JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

AUGUSTIN CAUCHY

Note sur la réflexion de la lumière à la surface des métaux

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 338-344.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__338_0>

NOTE

SUR LA RÉFLEXION DE LA LUMIÈRE A LA SURFACE DES MÉTAUX;

PAR M. AUGUSTIN CAUCHY.

M. Mac-Cullagh a lu à l'Académie de Dublin, le 9 janvier 1837, un Mémoire sur les lois de la réflexion et la réfraction cristalline. A ce Mémoire, dont une traduction française a paru dans la livraison de juin 1842 du *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* est jointe une Note dans laquelle l'auteur cite des formules qu'il a publiées dans les *Irish. Acad. Transactions*, et qui sont relatives à la réflexion opérée par les surfaces métalliques. Mais, dans des observations que renferme le tome VIII des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, page 961, et que M Liouville a bien voulu mentionner à la page 217 de son Journal, j'ai déjà rappelé que j'avais traité moi-même, avant les publications faites par M. Mac-Cullagh, le sujet auquel se rapportent les formules dont il s'agit. Il y a plus: M. Mac-Cullagh m'ayant fait l'honneur de venir me voir dans ces derniers temps, je n'ai pas hésité à mettre sous ses yeux les preuves de mes assertions et les nombreux calculs que j'avais faits sur la réflexion métallique dès les premiers mois de l'année 1836. Les détails dans lesquels je suis entré ont dû, je l'espère, éclaircir tous les doutes qui pouvaient subsister encore dans l'esprit de M. Mac-Cullagh sur la question envisagée au point de vue historique. Au reste, comme je l'ai déjà dit dans le tome VIII des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, M. Mac-Cullagh ayant produit ses recherches sur la réflexion à la surface des métaux avant que mes travaux sur le même objet fussent suffisamment connus, et n'ayant pas eu sous les yeux à cette époque des formules qui se trouvaient comprises seulement d'une manière implicite dans celles que j'avais alors publiées, il est clair que ces recherches offraient tout le mérite d'une difficulté vaincue, et devaient être, par cette raison, favorablement accueillies des savants.

Dans la présente Note je me bornerai à rappeler succinctement les formules générales desquelles j'avais déduit, dès les premiers mois de l'année 1836, les lois de la réflexion de la lumière à la surface des corps opaques, ainsi que les Lettres et les Mémoires dans lesquels ces formules se trouvaient écrites ou indiquées.

Dans une lettre adressée de Prague à M. Ampère, sous la date du 1er avril 1836, et insérée vers cette époque dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, je disais :

« Les formules générales auxquelles je suis parvenu dans mes nou- » velles recherches sur la théorie de la lumière ne fournissent pas seu- » lement les lois de la propagation de la lumière dans le vide, comme » je vous le disais dans mes lettres du 12 avril et du 19 février, ou les » lois de la réflexion et de la réfraction à la surface des corps trans- » parents, telles qu'elles se trouvent énoncées dans mes deux lettres » du 19 et du 28 mars; elles s'appliquent aussi à la propagation de la » lumière dans la partie d'un corps *opaque* voisine de la surface, et à » la réflexion de la lumière par un corps de cette espèce. On sait d'ail- » leurs que, si la lumière passe d'un milieu plus réfringent dans un » autre qui le soit moins, ce dernier deviendra opaque à l'égard des » rayons qui rencontreront sa surface sous un angle tel que son com- » plément τ, c'est-à-dire l'angle d'incidence, devienne supérieur à une » certaine limite qu'on nomme l'*angle de réflexion totale*... Or, sup- » posons qu'un rayon polarisé tombe sur la surface de séparation de » deux milieux dont le premier soit le plus réfringent, et que l'angle » d'incidence devienne supérieur à l'angle de réflexion totale. Si l'on » nomme τ l'angle d'incidence, $\frac{1}{\theta}$ le rapport qui existait entre le sinus » d'incidence et le sinus de réfraction avant que le rayon réfracté dis- » parût, enfin $l = \frac{2\pi}{k}$ et $l' = \frac{2\pi}{k'}$ les épaisseurs qu'une onde lumi- » neuse acquiert dans le premier et dans le second milieu, on aura » $\theta = \frac{k}{k'} = \frac{l'}{l}$; et, si l'on pose d'ailleurs

$$b = \theta \sin \tau, \qquad a = \sqrt{b^2 - 1},$$

» l'intensité de la lumière dans le second milieu, à la distance x de la » surface de séparation, sera proportionnelle à l'exponentielle négative

$$e^{-ak'x}.$$

» Si τ se réduit à l'angle de réflexion totale, on aura

$$\sin\tau = \frac{1}{\theta}, \quad b = 1, \quad a = 0, \quad e^{-ak'x} = 1,$$

» et la lumière réfractée aura une grande intensité; mais, si l'angle τ
» croît à partir de la limite qu'on vient de rappeler, la lumière ré-
» fractée s'éteindra à une distance comparable à l'épaisseur des ondes
» que peut transmettre le second milieu, et d'autant moindre que a
» sera plus grand. Si l'on suppose $\tau = \frac{\pi}{2}$, a atteindra sa limite supé-
» rieure $\sqrt{\theta^2 - 1}$. Ajoutons que la quantité b remplace ici le sinus
» de réflexion avec lequel elle coïncide lorsqu'on a $\sin\tau = \frac{1}{\theta}$. »

Cette lettre du 1^er^ avril 1836, dans laquelle je donnais d'ailleurs, pour déterminer l'intensité de la lumière réfléchie dans le cas de la réflexion totale, des formules qui se trouvent d'accord avec les expériences et les formules de Fresnel, prouve suffisamment qu'en développant la théorie de la lumière, j'étais parvenu, dès cette époque, à l'interprétation physique de la forme imaginaire sous laquelle peuvent se présenter les coefficients des coordonnées dans les expressions des déplacements moléculaires.

Une autre lettre, écrite le 16 avril 1836, et insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, le 2 mai de la même année, contient ce qui suit :

« Dans ma dernière lettre, j'ai indiqué les résultats que fournissent
» les formules générales auxquelles je suis parvenu quand on les
» applique au phénomène connu sous le nom de réflexion totale, c'est-
» à-dire, au cas où le second milieu, quoique transparent, remplit la
» fonction d'un corps opaque. Je vais aujourd'hui vous entretenir de
» ce qui arrive lorsque le second milieu est constamment opaque sous
» toutes les incidences, et en particulier lorsque la lumière se trouve
» réfléchie par un métal.

» Si l'on fait tomber sur la surface d'un métal un rayon simple doué
» de la polarisation rectiligne ou circulaire, ou même elliptique, ce
» rayon pourra toujours être décomposé en deux autres polarisés en
» ligne droite, l'un perpendiculairement au plan d'incidence, l'autre
» parallèlement à ce plan. Or je trouve que, dans chaque rayon com-

» posant, la réflexion fait varier l'intensité de la lumière suivant un rap-
» port qui dépend de l'angle d'incidence et qui généralement n'est pas
» le même pour les deux rayons. De plus, la réflexion transporte les
» ondulations en avant ou en arrière à une certaine distance qui dé-
» pend encore de l'angle d'incidence. Si l'on représente cette distance
» pour le premier rayon par $\frac{\mu}{k}$, et pour le second par $\frac{\nu}{k}$,

$$l = \frac{2\pi}{k}$$

» étant l'épaisseur d'une onde lumineuse; la différence de marche
» entre les deux rayons composants, après une première réflexion,
» sera représentée par

$$\frac{\mu - \nu}{k}.$$

» Après n réflexions opérées sous le même angle, elle deviendra

$$n\left(\frac{\mu - \nu}{k}\right).$$

» Je trouve d'ailleurs qu'après une seule réflexion sous l'angle d'inci-
» dence τ, la différence de marche des deux rayons composants est
» d'une demi-ondulation si $\tau = 0$, et d'une ondulation entière si
» $\tau = \frac{\pi}{2}$. Donc, en ne tenant pas compte des multiples de la circonfé-
» rence dans la valeur de l'angle $\mu - \nu$, on peut considérer la valeur
» numérique de ce dernier angle comme variant entre les limites π et
» zéro. Lorsque $\mu - \nu$ atteint la moyenne entre ces deux limites, ou $\frac{\pi}{2}$,
» on obtient ce que M. Brewster appelle la polarisation elliptique, et

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ldots,\ 2n$$

» réflexions semblables ramènent le rayon polarisé à son état pri-
» mitif. Alors, si le rayon incident était polarisé en ligne droite, le
» dernier rayon réfléchi sera lui-même polarisé rectilignement. Mais
» son plan de polarisation formera avec le plan de réflexion un angle
» δ, dont la tangente sera égale, au signe près, à la $(2n)^{ième}$ puissance
» du quotient qu'on obtient en divisant l'un par l'autre les rapports
» suivant lesquels la première réflexion fait varier dans chaque rayon

» composant les plus grandes vitesses des molécules. Donc, tandis » que le nombre des réflexions croîtra en progression arithmétique, » les valeurs de tang δ varieront en progression géométrique; et, » comme pour les différents métaux on trouve généralement $\delta < 45°$, » la lumière, pour de grandes valeurs de n, finira par être complétement polarisée dans le plan d'incidence. On déduit encore de mes » formules générales un grand nombre de conséquences que je développerai plus en détail dans une seconde lettre, et qui s'accordent, » comme les précédentes, avec les résultats obtenus par M. Brewster. »

Les formules générales desquelles j'avais déduit les lois de la réflexion et de la réfraction à la surface des corps transparents ou opaques sont celles que renferme la 7^e livraison de mes *Nouveaux Exercices de Mathématiques*, reçue par l'Académie des Sciences dans le mois d'août 1836, et mentionnée dans le *Compte rendu* de la séance du 16 de ce même mois (voir le *Bulletin bibliographique*, tome III des *Comptes rendus*). Dans cette livraison, page 203, se trouve le passage suivant :

« Des recherches approfondies m'ont conduit à un nouveau principe de Mécanique propre à fournir, dans plusieurs questions de » Physique mathématique, les conditions relatives aux limites des » corps et aux surfaces qui terminent des systèmes de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. Ce » principe, que je développerai dans un autre Mémoire, étant appliqué à la théorie de la lumière, on en conclut que, dans le voisinage de la surface de séparation de deux milieux, les déplacements » ξ, η, ζ des molécules d'éther, relatifs soit au premier milieu, soit » au second, devront fournir les mêmes valeurs de 8, si l'on prend » pour 8 l'une quelconque des trois fonctions

$$(1)\qquad \frac{d\eta}{dz}-\frac{d\zeta}{dy},\quad \frac{d\zeta}{dx}-\frac{d\xi}{dz},\quad \frac{d\xi}{dy}-\frac{d\eta}{dx},$$

» ou bien encore si l'on suppose

$$(2)\qquad 8 = a^2\frac{d\xi}{dx}+b^2\frac{d\eta}{dy}+c^2\frac{d\zeta}{dz}+bc\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right)+ca\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right)+ab\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right),$$

» a, b, c désignant les cosinus des angles formés par la normale à la

» surface de séparation des deux milieux avec les demi-axes des coor-» données positives. Il est bon d'observer que la valeur de υ, déter-» minée par l'équation (2), représente la dilatation de l'éther suivant » cette même normale.

» Lorsque, les deux milieux étant séparés l'un de l'autre par le plan » des y, z, on suppose l'axe des z parallèle aux plans des ondes lumi-» neuses, et par conséquent perpendiculaire au plan d'incidence, on » a dans la formule (2)

$$a = \pm 1, \quad b = 0, \quad c = 0,$$

» et de plus ξ, η, ζ deviennent indépendants de z. Donc alors, en chan-» geant, ce qui est permis, le signe de la première des différences (1), » on trouvera que les fonctions (1) et (2) peuvent être réduites à

$$(3) \qquad \frac{d\zeta}{dy}, \quad \frac{d\zeta}{dx}, \quad \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx}, \quad \frac{d\xi}{dx}.$$

» Donc, si l'on nomme ξ', η', ζ' ce que deviennent les déplace-» ments ξ, η, ζ tandis que l'on passe du premier milieu au second, » on aura, pour les points situés sur la surface de séparation, c'est-» à-dire pour $x = 0$,

$$(4) \qquad \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\xi'}{dx}, \quad \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx} = \frac{d\xi'}{dy} - \frac{d\eta'}{dx},$$

et

$$(5) \qquad \frac{d\zeta}{dx} = \frac{d\zeta'}{dx}, \quad \frac{d\zeta}{dy} = \frac{d\zeta'}{dy}.$$

» Lorsque dans les équations (4) et (5) on substitue à ξ, η, ζ les se-» conds membres des formules (1) du § V, et à ξ', η', ζ' les seconds » membres des formules (2) du même paragraphe (*voir* les *Nouveaux* » *Exercices*, pages 57 et 58), on obtient les lois de la réflexion et de la » réfraction qui ont lieu à la surface des corps transparents, avec les » diverses formules que contiennent les deux lettres adressées à » M. Libri, les 19 et 27 mars (1836), et imprimées dans les *Comptes* » *rendus des séances de l'Académie des Sciences* (tome II, pages 427 » et 341). On déduit aussi des conditions (4) et (5) les lois de la réflexion » opérée par la surface extérieure d'un corps opaque, ou par la sur-» face intérieure d'un corps transparent dans le cas où l'angle d'inci-

» dence devient assez considérable pour qu'il n'y ait plus de lumière
» transmise, c'est-à-dire dans le cas où la réflexion devient totale.
» (Voir à ce sujet les deux lettres que j'ai adressées à M. Ampère les
» 1er et 16 avril.) Comme je l'ai montré dans ces différentes lettres, les
» formules, auxquelles conduisent les conditions (4) et (5), non-seule-
» ment déterminent l'intensité de la lumière polarisée rectilignement
» par réflexion ou par réfraction, et les plans de polarisation des rayons
» réfléchis et réfractés, mais encore elles font connaître les diverses
» circonstances de la polarisation circulaire ou elliptique produite
» par la réflexion totale, ou par la réflexion opérée à la surface d'un
» corps opaque, et en particulier d'un métal. D'ailleurs les divers ré-
» sultats de notre analyse se trouvent d'accord avec les lois déjà con-
» nues, particulièrement avec les formules proposées par MM. Fres-
» nel et Brewster, ainsi qu'avec les observations de tous les physiciens.
» Au reste, je reviendrai sur ces résultats dans de nouveaux Mémoires,
» où je déduirai directement, des équations (15) du § Ier, les lois des
» divers phénomènes lumineux, y compris les phénomènes de l'ombre
» et de la diffraction. »

Le nouveau principe de mécanique dont il est question dans ce passage, et duquel j'avais déduit à Prague, dans les premiers mois de 1836, les formules (4), (5), est celui qui se trouve exposé dans le § IV de la première partie du Mémoire sur la lumière, lithographié à Budweiss dans le mois d'août 1836, et annoncé dans le *Compte rendu* de la séance du 29 de ce même mois. (Voir le tome III des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, page 235.) D'ailleurs, les formules (4), (5) étant une fois établies, soit à l'aide du principe que je viens de rappeler, soit par la méthode que j'ai développée dans les séances de l'Académie des Sciences des 18 mars, 25 mars et 1er avril 1839, l'application de ces formules aux corps isophanes, transparents, ou opaques, fournit immédiatement les lois de la réflexion opérée par la surface extérieure ou intérieure de l'un de ces corps, et l'on retrouve ainsi les diverses formules que j'avais déjà obtenues à Prague en 1836. C'est, au reste, ce que j'expliquerai plus en détail dans un autre article.