JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PUISEUX

Problème de géométrie

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 65-69.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__65_0>

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. PUISEUX,

Ancien Élève de l'École normale.

PROBLÈME. *Trouver la courbe dont la courbure et la torsion sont constantes.*

Prenons pour variable indépendante l'arc s de la courbe qui aboutit au point dont les coordonnées, rapportées à trois axes rectangulaires, sont x, y, z: on sait que le rayon de courbure en ce point est donné par la formule

$$(1) \qquad \rho = \frac{ds^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}.$$

D'un autre côté les deux plans osculateurs qui répondent aux valeurs s et $s + ds$ de la variable indépendante comprennent entre eux un angle infiniment petit $d\theta$, et si l'on fait

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\omega},$$

on a

$$\omega = \frac{ds^2(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2)}{\mathrm{A}\,d^3x + \mathrm{B}\,d^3y + \mathrm{C}\,d^3z},$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{A} = dyd^2z - dzd^2y, \quad \mathrm{B} = dzd^2x - dxd^2z, \quad \mathrm{C} = dxd^2y - dyd^2x.$$

En ayant égard à l'équation (1), on peut mettre cette valeur de ω

sous la forme suivante :

$$\omega = \frac{ds^6}{\rho^2(A\,d^3x + B\,d^3y + C\,d^3z)}. \tag{2}$$

Le problème à résoudre consiste à intégrer les équations (1) et (2), dans lesquelles ρ et ω sont des constantes, et auxquelles il faut joindre la relation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2. \tag{3}$$

En différentiant cette dernière équation, nous trouvons, à cause de $d^2s = 0$,

$$dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z = 0. \tag{4}$$

De l'équation (1) nous tirons

$$d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 = \frac{1}{\rho^2}\, ds^4,$$

et en différentiant,

$$d^2x d^3x + d^2y d^3y + d^2z d^3z = 0. \tag{5}$$

L'équation (2) nous donne ensuite

$$A\,d^3x + B\,d^3y + C\,d^3z = \frac{1}{\omega\rho^2}\, ds^6 :$$

différentions et remarquons que l'on a identiquement

$$dA\,d^3x + dB\,d^3y + dC\,d^3z = 0;$$

il vient

$$A\,d^4x + B\,d^4y + C\,d^4z = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$A_1\,dx + B_1\,dy + C_1\,dz = 0, \tag{6}$$

en faisant

$$A_1 = d^2y\,d^4z - d^2z\,d^4y,\quad B_1 = d^2z\,d^4x - d^2x\,d^4z,\quad C_1 = d^2x\,d^4y - d^2y\,d^4x.$$

Si maintenant nous différentions deux fois de suite l'équation (4), nous trouverons, en ayant égard à l'équation (5),

$$dx\,d^4x + dy\,d^4y + dz\,d^4z = 0,$$

et de cette dernière, jointe à l'équation (4), nous conclurons facilement

$$\frac{dx}{A_1} = \frac{dy}{B_1} = \frac{dz}{C_1}.$$

Nous pouvons donc, dans l'équation (6), remplacer dx, dy, dz par les quantités proportionnelles A_1, B_1, C_1 : il nous vient de cette façon

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 = 0,$$

et par conséquent

$$(7) \qquad A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 0.$$

Les expressions désignées par A_1, B_1, C_1 étant des différentielles exactes, on peut intégrer immédiatement les équations (7); on trouve ainsi

$$(8) \qquad \begin{cases} d^2y\,d^3z - d^2z\,d^3y = f\,ds^5, \\ d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z = g\,ds^5, \\ d^2x\,d^3y - d^2y\,d^3x = h\,ds^5, \end{cases}$$

f, g, h désignant trois constantes arbitraires.

Si maintenant nous ajoutons les trois équations (8), après les avoir multipliées respectivement par d^2x, d^2y, d^2z, il nous viendra, en divisant par ds^5,

$$f\,d^2x + g\,d^2y + h\,d^2z = 0,$$

et en intégrant, et nommant k une constante,

$$(9) \qquad f\,dx + g\,dy + h\,dz = k\,ds.$$

Faisons

$$\frac{f}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{g}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}} = \cos 6,$$
$$\frac{h}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}} = \cos\gamma,$$

et l'équation (9) pourra s'écrire

$$(10) \qquad \frac{dx}{ds}\cos\alpha + \frac{dy}{ds}\cos 6 + \frac{dz}{ds}\cos\gamma = \frac{k}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}}.$$

Sous cette forme elle exprime que toutes les tangentes à la courbe cherchée font des angles égaux avec une même droite, et cette droite est celle qui fait avec les axes des coordonnées les angles α, 6, γ.

Pour simplifier, nous pouvons prendre maintenant l'axe des z parallèle à cette droite : nous aurons alors

$$\frac{dz}{ds} = \frac{k}{\sqrt{f^2+g^2+h^2}} = \cos\varepsilon,$$

en nommant ε l'angle constant que font avec cet axe les tangentes à la courbe cherchée.

De cette équation nous tirons $d^2z = 0$, ce qui montre que l'on peut prendre z pour variable indépendante, et $ds = \frac{dz}{\cos\varepsilon}$. Substituons cette valeur dans l'équation (3) ; elle devient

$$dx^2 + dy^2 = dz^2\,\text{tang}^2\,\varepsilon,$$

d'où l'on tire

$$dy = \sqrt{dz^2\,\text{tang}^2\,\varepsilon - dx^2},$$

et en différentiant,

$$d^2y = -\frac{dx\,d^2x}{\sqrt{dz^2\,\text{tang}^2\,\varepsilon - dx^2}}.$$

Portons dans l'équation (1) les valeurs de ds, d^2z et d^2y ; elle devient, après les réductions,

$$\rho^2 d^2x^2 \sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon = dz^4\,\text{tang}^2\,\varepsilon - dx^2\,dz^2 :$$

on en tire

$$dz = \frac{\rho\sin\varepsilon\cos\varepsilon\dfrac{d^2x}{dz}}{\sqrt{\text{tang}^2\,\varepsilon - \left(\dfrac{dx}{dz}\right)^2}},$$

et en intégrant et nommant c une constante,

$$z - c = \pm \rho \sin \varepsilon \cos \varepsilon . \ \text{arc} \sin \frac{dx}{dz \operatorname{tang} \varepsilon}.$$

On tire de cette équation

$$dx = \pm dz \operatorname{tang} \varepsilon \sin \frac{z-c}{\rho \sin \varepsilon \cos \varepsilon},$$

et par conséquent

$$(11) \qquad x - a = \pm \rho \sin^2 \varepsilon \cos \frac{z-c}{\rho \sin \varepsilon \cos \varepsilon},$$

a étant une constante.

D'un autre côté l'équation

$$dy = \sqrt{dz^2 \operatorname{tang}^2 \varepsilon - dx^2}$$

devient

$$dy = \pm dz \operatorname{tang} \varepsilon \cos \frac{z-c}{\rho \sin \varepsilon \cos \varepsilon},$$

et il en résulte, b désignant une nouvelle constante,

$$(12) \qquad y - b = \pm \rho \sin^2 \varepsilon \sin \frac{z-c}{\rho \sin \varepsilon \cos \varepsilon}.$$

Les équations (11) et (12), d'où l'on déduit encore celle-ci

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \rho^2 \sin^4 \varepsilon,$$

appartiennent à une hélice tracée sur un cylindre droit dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z, et dont le rayon est $\rho \sin^2 \varepsilon$.

Ainsi l'hélice est la seule courbe dont la courbure et la torsion soient constantes.