JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Règles sur la convergence des séries

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 35-54.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__35_0>

RÈGLES
SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES;

PAR M. J. BERTRAND,

Élève Ingénieur des Mines.

Lorsqu'une série a tous ses termes positifs, on sait que pour décider s'il y a convergence ou divergence, il suffit de considérer le rapport d'un terme au précédent, et que, si ce rapport est, à partir d'une certaine limite, toujours supérieur à l'unité, la série est divergente. Si, au contraire, il est constamment inférieur à un nombre moindre que un, la série est convergente.

Les seuls cas douteux sont, celui où le rapport s'approche indéfiniment de l'unité, et celui où n'ayant aucune limite déterminée, il est tantôt plus petit, tantôt plus grand que un.

Lorsque cette première règle se trouve ainsi en défaut, on en connaît plusieurs autres qui s'appliquent quelquefois avec avantage.

L'une d'elles a été donnée par M. Cauchy; elle consiste en ce que, u_n désignant le terme général de la série, il y a convergence ou divergence, selon que l'expression $\dfrac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$, où l'on fait croître n indéfiniment, reste, à partir d'une certaine valeur de n, toujours plus grande qu'un nombre déterminé quelconque plus grand que 1, ou toujours plus petite que l'unité. Cette règle peut s'appliquer dans les cas douteux de la précédente, mais elle-même présente un cas d'incertitude dont M. Cauchy ne s'est pas occupé.

Une autre règle a été donnée par M. Raabe dans le Journal scientifique de MM. Ettingshausen et Baumgartner; c'est cette règle que M. Duhamel avait trouvée de son côté (tome IV de ce Journal, page 214), et dont il est question dans la Note de M. Raabe (tome VI de ce Journal, page 85.) Cette règle, dont voici l'énoncé, s'applique, comme la précédente, au cas où le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers l'unité : « Si » l'on suppose ce rapport mis sous la forme $\frac{1}{1+\alpha}$, il y aura conver- » gence ou divergence, suivant que la limite du produit $n\alpha$ (pour » $n = \infty$) sera plus grande ou plus petite que l'unité. »

Dans le cas où la limite serait négative, on devrait la considérer comme plus petite que 1, et il y aurait divergence. Les seuls cas douteux sont celui où le produit $n\alpha$ n'ayant pas de limite déterminée serait tantôt plus petit, tantôt plus grand que 1, et celui où la limite serait précisément l'unité.

Enfin un auteur anglais, M. Augustus de Morgan, a donné, dans un *Traité de calcul différentiel et intégral*, imprimé à Londres en 1839, une règle qu'il énonce ainsi :

« $\varphi(x)$ représentant une fonction croissante, soit proposée la série

$$\frac{1}{\varphi(a)} + \frac{1}{\varphi(a+1)} + \ldots + \frac{1}{\varphi(a+n)} + \text{etc.},$$

» et faisons $p_0 = \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}$: si, lorsque x devient infini, la limite a_0 » de p_0 est plus grande que 1, la série est convergente : si, au con- » traire, la limite a_0 est plus petite que 1, la série est divergente.

» Dans le cas où $a_0 = 1$ cherchez la limite de $lx(p_0 - 1) = p_1$; si » cette limite a_1 est plus grande que 1, il y a convergence ; si elle est » plus petite que 1, il y a, au contraire, divergence. Dans le cas où » l'on aurait $a_1 = 1$, on considérera la limite de $l.lx(p_1 - 1) = p_2$, » et, suivant qu'elle sera plus petite ou plus grande que 1, il y aura » convergence ou divergence ; dans le cas où elle serait encore l'unité, » il faudrait considérer $l.l.lx(p_2 - 1)$, et ainsi de suite indéfiniment. »

Avant d'avoir eu connaissance du travail de M. de Morgan, j'étais parvenu de mon côté à une série de règles analogues aux siennes, mais de forme tout à fait différente. En les comparant de plus près, j'ai vu que cependant elles étaient les mêmes quant au fond, c'est-à-dire qu'elles s'appliqueront dans les mêmes circonstances et présenteront les mêmes cas douteux. J'ai remarqué aussi que la règle de M. Cauchy, celle qui a été trouvée par M. Raabe, et la première des règles de M. de Morgan, ne diffèrent les unes des autres que par la forme, et que les expressions dont elles font dépendre la convergence ont les mêmes limites. C'est une coïncidence de même nature qui existe entre chacune des règles auxquelles j'étais parvenu, et les règles correspondantes de M. de Morgan. Cela m'a conduit à penser qu'en prenant la règle de M. Raabe pour point de départ, il serait possible de former une troisième série de règles, présentant le même degré de généralité que les deux autres, et dans lesquelles la condition de convergence serait déduite de la considération du rapport de deux termes consécutifs. J'ai en effet démontré ces différentes règles, auxquelles l'analogie conduisait facilement, et j'ai reconnu que, comme celles auxquelles j'étais d'abord parvenu, elles faisaient dépendre la convergence d'expressions qui ont les mêmes limites que celles que considère M. de Morgan.

On pourrait même se servir de cette égalité de limites pour déduire les règles que je vais donner de celles qui ont été trouvées par M. de Morgan; mais, comme il est très-facile de les établir indépendamment les unes des autres, c'est cette marche que je choisirai, en me bornant à démontrer *à posteriori* leur coïncidence.

I.

Je commencerai par la série de règles, où je prends pour point de départ la règle de M. Cauchy.

Cette règle consiste, comme nous l'avons dit, en ce que, u_n représentant le terme général d'une série, il y a convergence ou divergence suivant que $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$ a une limite plus grande ou plus petite que l'unité; si la limite est précisément 1, il y a doute.

Dans ce cas, il faut considérer $\frac{l\frac{1}{nu_n}}{lln}$, et, suivant que la limite de cette expression est plus grande ou moindre que 1, il y a convergence ou divergence; si la limite est négative, il y a toujours divergence.

Dans le cas où la limite précédente est précisément l'unité, il faut considérer le rapport $\frac{l\frac{1}{nu_n ln}}{llln}$; si ce rapport a une limite négative ou plus petite que 1 la série est divergente, si la limite est plus grande que 1 il y a convergence, et enfin si elle est égale à 1 il y a doute, et il faut recourir à une nouvelle expression $\frac{l\frac{1}{nu_n ln lln}}{lllln}$, dont la limite décide, comme dans les cas précédents, s'il y a convergence ou divergence : ainsi de suite indéfiniment.

Pour démontrer ces différentes règles, nous commencerons par prouver que les séries

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots\ldots,$$

$$1 + \frac{1}{2(l2)^\alpha} + \frac{1}{3(l3)^\alpha} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n(ln)^\alpha} + \ldots\ldots,$$

$$1 + \frac{1}{2\,l2\,(ll2)^\alpha} + \frac{1}{3\,l3\,(ll3)^\alpha} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n\,ln.(lln)^\alpha} + \ldots\ldots,$$

$$1 + \frac{1}{2\,l2ll2\,(lll2)^\alpha} + \frac{1}{3\,l3ll3\,(lll3)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n\,ln\,lln.(llln)^\alpha} + \ldots, \text{ etc.},$$

sont toutes convergentes si α est plus grand que 1, et divergentes si α est égal à 1 ou plus petit que 1.

Cela se déduit sans peine du théorème suivant, que M. Cauchy a démontré dans ses *Exercices de Mathématiques :* $\varphi(x)$ désignant une fonction positive décroissante de la variable x, la série

$$\varphi(a) + \varphi(a+1) + \ldots + \varphi(a+p) + \ldots\ldots$$

sera convergente ou divergente, suivant que l'intégrale $\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$ aura ou n'aura pas une valeur finie.

En admettant ce théorème, dont la démonstration est fort simple, on voit que la proposition énoncée se trouvera établie si l'on prouve que les diverses intégrales

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \int_a^\infty \frac{dx}{x}\frac{1}{(lx)^\alpha}, \quad \int_a^\infty \frac{dx}{xlx}\frac{1}{(llx)^\alpha}, \text{ etc.},$$

ont une valeur finie ou infinie, suivant que α est plus grand ou plus petit que l'unité.

Or les intégrations indiquées peuvent s'effectuer si l'on remarque que $\frac{dx}{x}$ est la différentielle de lx, $\frac{dx}{xlx}$ celle de llx, et ainsi de suite; quand α n'est pas l'unité, les intégrales indéfinies sont

$$\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad \frac{lx^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad \frac{(llx)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \text{ etc.},$$

et ces quantités deviennent ou ne deviennent pas infinies avec x suivant que $1-\alpha$ est positif ou négatif, c'est-à-dire suivant que α est plus petit ou plus grand que 1 : quand $\alpha = 1$ les puissances se changent en logarithmes qui sont infinis pour $x = \infty$. Donc, etc.

Cela posé, soit une série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

et supposons qu'à partir d'un certain terme on ait

$$\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln} > \alpha,$$

α étant un nombre supérieur à l'unité.

On en tire

$$l\frac{1}{u_n} > \alpha\, ln > l.\, n^\alpha;$$

donc

$$\frac{1}{u_n} > n^\alpha,$$

et par suite

$$u_n < \frac{1}{n^\alpha};$$

donc la série $\sum u_n$ a tous ses termes plus petits que ceux de la série convergente $\sum \frac{1}{n^\alpha}$; donc elle est elle-même convergente.

Si l'on avait au contraire l'inégalité

$$\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln} < \alpha',$$

α' étant plus petit que 1 ou même égal à 1, on en tirerait

$$u_n > \frac{1}{n^{\alpha'}},$$

et par conséquent la série proposée, ayant tous ses termes plus grands que ceux d'une série divergente, serait elle-même divergente.

Il n'y a donc doute que si la limite de $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$ est précisément l'unité.

C'est là la règle de M. Cauchy, et la première de celles que nous avons énoncées au commencement de ce paragraphe.

Pour démontrer la seconde, supposons que $\frac{l\frac{1}{nu_n}}{ln}$ ait pour limite une quantité α plus grande que 1, ou, plus généralement, supposons qu'à partir d'une certaine limite ce rapport soit constamment supérieur à un nombre k plus grand que l'unité, en sorte que l'on ait

$$\frac{l\frac{1}{nu_n}}{lln} > k;$$

on en tirera

$$l\frac{1}{nu_n} > l.(ln)^k,$$

et par suite,

$$\frac{1}{nu_n} > (ln)^k,$$

$$u_n < \frac{1}{n(ln)^k}.$$

Notre série a donc tous ses termes plus petits que ceux de la série convergente $\sum \frac{1}{n(ln)^k}$; elle est donc elle-même convergente. On verrait par un raisonnement tout semblable, que la condition

$$\frac{l\dfrac{1}{nu_n}}{lln} < 1,$$

supposée remplie à partir d'une certaine valeur de n, entraîne toujours la divergence.

Il est important de remarquer que cette nouvelle règle s'applique bien dans le cas douteux de la précédente, c'est-à-dire que l'expression dont elle dépend aura en général une limite différente de 1, lorsque $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$ tendra lui-même vers l'unité. Pour s'en assurer, il suffit de mettre le rapport $\frac{l\frac{1}{nu_n}}{lln}$, sous la forme $\frac{l\frac{1}{u_n} - ln}{lln}$ et l'on voit que si $l\frac{1}{u_n}$ et ln avaient un rapport différent de l'unité, leur différence serait du même ordre que ln, et par conséquent la fraction serait infinie; le seul cas où $\frac{l\frac{1}{nu_n}}{lln}$ puisse avoir une limite finie, est donc celui où $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$ a pour limite l'unité, c'est-à-dire le cas douteux de la règle précédente; il n'y a évidemment aucune raison pour que cette limite finie soit aussi elle égale à 1. Si ce cas se présentait, il faudrait recourir au rapport

$$\frac{l\dfrac{1}{nu_n\, ln}}{llln},$$

qui pourra alors avoir une limite finie, et la valeur de cette limite, si elle n'est pas encore l'unité, décidera s'il y a convergence ou divergence.

Dans le cas où l'on retomberait sur une limite égale à 1, il faudrait recourir à une quatrième expression, et ainsi de suite indéfiniment.

Nous n'avons considéré dans la démonstration que le cas où les limites des expressions $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$, $\frac{l\frac{1}{nu_n}}{lln}$, $\frac{l\frac{1}{nu_n\, ln}}{llln}$,..., sont positives; mais lorsque l'une de ces limites se trouvera négative, il y aura nécessairement divergence, car alors, à partir d'un certain terme, on aura

$$\frac{1}{nu_n\, lnlln\ldots} < 1,$$

d'où

$$u_n > \frac{1}{nlnlln\ldots},$$

c'est-à-dire que u_n sera plus grand que le terme général d'une série divergente; du reste, ce résultat est compris dans l'énoncé de la règle générale, puisque quand la limite est négative elle doit être considérée comme plus petite que l'unité.

Lorsque l'on sera parvenu à reconnaître la convergence d'une série par le moyen de l'une des règles précédentes, il sera facile de donner une limite de la valeur du reste lorsque l'on s'arrête à un certain terme, car nous avons vu, dans le cours de la démonstration, qu'alors tous les termes de la série proposée sont plus petits que ceux de l'une des séries

$$\sum\frac{1}{n^\alpha},\quad \sum\frac{1}{n(ln)^\alpha},\quad \sum\frac{1}{nln(lln)^\alpha},\ldots,$$

suivant qu'on est obligé de recourir à la première, la seconde, ou la troisième règle : donc aussi la somme sera moindre que celle de ces séries, à partir du terme considéré; mais il est facile de trouver une limite pour la somme de chacune de ces séries, car on a

$$\frac{1}{n^\alpha}+\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\ldots\ldots\ldots\ldots < \int_{n-1}^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha} < \frac{1}{(1-\alpha)(n-1)^{\alpha-1}},$$

$$\frac{1}{n(ln)^\alpha}+\frac{1}{(n+1)(ln+1)^\alpha}+\ldots\ldots < \int_{n-1}^{\infty}\frac{dx}{x(lx)^\alpha} < \frac{1}{(1-\alpha)\,l(n-1)^{\alpha-1}},$$

$$\frac{1}{nln(lln)^\alpha}+\frac{1}{(n+1)(ln+1)(lln+1)^\alpha}+\ldots < \int_{n-1}^{\infty}\frac{1}{xlx(llx)^\alpha} < \frac{1}{(1-\alpha)ll(n-1)^{\alpha-1}},$$

et ainsi de suite indéfiniment.

Faisons observer encore que les règles ci-dessus démontrées ne seront en défaut que dans le cas où l'une des expressions que nous avons à considérer n'aurait pas de limite déterminée et serait alternativement plus grande et plus petite que l'unité. Dans ce cas il n'y aura pas lieu d'essayer les expressions suivantes, car il est facile de voir que ces dernières croîtront indéfiniment, en étant alternativement positives et négatives.

Si, par exemple, $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$ était tantôt plus petit, tantôt plus grand que 1, $\frac{l\frac{1}{nu_n}}{lln}$, c'est-à-dire $\frac{l\frac{1}{u_n} - ln}{lln}$, serait évidemment tantôt positif et tantôt négatif, et de plus indéfiniment croissant si $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$ ne s'approche pas de l'unité.

De même, si $\frac{l\frac{1}{nu_n}}{lln}$ est tantôt plus grand et tantôt plus petit que l'unité, $\frac{l\frac{1}{nu_n ln}}{llln}$, c'est-à-dire $\frac{l\frac{1}{un_n} - lun}{llln}$, sera évidemment tantôt positif et tantôt négatif, et de plus croîtra indéfiniment en valeur absolue si $\frac{l\frac{1}{nu_n}}{llu}$ ne s'approche pas indéfiniment de l'unité.

III.

Je passe à la seconde série de règles.

Soit

$$u_0 + u_1 + \ldots u_n + u_{n+1} \ldots$$

une série à termes positifs dans laquelle le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tende vers l'unité : M. Raabe a démontré qu'en mettant ce rapport sous la forme $\frac{1}{1+\alpha}$, il y a convergence ou divergence, suivant que $n\alpha$ a une limite plus grande ou plus petite que l'unité : si α était toujours négatif, le produit $n\alpha$ serait lui-même négatif, et on devrait le considérer comme plus petit que 1 ; il y aurait divergence.

C'est là la première des règles dont nous nous occupons actuellement ; nous n'en rapporterons pas la démonstration, qui a déjà paru dans ce Journal.

Dans le cas où $n\alpha$ a pour limite l'unité, il faut mettre le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sous la forme $\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\alpha'}$, et il y aura convergence ou divergence suivant que $n\alpha' ln$ aura une limite plus grande ou plus petite que 1, une limite négative étant considérée comme plus petite que 1.

Si $n\alpha' ln$ tend lui-même vers 1, il faudra mettre le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sous la forme

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{nln}+\alpha''},$$

et considérer le produit $n\alpha'' lnlln$; suivant que ce produit aura une limite plus grande ou plus petite que 1, il y aura convergence ou divergence, et ainsi de suite indéfiniment.

Pour démontrer ces différentes règles, nous admettrons le lemme suivant dont M. Duhamel fait usage dans son Mémoire : « Si la série » $u_0 + u_1 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$ est convergente, il en sera de » même de toute autre série $v_0 + v_1 + \ldots + v_n + v_{n+1} + \ldots$, telle » que le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ soit constamment moindre que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$; et sem- » blablement, si la série $u_0 + u_1 + \ldots$ est divergente, et que $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ » soit plus grand que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, la série $v_0 + v_1 + \ldots$ sera aussi diver- » gente. » Il est inutile de répéter que nous nous occupons exclusivement des séries dont les termes sont tous positifs.

Supposons actuellement qu'une série donnée

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

soit telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ait pour limite l'unité, et que ce rapport étant mis sous la forme $\frac{1}{1+\alpha}$, on ait aussi lim. $n\alpha = 1$; faisons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}+\alpha'},$$

et admettons qu'à partir d'un certain terme, on ait $n\alpha' ln > k$, k étant plus grand que 1, je dis que la série sera convergente. En effet, posons

$$n\alpha' ln = k_1, \quad \alpha' = \frac{k_1}{nl_n};$$

le rapport d'un terme au précédent deviendra, dans la série proposée,

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{k_1}{nln}}:$$

or je dis que ce rapport est toujours moindre que le rapport correspondant de la série

$$1 + \frac{1}{2(l2)^k} + \ldots + \frac{1}{n(ln)^k} + \ldots$$

Il faut prouver que l'on a

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{k_1}{nln}} < \frac{n(ln)^k}{(n+1)[l(n+1)]^k},$$

ou bien

$$1+\frac{1}{n}+\frac{k_1}{nln} > \frac{(n+1)}{n}\frac{[l(n+1)]^k}{(ln)^k},$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$n(ln)^k + (ln)^k + k_1(ln)^{k-1} > (n+1)[l(n+1)]^k,$$

et en transposant,

$$k_1(ln)^{k-1} > (n+1)[l(n+1)]^{k_1} - (ln)^{k_1}.$$

Il est facile de voir que n augmentant sans cesse, $[l(n+1)]^k - (ln)^k$ tend indéfiniment vers zéro; il sera donc permis, sans altérer l'inégalité que nous voulons démontrer, de remplacer dans le premier membre k_1 par k, ce qui le diminue de $(k_1 - k)\,ln^{k-1}$, quantité qui croît indéfiniment, et de remplacer dans le second membre le facteur $n+1$ par n, ce qui le diminuera seulement de la quantité très-petite $[l(n+1)]^k - (ln)^k$. L'inégalité à démontrer devient ainsi

$$k(ln)^{k-1} > n[l(n+1)^k - (ln)^k];$$

or si nous considérons la courbe dont l'équation est $y = (lx)^k$, il est facile de voir qu'elle est concave vers l'axe des x, et que, par suite, la différence de deux de ses ordonnées, correspondantes à des abscisses dont la différence est l'unité, doit être moindre que la valeur que prend la dérivée pour le premier des deux points; mais $\frac{k(ln)^{k-1}}{n}$ est précisément la valeur de cette dérivée, et l'inégalité que nous voulons vérifier est par conséquent démontrée. Le rapport de deux termes consécutifs de la série proposée est donc moindre que le rapport correspondant dans la série convergente $\sum \frac{1}{n(ln)^k}$; il y a donc convergence. Si, au contraire, le produit $n\alpha' ln$ avait été inférieur à l'unité, nous aurions comparé le rapport $\frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{k_1}{nln}}$ au rapport correspondant dans la série $\sum \frac{1}{nln}$, en nous rappelant que k_1 désigne maintenant un nombre plus petit que 1. On vérifie sans peine que l'on a alors

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{k_1}{nln}} > \frac{nln}{(n+1)l(n+1)},$$

ou

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{k_1}{nln} < \frac{n+1}{n}\,\frac{ln+1}{ln},$$

car en chassant les dénominateurs et réduisant, cette inégalité se ramène à

$$\frac{k_1}{n+1} < (ln+1) - ln,$$

et sous cette forme elle devient évidente, puisque la courbe $y = lx$ étant concave vers l'axe des x, la différence de deux ordonnées, dont les abscisses diffèrent d'une unité, est plus grande que la valeur que prend la dérivée à celui des deux points qui a la plus grande abscisse, et l'on a

$$l(n+1) - ln > \frac{1}{n+1},$$

ce qui démontre à plus forte raison l'inégalité précédente, où k_1 est plus petit que 1. Si α était négatif, le même raisonnement prouverait qu'il y a divergence.

Dans le cas où $n\alpha' ln$ aurait pour limite l'unité, on mettrait le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ sous la forme

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{nln} + \alpha''},$$

et il faudrait considérer le produit $n\alpha'' lnlln$; on démontrerait, comme dans le cas précédent, qu'il y a convergence ou divergence suivant que la limite de ce produit est plus grande ou plus petite que l'unité : il suffira de comparer la valeur que prend ce rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ dans chacun de ces deux cas, avec le rapport correspondant de la série $\sum \frac{1}{nln\,(lln)^k}$, k étant un nombre plus grand que 1 dans le premier cas, et plus petit que 1 dans le second.

Le raisonnement étant tout à fait de même nature, il est inutile de le donner ici.

Ces règles, comme celles du paragraphe précédent, n'auront d'autres cas douteux que ceux où les diverses expressions que nous désignons par $n\alpha' ln$, $n\alpha'' lnlln$, etc..., n'ayant pas de limite déterminée, seraient tantôt plus grandes, tantôt moindres que l'unité. Il faut encore y joindre le cas infiniment peu probable où toutes ces expressions, jusqu'à l'infini, auraient l'unité pour limite.

D'après la forme de ces nouvelles règles, on voit qu'elles s'appliqueront surtout avec avantage aux séries dont les divers termes seront exprimés par des produits de facteurs dont le nombre augmente indéfiniment, mais de telle manière que la plupart d'entre eux disparaissent dans le rapport de deux termes consécutifs, ce qui rendra ce rapport plus commode à considérer que ne l'eussent été les termes eux-mêmes. Lorsqu'au contraire le terme général sera exprimé d'une manière simple en fonction explicite de son rang, ce sera la première série de règles qui s'appliquera avec le plus de facilité.

IV.

Je vais montrer actuellement que les expressions dont je fais dépendre la convergence ou la divergence ont les mêmes limites que celles qui sont désignées par a_0, a_1, $a_2, \ldots$, dans l'ouvrage de M. de Morgan. On se rappelle que la série étant représentée par $\frac{1}{\varphi(1)} + \frac{1}{\varphi(2)} + \ldots + \frac{1}{\varphi(x)} + \ldots$, $\varphi(x)$ étant une fonction croissante de la variable x, on a

$$a_0 = \lim.\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)};$$

or la première expression que nous ayons à considérer, dans la règle de M. Cauchy, est $\frac{l\frac{1}{u_n}}{ln}$, expression qui, d'après la notation de M. de Morgan a évidemment la même limite que $\frac{l\varphi(x)}{lx}$, c'est-à-dire, en appliquant la règle des fractions $\frac{\infty}{\infty}$, que $\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}$.

La première des règles de M. de Morgan ne diffère donc pas de celle de M. Cauchy; je dis qu'il en est de même de celle de M. Raabe, qui est la première de notre seconde série : soit en en effet

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha},$$

ou, suivant la notation de M. Morgan,

$$\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = \frac{1+\alpha}{1};$$

on en tire

$$\alpha = \frac{\varphi(n+1)-\varphi(n)}{\varphi(n)},$$

et par suite

$$n\alpha = n\,\frac{\varphi(n+1)-\varphi(n)}{\varphi(n)};$$

mais on a, en appelant θ un nombre plus petit que 1,

$$\varphi(n+1)-\varphi(n) = \varphi'(n+\theta);$$

l'expression $n\alpha$ devient donc

$$\frac{n\varphi'(n+\theta)}{\varphi(n)} = \frac{n\varphi'(n)}{\varphi(n)}\,\frac{\varphi'(n+\theta)}{\varphi'(n)}:$$

or je dis que, quelle que soit la valeur de θ, valeur qui varie avec n, $\frac{\varphi'(n+\theta)}{\varphi'(n)}$ tend vers l'unité, car par hypothèse le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, et par suite $\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x)}$, s'approche indéfiniment de l'unité, et puisque $\varphi(n)$ est décroissant, il en sera de même de $\frac{\varphi(x+\theta)}{\varphi(x)}$, où θ conserverait toujours la valeur qu'on doit lui attribuer dans le rapport considéré; donc, en appliquant la règle des fractions $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\varphi'(x+\theta)}{\varphi'(x)}$ a aussi pour limite l'unité, et doit être très-rapproché de cette limite, si x est remplacé par le nombre très-grand n.

Je dis semblablement que la quantité que M. de Morgan désigne par a_1 est la même que lim. $\frac{l\frac{1}{nu_n}}{lln}$, et que lim. $n\alpha' ln$, dont les secondes règles de nos deux séries font dépendre la convergence. On a en effet

$$a_1 = \text{lim. } lx\left[1 - \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right];$$

et, d'après la notation de M. de Morgan,

$$\frac{l\frac{1}{nu_n}}{lln} = \frac{l\frac{\varphi(n)}{n}}{lln};$$

en appliquant la règle des fractions $\frac{\infty}{\infty}$, il vient

$$\lim . \frac{l\frac{\varphi(n)}{n}}{lln} = \lim . \left[\frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)} - \frac{1}{n}\right] nln = \lim . ln\left[\frac{n\varphi'(n)}{\varphi(n)} - 1\right]:$$

c'est précisément ce que nous voulions démontrer.

Si nous considérons maintenant la règle de la deuxième série, nous avons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}+\alpha'}:$$

on en tire

$$n\alpha' = \frac{n\varphi(n+1)-(n+1)\varphi(n)}{\varphi(n)},$$

ou bien

$$\lim . n\alpha' ln = \lim . ln\left[n\frac{\varphi(n+1)-\varphi(n)}{\varphi(n)} - 1\right] = \lim . ln\left[n\frac{\varphi'(n+\theta)}{\varphi(n)} - 1\right].$$

Or, au lieu de

$$ln\left[\frac{n\varphi'(n+\theta)}{\varphi(n)} - 1\right],$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} l(n+\theta)&\left[\frac{(n+\theta)\varphi'(n+\theta)-\varphi(n+\theta)}{\varphi(n+\theta)}\right]\frac{ln}{ln+\theta}\cdot\frac{\varphi(n+\theta)}{\varphi(n)} \\ &- \frac{\theta\varphi'(n+\theta)\,l(n+\theta)}{\varphi(n+\theta)}\cdot\frac{ln}{l(n+\theta)}\,\frac{\varphi(n+\theta)}{\varphi(n)} \\ &+ \frac{\varphi(n)-\varphi(n+\theta)}{\varphi(n)}\,ln \end{aligned}$$

Si l'on remarque que $\frac{ln}{l(n+\theta)}$ et $\frac{\varphi(n+\theta)}{\varphi(n)}$ tendent l'un et l'autre vers l'unité, et que $n+\theta$ est une variable croissante que l'on peut désigner par x, la première partie a évidemment la même limite que

$$lx\left[\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} - 1\right].$$

Quant aux deux autres parties, elles tendent l'une et l'autre vers zéro, car $\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ ayant une limite finie, $\frac{lx\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ a évidemment pour limite zéro; il en est donc de même de $\frac{l(n+\theta)\varphi'(n+\theta)}{\varphi(n+\theta)}$, et de

$$\frac{\varphi(n+\theta)-\varphi(n)}{\varphi(n)}\, ln = ln\,\frac{\varphi'(n+\theta_1)}{\varphi(n)} = \frac{l(n+\theta_1)\varphi'(n+\theta_1)}{\varphi(n+\theta_1)}\cdot\frac{\varphi(n+\theta_1)}{\varphi(n)}\cdot\frac{ln}{l(n+\theta_1)},$$

θ_1 désignant un nombre moindre que θ et par suite moindre que l'unité.

Il y a donc coïncidence entre les secondes règles de chacune de nos séries et la seconde règle de M. de Morgan.

Je ne pousserai pas plus loin cette vérification, qui ne présente aucune difficulté.

V.

Soit la série

$$1 + \frac{1}{\sqrt[2]{2^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[n]{n^{n+1}}} + \ldots$$

Le rapport d'un terme au précédent a pour limite l'unité; si donc nous voulons appliquer la première série de règles, qui ici est évidemment la plus commode, il faut considérer la limite du rapport

$$\frac{l\sqrt[n]{n^{n+1}}}{ln} = \frac{n+1}{n}.$$

La limite de ce rapport est l'unité; il faut donc recourir à la seconde règle, et considérer

$$\frac{l\dfrac{\sqrt[n]{n^{n+1}}}{n}}{lln} = \frac{\left(\dfrac{n+1}{n}-1\right)ln}{lln} = \frac{ln}{nl_n}.$$

La limite est ici zéro, et par conséquent il y a divergence; on verrait de même que la série dont le terme général est $\frac{1}{n^{1+(ln)\alpha}}$, est convergente si α est plus petit que 1, et divergente lorsqu'il sera égal ou inférieur à l'unité.

Soit encore la série

$$1 + 2^{w} + \frac{3^{w}}{2^{w+\alpha}} + \ldots + \frac{n^{w}}{(n+1)^{w+\alpha}} + \ldots,$$

que M. Raabe a considérée, tome VI de ce Journal, page 87. M. Raabe démontre, en faisant usage de considérations détournées, que la limite dont sa règle fait dépendre la convergence est, dans ce cas, égale à α, en sorte qu'il y a convergence ou divergence suivant que α est plus grand ou plus petit que 1; si $\alpha = 1$ il y a doute, et M. Raabe ne s'est pas occupé de ce cas.

Notre première série de règles va nous permettre de décider très-facilement ce qui arrive alors.

Si nous considérons d'abord

$$\frac{l\,\frac{1}{u_n}}{ln} = \frac{(w+\alpha)\,l(n+1) - wln}{ln},$$

la limite est évidemment α; et en effet nous savons qu'elle est toujours la même que celle dont dépend la règle de M. Raabe. Si $\alpha = 1$, il faut considérer

$$\frac{l\,\frac{1}{nu_n}}{lln} = \frac{(w+1)\left[l(n+1) - l(n)\right]}{lln},$$

la limite est zéro, et il y a divergence.

Comme dernière application je considérerai la série

$$1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma\cdot\delta}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\delta(\delta+1)}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha.(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n).\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{\gamma.(\gamma+1)\ldots(\gamma+n).\delta(\delta+1)\ldots(\delta+n)}x^{n+1}\ldots \text{[*]}.$$

---

[*] Cette série a été traitée par M. Gauss dans un Mémoire qui fait partie des Commentaires de Gottingue (année 1813). Il déduit sa condition de convergence, d'un théo-

Il est clair que c'est notre deuxième série de règles dont l'application doit présenter le plus de commodité. Le rapport d'un terme au précédent est

$$\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(\delta+n)}x,$$

il a pour limite x il y a donc convergence ou divergence, suivant que x est plus petit ou plus grand que l'unité ; si $x=1$, le rapport devient

$$\frac{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}{n^2+(\gamma+\beta)n+\gamma\delta}=\frac{1}{1+\frac{n(\gamma+\beta-\alpha-\beta)-\alpha\beta+\gamma\delta}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}};$$

le produit dont la convergence dépend est donc ici

$$\frac{n.(\gamma+\delta-\alpha-\beta)-\alpha\beta+\gamma\delta}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta};$$

ce produit aura une limite plus grande ou plus petite que 1, et par conséquent il y aura convergence ou divergence, suivant que $\gamma+\delta-\alpha-\beta$ aura une valeur plus grande ou plus petite que 1.

Si $\gamma+\delta-\alpha-\beta=1$, il faut mettre la quantité α, c'est-à-dire

$$\frac{n(\gamma+\beta-\alpha-\beta)-\alpha\delta+\gamma\delta}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}=\frac{n-\alpha\beta+\gamma\delta}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta},$$

---

rème qui est une conséquence immédiate des règles établies dans cet article. Voici l'énoncé de ce théorème.

Si dans une série le rapport d'un terme au précédent est représenté par la fraction rationnelle

$$\frac{n^\alpha+\mathrm{A}\,n^{\alpha-1}+\mathrm{B}\,n^{\alpha-2}+\ldots}{n^\alpha+\mathrm{A}'\,n^{\alpha-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots},$$

il y aura convergence si $\mathrm{A}-\mathrm{A}'$ est plus grand que 1, et divergence dans le cas contraire.

sous la forme $\frac{1}{n} + \alpha'$; on voit sans peine que

$$\alpha' = \frac{[\gamma\delta - \alpha\beta - (\alpha + \beta)]\, n - \alpha\beta}{n^2 + (\alpha + \beta)\, n + \alpha\beta};$$

le produit de α' par ln tend nécessairement vers zero; la série est donc toujours divergente dans ce cas.

Il y a donc convergence, seulement lorsque $\gamma + \delta - \alpha - \beta$ est supérieur à l'unité.

Je ne multiplierai pas davantage les applications, la manière de faire usage de nos règles ne pouvant donner lieu à aucune difficulté.