JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PUISEUX

Note sur le mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 517-520.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__517_0>

NOTE

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL

PESANT SUR UNE SPHÈRE;

Par M. PUISEUX,

Ancien Élève de l'École normale.

Lorsqu'un point pesant se meut sur une sphère, la courbe qu'il décrit présente une suite de sommets dont chacun divise la courbe en deux parties symétriques, et dont les ordonnées verticales sont alternativement maximum et minimum. (*Mécanique analytique*, tome II.)

Si le mobile s'écarte très-peu de la verticale passant par le centre de la sphère, la différence des azimuts [*] de deux sommets consécutifs diffère très-peu de 90°, de façon que la projection horizontale du mobile doit décrire une courbe à deux axes perpendiculaires entre eux et présentant la forme d'une ellipse.

Mais quand le point pesant s'écarte sensiblement de la verticale, l'angle dont il vient d'être question diffère sensiblement aussi de 90°, et si la courbe décrite par la projection horizontale du mobile présente encore l'apparence d'une ellipse, le grand axe de cette ellipse se déplace à chaque révolution. Il est facile de voir que le mouvement de ce grand axe doit être de même sens que le mouvement du mobile, si la différence entre les azimuts de deux sommets consécutifs surpasse 90°, et que le contraire doit avoir lieu si cette différence est inférieure à 90°.

Or de ces deux cas, le premier est le seul que l'on observe dans la nature, quelle que soit la vitesse initiale imprimée au mobile. Ayant

[*] J'appelle azimut d'un point l'angle que fait avec un plan vertical fixe, le plan passant par ce point et par la verticale du centre de la sphère.

cherché à déduire ce résultat de la théorie, j'y parvins par le calcul suivant.

Nommons a le rayon de la sphère, g l'intensité de la pesanteur, b et c deux constantes. Désignons par ψ l'azimut du mobile, par z sa distance au plan horizontal mené par le centre de la sphère. On aura (*Mécanique* de Poisson, tome Ier, page 390)

$$d\psi = \frac{\pm acdz}{(a^2 - z^2)\sqrt{(a^2 - z^2)(2gz + b) - c^2}}.$$

Si l'on appelle ζ la valeur initiale de z, k la vitesse initiale, ε l'angle que la direction de cette vitesse fait avec la tangente horizontale menée à la sphère par le point de départ du mobile, on trouvera (même ouvrage)

$$b = k^2 - 2g\zeta, \quad c = k\sqrt{a^2 - \zeta^2}\cos\varepsilon,$$

et la valeur de $d\psi$ deviendra

$$d\psi = \frac{\pm a . k\sqrt{a^2 - \zeta^2}\cos\varepsilon . dz}{(a^2 - z^2)\sqrt{(a^2 - z^2)[k^2 + 2g(z - \zeta)] - k^2(a^2 - \zeta^2)\cos^2\varepsilon}}.$$

Dans le polynôme du troisième degré soumis au radical, faisons successivement

$$z = -\infty, \quad z = -a, \quad z = \zeta, \quad z = a;$$

les signes des résultats seront respectivement

$$+, \qquad -, \qquad +, \qquad -.$$

Il en résulte que ce polynôme s'annulle pour trois valeurs réelles de z, l'une α comprise entre a et ζ, l'autre β comprise entre ζ et $-a$, la troisième $-\gamma$ comprise entre $-a$ et $-\infty$.

Posons donc

$$(a^2 - z^2)[k^2 + 2g(z - \zeta)] - k^2(a^2 - \zeta^2)\cos^2\varepsilon = 2g(\alpha - z)(z - \beta)(z + \gamma),$$

d'où

$$\begin{aligned} 2g(\alpha + \beta - \gamma) &= -(k^2 - 2g\zeta), \\ 2g[(\alpha + \beta)\gamma - \alpha\beta] &= 2ga^2, \\ -2g\alpha\beta\gamma &= a^2(k^2 - 2g\zeta) - k^2(a^2 - \zeta^2)\cos^2\varepsilon. \end{aligned}$$

De ces trois égalités, la deuxième donne

$$\gamma = \frac{a^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta};$$

par suite, on conclut de la première

$$k^2 - 2g\zeta = \frac{2g(a^2 - \alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2)}{\alpha + \beta};$$

et enfin la troisième donne

$$k^2(a^2 - \zeta^2)\cos^2\varepsilon = \frac{2g(a^2 - \alpha^2)(a^2 - \beta^2)}{\alpha + \beta}.$$

Substituant dans la valeur de $d\psi$, elle devient

$$d\psi = \frac{\pm a\sqrt{(a^2 - \alpha^2)(a^2 - \beta^2)}\,dz}{(a^2 - z^2)\sqrt{(\alpha - z)(z - \beta)[(\alpha + \beta)z + a^2 + \alpha\beta]}}$$

On voit par cette formule que la valeur maximum de z est α, la valeur minimum β, et que l'angle Ψ variant toujours dans le même sens en vertu du principe des aires, l'ordonnée z atteint alternativement ce maximum et ce minimum. De plus, la différence des azimuts qui répondent à un maximum et à un minimum consécutifs est

$$\Psi = \int_\beta^\alpha \frac{a\sqrt{(a^2 - \alpha^2)(a^2 - \beta^2)}\,dz}{(a^2 - z^2)\sqrt{(\alpha - z)(z - \beta)[(\alpha + \beta)z + a^2 + \alpha\beta]}},$$

et il s'agit de démontrer que l'angle Ψ est plus grand que $\frac{\pi}{2}$.

Pour cela, remarquons que z variant de β à α, le facteur $(\alpha + \beta)z + a^2 + \alpha\beta$ varie de $a^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ à $a^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2$, et par conséquent, en nommant μ une moyenne entre $\sqrt{a^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}$ et $\sqrt{a^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2}$, on a

$$\Psi = \frac{a\sqrt{(a^2 - \alpha^2)(a^2 - \beta^2)}}{\mu}\int_\beta^\alpha \frac{dz}{(a^2 - z^2)\sqrt{(\alpha - z)(z - \beta)}},$$

ou, en effectuant l'intégration,

$$\Psi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{(a + \alpha)(a + \beta)} + \sqrt{(a - \alpha)(a - \beta)}}{\mu}.$$

L'angle Ψ est donc compris entre les deux limites

$$P = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{(a+\alpha)(a+\beta)} + \sqrt{(a-\alpha)(a-\beta)}}{\sqrt{a^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}},$$

$$Q = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{(a+\alpha)(a+\beta)} + \sqrt{(a-\alpha)(a-\beta)}}{\sqrt{a^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2}}.$$

Mais ces formules peuvent s'écrire

$$P = \frac{\pi}{2}\sqrt{1 + \frac{a^2 - \beta^2 + 2\sqrt{(a^2-\alpha^2)(a^2-\beta^2)}}{a^2 - \alpha^2 + (\alpha+\beta)^2}},$$

$$Q = \frac{\pi}{2}\sqrt{1 + \frac{a^2 - \alpha^2 + 2\sqrt{(a^2-\alpha^2)(a^2-\beta^2)}}{a^2 - \beta^2 + (\alpha+\beta)^2}};$$

et si l'on remarque que $a^2 - \alpha^2$, $a^2 - \beta^2$ sont des quantités positives, on en conclura que P et Q surpassent $\frac{\pi}{2}$. Donc aussi l'angle Ψ est plus grand que $\frac{\pi}{2}$; ce qu'il fallait démontrer.

FIN DU SEPTIÈME VOLUME.