JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

L.-A.-S. FERRIOT

**Note sur le centre de gravité d'un triangle sphérique quelconque, et d'une pyramide sphérique**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 7 (1842), p. 59-64.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__59_0>

# NOTE

## SUR LE CENTRE DE GRAVITÉ

# D'UN TRIANGLE SPHÉRIQUE QUELCONQUE,

## ET D'UNE PYRAMIDE SPHÉRIQUE;

**Par M. L.-A.-S. FERRIOT,**

Recteur honoraire de l'Académie de Grenoble.

---

I.

« Le centre de gravité d'une zone de la sphère est au milieu de l'axe » de cette zone. »

En effet, tout plan passant par l'axe coupe cette zone en deux parties égales; donc le centre de gravité est sur cet axe; de plus, les zones de même hauteur étant équivalentes, ce centre de gravité est au milieu de l'axe. Ces deux circonstances me paraissent suffisantes pour justifier l'énoncé; cependant si l'on voulait une démonstration plus explicite, on pourrait la présenter de la manière suivante.

Imaginons la zone proposée $mnpq$ (*fig.* 1) partagée en un nombre quelconque de zones équivalentes par des plans équidistants perpendiculaires à l'axe, et soit $\delta$ la distance du centre de gravité de la première zone partielle au milieu de son axe. Soient $\delta$, $\delta'$, $\delta''$,..., les distances du centre de gravité des autres zones aux milieux de leurs axes respectifs, et admettons pour un moment que toutes ces distances sont égales à la plus grande, que nous supposerons être $\delta$. Il est clair

8..

que dans cette hypothèse, le centre de gravité O du système de toutes ces zones, et par conséquent celui de la zone entière, se trouvera aussi à la même distance $\delta$ du milieu I de son axe $gG$; or, quelque petite que soit la hauteur d'une zone, il est évident que le centre de gravité est toujours compris entre les deux bases de cette zone : donc puisque la hauteur de chaque zone partielle peut être rendue moindre que toute grandeur donnée, la distance $OI = \delta$ est moindre que tout ce qu'on voudra et par conséquent nulle, et à plus forte raison si les distances $\delta'$, $\delta''$, $\delta'''$,... sont plus petites que $\delta$.

Corollaire Ier. Le centre de gravité d'un hémisphère est au milieu du rayon perpendiculaire à la base de cet hémisphère, c'est-à-dire au milieu de la hauteur de cette zone hémisphérique.

Corollaire II. Tout hémisphère se composant de quatre triangles tri-rectangles, les centres de gravité de ces triangles égaux sont nécessairement à la même hauteur, au-dessus de la base de l'hémisphère, que le centre de gravité de cet hémisphère.

Corollaire III. Tout triangle tri-rectangle faisant partie de trois hémisphères, il en résulte que son centre de gravité se trouve tout à la fois sur trois plans perpendiculaires sur les trois rayons qui aboutissent aux trois sommets de ce triangle.

Ou autrement,

Le centre de gravité d'un triangle tri-rectangle est situé à l'extrémité de la diagonale du cube construit sur les moitiés des rayons qui aboutissent aux sommets de ce triangle.

Corollaire IV. Le centre de gravité d'un fuseau dont l'angle est droit se déduit facilement du centre de gravité du triangle rectangle.

En effet, ce fuseau étant l'assemblage de deux triangles tri-rectangles, son centre de gravité est le centre de gravité de ceux de ces deux triangles, et se trouve par conséquent au milieu de la ligne qui les joint.

Corollaire V. Pour avoir le centre de gravité d'un fuseau quelconque, de celui dont l'angle est BOE (*fig.* 2), considérez en même temps le fuseau complémentaire EOC, et remarquez que les centres de gravité des deux fuseaux partiels, et celui du fuseau d'un quadrant qui est leur somme, sont nécessairement en ligne droite; de plus le centre de gravité de chacun de ces fuseaux est sur la ligne qui divise l'angle correspondant en deux parties égales, ligne ici représentée par $Op'$ pour l'un des fuseaux et par $Op''$ pour l'autre.

Donc si, par le point P, centre de gravité du fuseau d'un quadrant, on mène une droite $p'Pp''$, de manière que les parties interceptées $Pp'$ et $Pp''$ soient en raison inverse des fuseaux dont les angles sont BOE et EOC, ou, ce qui est la même chose, en raison inverse des angles BOE et EOC eux-mêmes, les points $p'$ et $p''$ seront les centres de gravité de ces fuseaux.

*Remarque.* On trouverait facilement le centre de gravité d'un triangle bi-rectangle quelconque formé par trois arcs de grands cercles; on trouverait de même celui du triangle formé par deux méridiens et un parallèle à l'équateur, et de beaucoup d'autres encore au moyen de considérations particulières; mais je vais embrasser le cas général, en partant toutefois de la connaissance du centre de gravité d'un fuseau quelconque.

## II.

Je commence par rappeler une proposition connue dont on trouve une démonstration dans la Géométrie de Legendre, douzième édition, livre III, proposition XXXIV, savoir :

« Si des points P et Q, comme foyers (*fig.* 3), et avec des rayons

$$(mP,\ mQ),\quad (m'P,\ m'Q),\quad (m''P,\ m''Q),\ldots$$

» assujettis à la proportion indéfinie

$$mP : mQ :: m'P : m'Q :: m''P : m''Q\ldots,$$

» on décrit des arcs de cercle, les points d'intersection $m'$, $m''$, $m'''$, ...
» seront tous sur un cercle de rayon

$$CA = \frac{AP \times AQ}{AQ - AP},$$

» et si l'on imagine que ce cercle tourne autour de son diametre AB, » il engendrera une sphère dont les foyers seront encore P et Q. »

Cela posé, *si l'on appelle* P, P′, P″ *les centres de gravité des trois fuseaux dont le triangle* ABC *fait partie, je dis que le centre de gravité de ce triangle sera l'intersection des trois sphères dont les foyers sont* (P, P′), (P, P″), (P′, P″).

En effet, soient P, $p'$, $p''$ les centres de gravité du fuseau A, du triangle ABC et du triangle A′BC (*fig.* 4). Ces trois centres de gravité seront nécessairement en ligne droite, et les distances P$p'$, P$p''$ seront en raison inverse des surfaces des triangles ABC et A′BC, de sorte qu'on aura la proportion

$$(1) \qquad \mathrm{ABC} : \mathrm{A'BC} :: \mathrm{P}p'' : \mathrm{P}p' \quad \text{ou} \quad :: x_{,} : y_{,},$$

à cause que la valeur absolue des termes P$p''$ et P$p'$ n'est point connue, mais seulement leur rapport.

Par la même raison, si l'on représente par B′AC le triangle qui complète le fuseau dont l'angle est B, on aura cette autre proportion

$$(2) \qquad \mathrm{ABC} : \mathrm{B'AC} :: x' : y',$$

dans laquelle, comme dans la précédente, les deux termes $x'$ et $y'$ sont indéterminés, leur rapport ne l'étant pas.

Actuellement, remplaçons $y'$ par $y_{,}$ dans la proportion (2), ce qui est permis; $x'$ prendra de lui-même la valeur qui convient à cette proportion, qui est alors

$$(3) \qquad \mathrm{ABC} : \mathrm{B'AC} :: x' : y_{,}.$$

Puis éliminant $y_{,}$ entre (1) et (3), il vient

$$\mathrm{A'BC} : \mathrm{B'AC} :: x' : x_{,}.$$

Cette dernière proportion signifie que si des points P, P′ comme foyers et avec des rayons $(x', x_{,})$ $(x'', x_{,,})$ $(x''', x_{,,,})$... assujettis à la proportion indéfinie

$$x' : x_{,} :: x'' : x_{,,} :: x''' : x_{,,,} \ldots,$$

on décrit des arcs de cercle, tous les points obtenus de cette manière seront situés sur une sphère dont on connaît le centre et le rayon, et qui contient nécessairement le centre de gravité du triangle ABC.

Par la même raison, ce centre de gravité se trouve encore sur deux autres sphères dont l'une a pour foyers (P, P″) et l'autre (P′, P″), ce qui résout le problème et justifie l'énoncé.

*Première remarque*. Trois sphères se coupant toujours en deux points symétriquement placés par rapport au plan qui joint les trois centres, le second point d'intersection donne le centre de gravité du triangle A′B′C′ symétrique de ABC, et qu'on obtient en prolongeant en arrière les rayons OA, OB, OC (*fig.* 4).

*Deuxième remarque*. Lorsque le triangle ABC est isoscèle, le triangle des trois points (P, P′, P″) l'est aussi, et l'une des trois sphères devient un plan. Alors, les centres de gravité des deux triangles ABC, A′B′C′ sont donnés par l'intersection de ce plan et du cercle intersection des deux autres sphères.

*Troisième remarque*. Enfin, si le triangle proposé est équilatéral, sans être tri-rectangle, le triangle des trois points (P, P′, P″) sera également équilatéral, circonstance qui réduira les trois sphères dont ces points sont les foyers, à trois plans perpendiculaires sur les milieux des côtés du triangle PP′P″, plans qui se couperont selon une ligne droite L passant par le centre de la sphère sur laquelle on opère, et qui contient évidemment le centre de gravité cherché du triangle ABC.

Pour achever de déterminer la position de ce centre de gravité sur cette ligne droite, on décomposera le triangle ABC en trois triangles isoscèles, comme on voit (*fig.* 5); puis, par le centre de gravité d'un de ces triangles isoscèles, on mènera un plan perpendiculaire à la ligne L, et le point d'intersection de ces deux objets sera le centre de gravité du triangle équilatéral quelconque ABC.

*Centre de gravité d'une pyramide triangulaire sphérique quelconque, mais formée par des arcs de grands cercles.*

Pour avoir le centre de gravité d'une pyramide sphérique triangulaire quelconque, il suffit de considérer cette solidité comme la somme d'une infinité de pyramides triangulaires égales, ayant leur sommet commun au centre de la sphère, et pour somme de leurs bases la surface du triangle sphérique que l'on considère, parce qu'alors chacune de ces pyramides ayant son centre de gravité aux trois quarts du rayon à partir du centre, tous ces centres de gravité forment la surface d'un autre triangle sphérique semblable au premier, situé sur une sphère concentrique et d'un rayon égal à $\frac{3}{4}$, celui de la première sphère étant $1$.

Comme cas particulier, on trouvera que le centre de gravité d'un hémisphère solide est aux $\frac{3}{8}$ de sa hauteur à partir de sa base.

On trouvera de même que le centre de gravité d'un triangle tri-rectangle est situé à l'extrémité de la diagonale d'un cube construit sur les $\frac{3}{8}$ de chacun des trois rayons qui aboutissent aux trois sommets du triangle ABC et à partir du centre de la sphère.