $12k-1$, ou bien l'une de celles-ci $12k+5$, $12k-5$.

Mais l'équation (10)

$$\left(\sum \pm x^{aa}\right)^3 = \sum (-1)^{\frac{b-1}{2}} b x^{3bb},$$

dans laquelle b représente un nombre impair positif quelconque, fait voir que si p n'est pas le triple d'un carré impair, le terme x^p dans le développement du cube de la série proposée n'existe pas, ou que $C_p=0$. Nous avons par suite, *quand p n'est pas le triple d'un carré impair*, la formule

$$(11) \qquad 2A + B = 2A' + B',$$

qui exprime une propriété remarquable des nombres de la forme

$24\alpha + 3$, par rapport à leur décomposition en trois carrés. Cette formule donne lieu aux théorèmes suivants.

« *Théorème* 1. Qu'on décompose un nombre p de la forme $24\alpha + 3$,
» qui n'est pas le triple d'un carré, de toutes les manières possibles
» en trois carrés de la forme $(6m \pm 1)^2$, et qu'on ajoute le nombre
» des décompositions qu'on obtient ainsi, en comptant double celles
» qui donnent lieu à trois carrés différents, on aura, pour les décom-
» positions dans lesquelles une ou trois des valeurs de m sont paires,
» exactement le même nombre que dans le cas où une ou trois des
» valeurs de m sont impaires. »

Quelques exemples éclairciront cette proposition. Nous les présentons dans la table suivante, où A, A′, B, B′ conservent la signification que nous leur avons assignée, et la liaison que nous en avons déduite,

$$2A + B = 2A' + B'.$$

$$\begin{array}{llll}
p = 51 = 1 + 2.25 = 49 + 2.1, & A = A' = 0, & B = B' = 1, \\
p = 99 = 1 + 2.49 = 49 + 2.25, & A = A' = 0, & B = B' = 1, \\
p = 123 = 121 + 2.1 = 25 + 2.49, & A = A' = 0, & B = B' = 1, \\
p = 171 = 169 + 2.1 = 121 + 2.25; & A = 0,\ A' = 1, & B = 2,\ B' = 0, \\
\quad = 1 + 49 + 121 & & \\
p = 195 = 1 + 25 + 169 = 25 + 49 + 121; & A = A' = 1, & B = B' = 0, \\
p = 219 = 169 + 2.25 = 121 + 2.49; & A = 0,\ A' = 1, & B = 1,\ B' = 0, \\
\quad = 1 + 49 + 169. & & \\
\quad \text{etc}\ldots,\ \text{etc}\ldots & &
\end{array}$$

Nous allons à présent considérer le cas où p est le triple d'un carré impair bb, pour lequel l'équation (10) fournit la valeur suivante de C_p,

$$C_p = (-1)^{\frac{b-1}{2}} b.$$

D'ailleurs on a, quand b n'est pas divisible par 3,

$$C_p = 6(A - A') + 3(B - B') \pm 1,$$

égalité où l'on prendra le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que b sera de la forme $12k \pm 1$, ou de la forme $12k \pm 5$.

Quand b est divisible par 3, la formule doit être réduite à

$$C_p = 6(A - A') + 3(B - B');$$

car la quantité ± 1, qu'on ajouterait à la valeur de ce coefficient, proviendrait des cubes des termes isolés de la série

$$\sum \pm x^{(6m+1)^2};$$

mais, comme les cubes de ces termes isolés sont $\pm x^{3(6m+1)^2}$ ou $\pm x^{3(6m-1)^2}$, le terme x^p n'aura pour origine le cube d'un terme de la série proposée que dans le cas où p sera le triple d'un carré non divisible par 3.

Quand, p étant le triple d'un carré impair bb, on égale entre elles les deux expressions trouvées pour C_p, on obtient la formule

$$(12) \qquad 2(A - A') + (B - B') = (-1)^{\frac{b-1}{2}} \frac{b + \varepsilon}{3},$$

dans laquelle ε tient la place d'une des quantités 0, $+1$ ou -1, à savoir de celle des trois qui donne pour $\frac{b+\varepsilon}{3}$ un nombre entier. On peut conséquemment compléter le théorème 1 par le suivant.

« *Théorème* 2. Quand p est le triple d'un carré impair, de sorte que » $p = 3bb$, les deux nombres qui, dans le théorème 1, étaient égaux » l'un à l'autre, ne le sont plus; mais le premier est plus grand que le » second quand b est de la forme $4k + 1$, et, au contraire, le second » est plus grand que le premier quand b est de la forme $4k + 3$; » l'excès de l'un sur l'autre est $\frac{1}{3}b$ quand b est divisible par 3, ou, » quand b n'est pas divisible par 3, c'est le nombre qui approche le » plus d'être égal à $\frac{1}{3}b$. »

La table suivante peut servir à éclaircir ce théorème. Dans les exemples qu'elle présente, les nombres A, A', B, B' doivent satisfaire à la formule (12).

	b	$\frac{b+\varepsilon}{3}$	A	A′	B	B′
$3 = 3.1$	1	0	1	0	0	0
$27 = 25 + 2.1$	3	1	0	0	0	1
$75 = 3.25\ 1 + 25 + 49$	5	2	1	0	0	0
$147 = 3.49 = 1 + 25 + 121$	7	2	0	1	0	0
$243 = 1 + 2.121 = 25 + 49 + 169$	9	3	1	0	1	0
Etc., etc.						

J'ajouterai encore les remarques suivantes sur les décompositions en expressions de la forme $aa + 2aa'$, dans lesquelles a n'est pas multiple de 3.

Soit 3^i la plus haute puissance de 3 par laquelle p se laisse diviser, de telle sorte que $\frac{p}{3^i}$ soit un entier non divisible par 4, que je désignerai par

$$p' = \frac{3^i}{p}.$$

Soit

$$p' = a\alpha + 2\alpha'\alpha' :$$

un des deux nombres α ou α' sera divisible par 3, car si ni α ni α' ne se divisaient par 3, $\alpha\alpha$, tout aussi bien que $\alpha'\alpha'$, divisé par 3, laisserait $+1$ pour reste, et par conséquent $p' = \alpha\alpha + 2\alpha'\alpha'$ serait divisible par 3, ce qui est contre l'hypothèse. Soit

$$(1+\sqrt{-2})^i = \beta + \beta'\sqrt{-2};$$

β et β' représentent deux nombres entiers dont on obtient facilement les valeurs au moyen des formules connues pour la puissance d'un binome, savoir,

$$\beta = 1 - 2\,\frac{i(i-1)}{2} + 2^2\,\frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1.2.3.4} - \text{etc.},$$

$$\beta' = i - 2\,\frac{i(i-1)(i-2)}{1.2} + 2^2\,\frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{1.2.3\,4.5} - \text{etc.}$$

Si dans l'équation précédente on écrit $-\sqrt{-2}$ à la place de $\sqrt{-2}$, on obtient

$$(1-\sqrt{-2})^i = \beta - \beta'\sqrt{-2},$$

et par la multiplication des deux formules,

$$3^i = \beta\beta + 2\beta'\beta'.$$

Si l'on pose

$$(\alpha + \alpha'\sqrt{-2})(\beta + \beta'\sqrt{-2}) = a + a'\sqrt{-2},$$
$$(\alpha + \alpha'\sqrt{-2})(\beta - \beta'\sqrt{-2}) = b + b'\sqrt{-2},$$

a, a', b, b' représentent des nombres entiers, savoir,

$$a = \alpha\beta - 2\alpha'\beta', \qquad b = \alpha\beta + 2\alpha'\beta',$$
$$a' = \alpha'\beta + \alpha\beta', \qquad b' = \alpha'\beta - \alpha\beta';$$

en changeant dans chacune des deux formules le signe des radicaux, on obtient encore

$$(\alpha - \alpha'\sqrt{-2})(\beta - \beta'\sqrt{-2}) = a - a'\sqrt{-2},$$
$$(\alpha - \alpha'\sqrt{-2})(\beta + \beta'\sqrt{-2}) = b - b'\sqrt{-2};$$

et si l'on multiplie deux à deux les formules qu'on a déduites l'une de l'autre par le changement de signe des radicaux,

$$3^i(\alpha\alpha + 2\alpha'\alpha') = 3^i p' = aa + 2a'a',$$
$$3^i(\alpha\alpha + 2\alpha'\alpha') = 3^i p' = bb + 2b'b',$$

ou

$$p = aa + 2a'a' = bb + 2b'b'.$$

On déduit ainsi de la décomposition de p' dans une expression de la forme $\alpha\alpha + 2\alpha'\alpha'$ deux décompositions du nombre p dans des expressions de même forme, et ces deux expressions sont toujours différentes l'une de l'autre, excepté quand p' est un carré $=\alpha\alpha$ et que l'on déduit les deux expressions de p de l'expression $p' = \alpha\alpha$, pour laquelle $\alpha' = 0$.

Pour ce cas on voit facilement par les valeurs données pour a, b, a', b', que

$$a = b, \quad a' = -b',$$

et que par conséquent les deux expressions

$$aa + 2a'a', \quad bb + 2b'b'$$

sont identiques. Mais c'est le seul cas pour lequel ces expressions rentrent l'une dans l'autre, ainsi qu'il est facile de le voir par le raisonnement suivant.

On doit avoir pour cela ou $a = b$ ou $a = -b$, et les valeurs données pour a et pour b montrent que cela ne peut arriver que si l'un des produits $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ disparaît, ce qui exige que l'une des quantités α, α', β, β' s'annulle. Mais ni β, ni β' ne peuvent être nuls; α ne peut non plus être égal à o, car p' serait un nombre pair $= 2\alpha'\alpha'$, et p' est impair, puisque il donne le nombre impair p quand on le multiplie par 3^i : les deux expressions ne coïncident donc que si α' disparaît; ce qu'il fallait démontrer.

De ce que aucun des deux nombres β, β' ne disparaît, il résulte aussi, entre autres choses, qu'aucun des deux ne peut être divisé par 3. Soit

$$(f + f'\sqrt{-2})(g + g'\sqrt{-2}) = h + h'\sqrt{-2};$$

d'où

$$\begin{aligned} fg - 2f'g' &= h, \\ fg' + f'g &= h'. \end{aligned}$$

Si f, f', ainsi que g et g' divisés par 3 donnent le même reste, les nombres $f'g'$, fg', $f'g$ laissent le même reste que fg, et par conséquent les deux nombres h et h' divisés par 3 laissent le même reste que $-fg$. En effet, le nombre h laisse le même reste que $fg - 2f'g = -fg$, et le nombre h' laisse le même reste que $fg + fg = 2fg = 3fg - fg$, donc le même reste que $-fg$.

Il suit de là que, si

$$(f + f'\sqrt{-2})(g + g'\sqrt{-2}) = h + h'\sqrt{-2},$$

et si f et f', g et g', divisés par 3, laissent le même reste, et qu'aucun de ces nombres ne soit divisible par 3, les nombres h et h' divisés par 3 laissent le même reste, et ne sont pas divisibles par 3.

En effet, les nombres h et h' divisés par 3 laissent le même reste que $-fg$, ils ne peuvent donc être divisibles par 3 que si cela est pour l'un des deux nombres f ou g; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si à ces deux facteurs on en ajoute successivement plusieurs de même forme et de mêmes propriétés, et qu'à chaque fois on fasse usage de la proposition trouvée ci-dessus, on obtient la proposition plus générale que voici :

Quand i facteurs

$$f_1 + f'_1\sqrt{-2},\quad f_2 + f'_2\sqrt{-2},\ldots,\quad f_i + f'_i\sqrt{-2}$$

sont donnés, et satisfont aux conditions que f et f' sont des nombres entiers non divisibles par 3, mais laissent des restes égaux à la division par ce nombre, le produit de tous ces facteurs, auquel on peut donner la forme

$$F - F'\sqrt{-2},$$

F et F' étant entiers, a encore la même propriété; c'est-à-dire que F et F' sont à la fois non divisibles par 3, et laissent tous les deux le même reste quand on les divise par ce facteur.

Il résulte aussi de la proposition donnée ci-dessus, que ce reste est le même que le reste laissé par le nombre

$$(-1)^{i-1} f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \ldots f_i = -(-f_1)(-f_2)\ldots(-f_i).$$

Prenons tous ces facteurs égaux : il suit alors de ce qui précède que, si f et f' divisés par 3 laissent tous deux le reste $+1$, ou tous deux le reste -1, et que l'on écrive la $i^{ième}$ puissance de l'expression $f + f'\sqrt{-2}$ sous la forme

$$F + F'\sqrt{-2} = \left(f + f'\sqrt{-2}\right)^i,$$

les nombres F et F' laisseront tous deux le même reste que $-(-f)^i$.

Si donc la puissance est paire, c'est-à-dire si i est pair, F et F′ divisés par 3 laisseront toujours le reste -1; au contraire, si i est impair, F laissera toujours le même reste $+1$ ou -1 que f.

Dans le cas que nous avons considéré, nous avions

$$(1+\sqrt{-2})^i = \beta + \beta'\sqrt{-2}.$$

Ici $f=f'=1$, β et β' divisés par 3 doivent laisser tous les deux le reste $+1$, ou tous les deux le reste -1, selon que i est impair ou pair, et jamais aucun de ces deux nombres ne peut être divisible par 3, encore moins disparaître.

On peut faire résulter ces propriétés des nombres β et β', de leurs valeurs données ci-dessus, et déduites de la formule du binome. Dans ces valeurs, les coefficients sont multipliés par les puissances de (-2): quand on ne considère que le reste que fournit cette quantité divisée par 3, on peut écrire $+1$ à la place de (-2), et conclure que β et β', divisés par 3, laissent les même restes que les nombres

$$i + \frac{i(i-1)}{2} + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1.2.3.4} + \ldots$$
$$i + \frac{i(i-1)(i-2)}{2} + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)(i-4)}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

Ces nombres reviennent aux expressions suivantes :

$$\frac{1}{2}\left[(1+1)^i + (1-1)^i\right] = 2^{i-1},$$
$$\frac{1}{2}\left[(1+1)^i - (1-1)^i\right] = 2^{i-1}:$$

en sorte que β et β' divisés par 3 laissent le même reste que 2^{i-1} ou, ce qui est la même chose, le même que $(-1)^{i-1}$; ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé ci-dessus.

Les deux décompositions de p que nous avons tirées d'une décomposition de p' dans une expression de la forme $\alpha\alpha + 2\alpha'\alpha'$, savoir,

$$p = aa + 2a'a' = bb + 2b'b',$$

appartiennent aux décompositions que nous avons considérées, en supposant qu'aucun des nombres a, a', b, b' ne soit divisible par 3. Ceci résulte clairement des valeurs données ci-dessus pour ces nombres

$$\begin{aligned} a &= \alpha\beta - 2\alpha'\beta', \quad & b &= \alpha\beta + 2\alpha'\beta', \\ a' &= \alpha'\beta + \alpha\beta', \quad & b' &= \alpha'\beta - \alpha\beta'; \end{aligned}$$

α et α' représentent deux nombres dont l'un est divisible par 3, l'autre ne l'étant pas; β et β', au contraire, deux nombres dont aucun n'est divisible par 3.

On peut encore, de la forme des valeurs de a et de b, tirer les conséquences suivantes :

Puisque a et b sont impairs, ainsi qu'il ressort clairement de l'équation

$$p = aa + 2a'a' = bb + 2b'b',$$

dans laquelle p est un nombre impair de la forme $24k + 3$, et que a et b ne sont pas divisibles par 3, ils sont compris sous l'une des quatre formes $12k \pm 1$, $12k \pm 5$. Leur produit ab aura aussi l'une de ces quatre formes, savoir, une des deux formes $12k \pm 1$ quand a et b sont tous les deux de la forme $12k \pm 1$, ou de la forme $12k \pm 5$; au contraire, ab aura la forme $12k \pm 5$ quand, l'un des deux nombres a et b étant $12k \pm 1$, l'autre sera de la forme $12k \pm 5$.

Des valeurs données pour a et b,

$$a = \alpha\beta - 2\alpha'\beta', \quad b = \alpha\beta + 2\alpha'\beta',$$

il résulte

$$ab = \alpha^2\beta^2 - 4\alpha'^2\beta'^2.$$

Si α' est multiple de 3, $\alpha\beta$ est un nombre impair non divisible par 3, car α et β sont toujours impairs, comme il paraît par les équations

$$3^i = \beta\beta + 2\beta'\beta', \quad p' = \alpha\alpha + 2\alpha'\alpha';$$

et, si α' est divisible par 3, α n'est pas divisible par 3; les nombres β et β' ne sont jamais divisibles par 3. Il suit de là que $\alpha^2\beta^2$ laisse le reste $+1$ à la division par 4 et à la division par 3, et a par conséquent la forme $12k+1$. Le nombre $4\alpha'^2\beta'^2$ est, en outre, quand α' est divisible par 3, divisible par 12. Par conséquent, quand α' est divisible par 3, le nombre

$$ab = \alpha^2\beta^2 - 4\alpha'^2\beta'^2$$

a la forme $12k+1$. Quand α est divisible par 3, α', et par suite $\alpha'\beta'$, ne se laissent plus diviser par 3; $\alpha'^2\beta'^2$ a donc alors la forme $3k+1$, et $4\alpha'^2\beta'^2$ la forme $12k+4$. De plus β^2 est de la forme $12k+1$, puisque β', divisé par 4 et par 3, laisse dans les deux cas le reste $+1$; α est un nombre impair divisible par 3, et ainsi de la forme $12k+3$, $12k+9$; le carré α^2 est toujours de la forme $12k+9$, et, β^2 ayant la forme $12k+1$, $\alpha^2\beta^2$ sera de la forme $12k+9$.

Ainsi, quand α est divisible par 3, $4\alpha'^2\beta'^2$ a la forme $12k+4$, $\alpha^2\beta^2$ la forme $12k+9$. Donc

$$ab = \alpha^2\beta^2 - 4\alpha'^2\beta'^2$$

est de la forme $12k+5$. Par conséquent ab sera de la forme $12k+1$, ou de la forme $12k+5$, selon que α' ou α seront l'un ou l'autre divisibles par 3.

En laissant arbitraires les signes de a et de b qui ne sauraient être déterminés par la décomposition de p en expressions de la forme $aa + 2a'a'$, $bb + 2b'b'$, on pourra dire toujours que ab a l'une des formes $12k \pm 1$, ou l'une des formes $12k \pm 5$, selon que α' ou α se divisent par 3.

Si donc des parties intégrantes de p de la forme $aa + 2a'a'$, dans lesquelles a, a' sont des nombres non divisibles par 3, on forme deux classes, la première comprenant toutes les expressions dans lesquelles a est sous l'une des deux formes $12k \pm 1$, la seconde renfermant toutes celles dans lesquelles a est sous l'une des deux formes $12k \pm 5$, les deux décompositions de p auxquelles on est conduit, comme on l'a vu, par une décomposition de p' dans une expression de la forme $\alpha\alpha + 2\alpha'\alpha'$, donneront lieu à des expressions qui appartiendront aux mêmes classes ou à des classes différentes, selon que l'une des quantités α' ou α sera divisible par 3.

Si p', qui peut désigner un nombre impair quelconque non divisible par 3, est décomposable de plusieurs manières dans des expressions de la forme $\alpha\alpha + 2\alpha'\alpha'$, α' ou α seront toujours l'un ou l'autre divisibles par 3. Dans le premier cas p' a la forme $ff + 18ff'$, dans le second cas la forme $9gg + 2g'g'$, et comme p' et par suite aussi f et g' ne sont pas divisibles par 3, ff et $2g'g'$ laissent les restes $+1$ et $+2$, et la première forme ne peut convenir qu'aux valeurs de $p' = 3k + 1$, la seconde forme aux valeurs de $p' = 3k + 2$. Ainsi, selon que p' est de la forme $3k + 1$, ou de la forme $3k + 2$, les deux décompositions de $p = 3^i p'$, que nous avons déduites d'une décomposition de p', produiront des expressions qui appartiendront aux mêmes classes ou à des classes différentes.

Il ne nous reste plus qu'à faire voir que toute décomposition de p dans une expression de la forme $aa + 2a'a'$, dans laquelle a n'est pas divisible par 3, peut être, en effet, déduite de p' en se servant des formules données.

On peut le prouver de la manière suivante. Puisque p est divisible par 3^i et qu'on a

$$a^2\beta^2 - 4a'^2\beta'^2 = a^2(\beta^2 + 2\beta'^2) - 2\beta'^2(a^2 + 2a'^2) = 3^i aa - 2p\beta'\beta',$$

le nombre

$$a^2\beta^2 - 4a'^2\beta'^2 = (a\beta + 2a'\beta')(a\beta - 2a'\beta'),$$

doit être aussi divisible par 3^i.

Mais des deux facteurs $a\beta + 2a'\beta'$ et $a\beta - 2a'\beta'$, un seul doit être divisible par 3, car s'ils l'étaient tous deux, leur somme $2a\beta$ serait aussi divisible par 3, ce qui est impossible, ni a ni β n'étant divisibles par 3. Or puisque le produit des deux facteurs est divisible par 3^i, et qu'un des facteurs n'est pas divisible par 3, l'autre facteur doit seul être divisible par 3^i. Soit $a\beta + 2a'\beta'$ ce facteur, ce qu'on peut toujours supposer, car le signe de a' est indéterminé, et l'on peut le déterminer par cette condition, en laissant d'ailleurs le signe de a invariable.

Multipliant ce facteur par β', et mettant à la place de $2\beta\beta'$ sa valeur $3^i - \beta\beta$, on obtient

$$\beta'(a\beta + 2a'\beta') = -\beta(a'\beta - a\beta') + 3^i a',$$

et de cette équation il résulte, puisque $a\beta + 2a'\beta'$ est divisible par 3^i, mais que β n'est pas divisible par 3, que $a'\beta - a\beta'$ est aussi divisible par 3^i.

Soit

$$\frac{a\beta + 2a'\beta'}{3^i} = \alpha, \quad \frac{a'\beta - a\beta'}{3^i} = \alpha';$$

il en résulte

$$\frac{(a + a'\sqrt{-2})(\beta - \beta'\sqrt{-2})}{3^i} = \alpha + \alpha'\sqrt{-2},$$

et, d'après ce qu'on a prouvé, les quantités α et α' sont entières.

Si l'on change le signe du radical et si l'on multiplie la nouvelle équation qui en résulte par la précédente, on aura

$$\frac{(aa + 2a'a')(\beta\beta + 2\beta'\beta')}{3^{2i}} = \frac{p}{3^i} = p' = \alpha\alpha + 2\alpha'\alpha';$$

ce qui est la décomposition déjà obtenue pour p'. De cette expression on revient à celle que donne la décomposition de $p = aa + 2a'a'$, au moyen de l'équation

$$(\alpha + \alpha'\sqrt{-2})(\beta + \beta'\sqrt{-2}) = a + a'\sqrt{-2}.$$

On voit donc que toute décomposition de p dans une expression de la forme $aa + 2a'a'$, dans laquelle a n'est pas divisible par 3, peut toujours se déduire de la manière indiquée ci-dessus, d'une décomposition de $\frac{1}{3^i}p = p'$. On pourra donc décomposer p en expressions de la forme obtenue, au moyen des décompositions de p'.

Nous avons vu que de chaque décomposition de p' on pouvait déduire pour p deux sortes d'expressions qui appartiennent aux mêmes classes ou à des classes différentes, selon que p' est de la forme $3k + 1$ ou de la forme $3k + 2$; nous avons vu en outre que les décompositions de p ainsi obtenues ont été toutes considérées dans ce qui précède. Nous appelons B le nombre total des décompositions de p de la première classe, et B' le nombre total des décompositions de la seconde classe. Nous n'y comprenons pas le cas où $p' = \alpha\alpha$.

La décomposition

$$p = 3^i.p' = \alpha\alpha\beta\beta + 2\alpha\alpha\beta'\beta',$$

qui a lieu alors, exige que p soit le triple d'un carré, puisque i doit être impair si $p = 3^i aa$ doit être de la forme $24k + 3$. Si p' est de la forme $3k + 2$, la première et la seconde classe comprennent un même nombre d'expressions élémentaires, car de chaque décomposition de p' résulte une décomposition de p pour chacune des deux classes. On a donc, quand $p' = \frac{1}{3^i}p$ a la forme $3k + 2$,

$$B = B';$$

par où la formule (11) se réduit à

$$A = A'. \tag{12}$$

Si p' a la forme $3k + 1$, B et B' seront des nombres pairs, si p n'est pas le triple d'un carré, puisque de chaque décomposition de p' s'en déduisent deux pour p qui appartiennent à la même classe.

On peut encore, de la formule trouvée ci-dessus,

$$\left[\sum(-1)^m x^{(6m+1)^2}\right]^3 = \sum(-1)^{\frac{b-1}{2}} bx^{3bb},$$

dans laquelle m désigne tous les nombres positifs et négatifs, b tous les nombres positifs impairs, faire sortir d'autres conséquences dont je vais présenter ici l'exposé succinct.

On voit par cette formule que l'on peut toujours décomposer de plusieurs manières le triple d'un carré impair en trois carrés de la forme $(6m + 1)^2$, de sorte que N étant un nombre impair quelconque, on peut toujours satisfaire à l'équation

$$3NN = (6m + 1)^2 + (6m' + 1)^2 + (6m'' + 1)^2,$$

et cela de plusieurs manières, en sorte qu'à l'exception du cas où $b = 1$, on n'a jamais la décomposition en trois carrés égaux.

De l'équation précédente résulte

$$3NN = (6m + 1)^2 + 2(3m' + 3m'' + 1)^2 + 18(m' - m'')^2,$$

et par suite

$$NN = [2(m + m' + m'') + 1]^2 + 2(2m - m' - m'')^2 + 6(m' - m'')^2.$$

Une formule semblable aurait pu se déduire de chaque décomposition de $p = 24k + 3$ dans une expression de la forme

$$(6m + 1)^2 + (6m' + 1)^2 + (6m'' + 1)^2,$$

pour $\frac{1}{3}p = 8k + 1$.

Soient

$$2(m + m' + m'') + 1 = n,$$
$$2m - m' - m'' = n',$$
$$m' - m'' = n'',$$

on aura

$$NN = nn + 2n'n' + 6n''n'',$$

et par conséquent

$$\frac{NN - nn}{2} = n'n' + 3n''n''.$$

Comme on peut toujours supposer que les nombres m, m', m'' ne sont pas tous les trois égaux entre eux, on pourra aussi toujours admettre que les nombres n' et n'' ne disparaissent pas tous les deux à la fois. Ainsi N sera toujours plus grand que n.

De la somme et de la différence de deux nombres impairs, l'une est toujours divisible par 4, tandis que l'autre, divisée par 4, laisse le reste 2. J'admettrai que $N - n$ soit divisible par 4; si $N + n$ était au contraire divisible par 4, on aurait, dans ce qui suit, à placer $-n$ à la place de $+n$.

Que l'on considère maintenant le cas particulier où N est un nombre premier; dans ce cas $\frac{N-n}{2}$ et $\frac{N+n}{2}$, et par suite aussi les nombres $\frac{N-n}{2}$ et $\frac{N+n}{2}$, n'ont aucun facteur commun. Ces deux nombres étant premiers l'un à l'autre, et faisant partie d'un nombre de la forme

$n'n' + 3n''n''$, auront aussi la même forme, d'après les principes de l'Arithmétique.

On peut donc poser

$$\frac{N+n}{2} = \alpha\alpha + 3\gamma\gamma,$$

$$\frac{N-n}{4} = \beta\beta + 3\delta\delta,$$

d'où suit, pour tout nombre premier, l'équation

$$N = \alpha\alpha + 2\beta\beta + 3\gamma\gamma + 6\delta\delta,$$

dans laquelle α, β, γ, δ sont des nombres entiers.

Il suit de la généralisation connue d'un théorème d'Euler, que des nombres de la forme

$$\alpha\alpha + B\beta\beta + C\gamma\gamma + BC\delta\delta$$

reproduisent cette forme quand on les multiplie entre eux. La forme dans laquelle nous venons de décomposer tout nombre premier est évidemment dans ce cas. Comme le nombre premier 2 a aussi cette forme, et que tout nombre peut être considéré comme produit par des nombres premiers, on peut donner à tous les nombres entiers possibles la forme

$$\alpha\alpha + 2\beta\beta + 3\gamma\gamma + 6\delta\delta,$$

α, β, γ, δ étant entiers.

Des considérations toutes semblables à celles que je viens de présenter dans ce Mémoire pourraient s'appliquer à d'autres formules données dans les *Fundamenta*.