JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DU HAŸS

De la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax^2 + b = y^2$, des séries récurrentes qui en résultent, et de l'ordre à suivre dans la solution de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 325-337.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__325_0>

DE LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION INDÉTERMINÉE $ax^2 + b = y^2$,

DES SÉRIES RÉCURRENTES QUI EN RÉSULTENT,

ET DE L'ORDRE A SUIVRE DANS LA SOLUTION DE L'ÉQUATION $x^2 + y^2 = z^2$;

Par M. DU HAŸS.

Euler, dans le Traité de l'analyse indéterminée qui forme la seconde partie de ses *Éléments d'Algèbre* [*], et Lagrange, dans des Additions à cet ouvrage [**], ainsi que Legendre, dans son *Essai sur la théorie des nombres* [***], et d'autres géomètres, se sont occupés avec beaucoup de détails de la solution en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$ax^2 + b = y^2,$$

qui est d'un fréquent usage dans la résolution des équations indéterminées du second degré.

Le premier de ces géomètres démontre que, lorsque l'équation est possible, si f et g sont des valeurs correspondantes connues de x et de y, et que m et r soient des nombres entiers quelconques donnés par l'équation

$$ar^2 + 1 = m^2,$$

$mf + rg$ et $mg + arf$ sont d'autres valeurs correspondantes des mêmes

---

[*] Chap. VI et VII, page 96, de la traduction française de 1774.

[**] §§ VII et VIII, page 595.

[***] Première partie, page 58.

inconnues x et y. On peut donc avoir ainsi successivement un nombre infini de valeurs de x et de y, et toutes ces nouvelles valeurs seront évidemment des nombres entiers, premiers entre eux, si les nombres primitifs f et g, m et r sont également entiers et premiers entre eux.

On voit que les nombres m et r résultent uniquement du seul coefficient a, et qu'ils sont indépendants du terme b. Plus les nombres m et r seront petits, plus les valeurs qu'ils donneront de x et de y seront rapprochées. Il en résulte qu'en faisant usage des plus petites valeurs que ces nombres puissent avoir, on en déduira toutes les valeurs possibles de x et de y. C'est ce qui a déterminé Euler et Legendre à donner des tables qui contiennent les premières valeurs de m et de r, pour diverses valeurs de a. Si, au contraire, on voulait parvenir avec promptitude à des valeurs élevées de x et de y, on emploierait des valeurs de m et r exprimées par de grands nombres. Les nombres x et y peuvent d'ailleurs être pris indifféremment en sens positif ou en sens négatif.

Les valeurs successives de x et de y ne dépendant que de deux valeurs précédentes, on a lieu de présumer que la suite de ces valeurs forme des séries récurrentes. C'est en effet ce qui arrive, comme nous allons le démontrer.

Soient E, F et G trois valeurs successives quelconques de x, et E′, F′ et G′ les trois valeurs correspondantes de y, obtenues par le secours des mêmes valeurs de m et de r. On a

$$E = f,\quad F = mf + rg,\quad \text{et}\quad G = (m^2 + ar^2)f + 2mrg;$$
$$E' = g,\quad F' = mg + arf,\quad \text{et}\quad G' = (m^2 + ar^2)g + 2amrf.$$

D'où l'on tire, en substituant $m^2 - 1$ à ar^2, et réduisant,

$$G = 2mF - E,\quad \text{et}\quad G' = 2mF' - E';$$

ou bien

$$E = 2mF - G,\quad \text{et}\quad E' = 2mF' - G'.$$

On conclut de là qu'un terme quelconque, tant dans la suite croissante que dans la suite décroissante, soit des valeurs de x, soit des valeurs de y, est toujours égal à celui qui le précède immédiatement multiplié par $2m$, moins le terme qui est avant ce dernier, caractère d'une série récurrente de l'une des espèces les plus simples. L'échelle de relation de cette série est

$$-1+2m-1,$$

ou plus généralement

$$-1+2mz-z^2;$$

z étant une quantité auxiliaire indéterminée qui peut être égale à l'unité [*].

Si A et B sont les deux premiers termes, et K et L les deux derniers termes d'une série des valeurs de x; que A′ et B′, K′ et L′ soient les mêmes termes de la série des valeurs correspondantes de y; que T et T′ soient les termes généraux ou $n^{\text{ièmes}}$ de chacune de ces séries; que S et S′ soient les sommes des séries entières, ou, ce qui revient au même, les fractions dont chacune d'elles dérive; enfin δ et δ' les sommes des n premiers termes de chacune de ces séries; on sait qu'alors on a

$$\delta = \frac{-(K+L)+2m(A+L)-(A+B)}{-1+2m-1} = \frac{m(A+L)}{m-1} - \frac{(A+B+K+L)}{2(m-1)},$$

et

$$\delta' = \frac{m(A'+L')}{m-1} - \frac{(A'+B'+K'+L')}{2(m-1)};$$

$$S = \frac{A-(2mA-B)z}{1-2mz+z^2} = \frac{(2m-1)A-B}{2(m-1)},$$

et

$$S' = \frac{A'-(2mA'-B')z}{1-2mz+z^2} = \frac{(2m-1)A'-B'}{2(m-1)}.$$

Mais on a

$$B = mA + rA', \quad \text{et} \quad B' = mA' + arA;$$

---

[*] *Voyez* EULER, *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, traduction de Labbey, in-4°, tome I, pages 47 et 168. — LACROIX, *Traité du Calcul différentiel et intégral*, in-4°, tome II.

on a donc aussi

$$S = \frac{A - (mA - rA')z}{1 - 2mz + z^2} = \frac{A}{2} - \frac{rA'}{2(m-1)},$$

et

$$S' = \frac{A' - (mA' - arA)z}{1 - 2mz + z^2} = \frac{A'}{2} - \frac{arA}{2(m-1)}.$$

Représentant par p et q les deux racines de l'équation

$$z^2 - 2mz + 1 = 0,$$

et par P et Q, P′ et Q′ des nombres tels qu'on ait

$$S = \frac{P}{p-z} + \frac{Q}{q-z}, \quad \text{et} \quad S' = \frac{P'}{p-z} + \frac{Q'}{q-z};$$

et faisant, pour abréger,

$$2mA - B = mA - rA' = l, \quad \text{et} \quad 2mA' - B' = -mA'arA = l',$$

on a

$$p = m + \sqrt{m^2 - 1} = m + r\sqrt{a},$$

et

$$q = m - \sqrt{m^2 - 1} = m - r\sqrt{a}, \quad pq = 1;$$

et de plus

$$P = \frac{-A + lp}{p-q} = \frac{l}{2} + \frac{lm - A}{2r\sqrt{a}},$$

et

$$Q = \frac{A - lq}{p-q} = \frac{l}{2} - \frac{lm - A}{2r\sqrt{a}};$$

$$P' = \frac{-A' + l'p}{p-q} = \frac{l'}{2} + \frac{l'm - A'}{2r\sqrt{a}},$$

et

$$Q' = \frac{A' - l'q}{p-q} = \frac{l'}{2} - \frac{l'm - A'}{2r\sqrt{a}}.$$

Mais on sait encore que

$$T = \left(\frac{P}{p^n} + \frac{Q}{q^n}\right) z^{n-1} = (Pq^n + Qp^n) z^{n-1} = \left[\frac{l}{2}(p^n + q^n) - \frac{lm - A}{2r\sqrt{a}}(p^n - q^n)\right] z^{n-1},$$

ou

$$T=\left[\frac{l}{2}\left(\overline{m+r\sqrt{a}}^{\,n}+\overline{m-r\sqrt{a}}^{\,n}\right)-\frac{lm-A}{2r\sqrt{a}}\left(\overline{m+r\sqrt{a}}^{\,n}-\overline{m-r\sqrt{a}}^{\,n}\right)\right]z^{n-1},$$

et que de même

$$T'=\left[\frac{l'}{2}\left(\overline{m+r\sqrt{a}}^{\,n}+\overline{m-r\sqrt{a}}^{\,n}\right)+\frac{l'm-A'}{2r\sqrt{a}}\left(\overline{m+r\sqrt{a}}^{\,n}-\overline{m-r\sqrt{a}}^{\,n}\right)\right]z^{n-1}.$$

Maintenant, si l'on développait les puissances $n^{\text{ièmes}}$ de $m+r\sqrt{a}$ et de $m-r\sqrt{a}$ suivant la formule du binôme, et que M, N, R, U, V, Y, etc., représentassent les coefficients de ce développement, on verrait que, dans le premier terme des valeurs de T et de T′, toutes les puissances impaires de $r\sqrt{a}$ disparaissent, tandis que, dans le second terme, ce sont au contraire toutes les puissances paires qui s'évanouissent. Mais, comme ce second terme se trouve divisé par $r\sqrt{a}$, il en résulte qu'en effectuant la division, il ne se trouve non plus composé que des puissances paires de $r\sqrt{a}$: par conséquent le facteur $\sqrt{a}$ en a disparu, et les valeurs précédentes deviennent

$$T=\begin{bmatrix} l\,(m^n+\mathrm{N}\,m^{n-2}\,r^2\,a+\mathrm{U}\,m^{n-4}\,r^4\,a^2+\mathrm{Y}\,m^{n-6}\,r^6\,a^3+\text{etc.}) \\ -(lm-\mathrm{A})(\mathrm{M}\,m^{n-1}+\mathrm{R}\,m^{n-3}\,r^2\,a+\mathrm{V}\,m^{n-5}\,r^4\,a^2+\text{etc.})\end{bmatrix}z^{n-1},$$

$$T'=\begin{bmatrix} l'\,(m^n+\mathrm{N}m^{n-2}\,r^2\,a+\mathrm{U}\,m^{n-4}\,r^4\,a^2+\mathrm{Y}\,m^{n-6}\,r^6\,a^3+\text{etc.}) \\ -(l'm-\mathrm{A}')(\mathrm{M}m^{n-1}+\mathrm{R}\,m^{n-3}\,r^2\,a+\mathrm{V}m^{n-5}\,r^4\,a^2+\text{etc.})\end{bmatrix}z^{n-1},$$

dans lesquelles on n'aperçoit plus aucune trace de quantité irrationnelle, ainsi que cela devait être.

Pour éclaircir ce qui précède par un exemple, on proposera le problème suivant :

« Trouver la suite des triangles rectangles en nombres entiers pre-
» miers entre eux, dont la différence des côtés est un nombre con-
» stant h. »

Soient x le plus petit côté, y le plus grand côté, et z l'hypoténuse ; on a

$$y=x+h,\quad \text{et}\quad z^2=2x^2+2xh+h^2,$$

ou en faisant

$$x = u - \frac{h}{2},$$

afin de faire évanouir le second terme,

$$z^2 = 2n^2 + \tfrac{1}{2} h^2;$$

équation de la forme dont il s'agit ici, et dans laquelle

$$a = 2n^2 \quad \text{et} \quad b = \tfrac{1}{2} h^2.$$

Or, pour cette valeur de a,

$$r = 2,\ 12,\ 70,\ 408,\ 2378, \ldots\ldots\ldots\ \text{etc.},$$
$$m = 3,\ 17,\ 99,\ 577,\ 3363, \ldots\ldots\ldots\ \text{etc.},$$

et l'échelle de relation des séries récurrentes que forment les valeurs successives de u et de z, s'obtient en substituant, dans l'expression

$$-1 + 2m - 1,$$

celle des valeurs de m dont on se propose de faire usage.

Si l'on veut maintenant donner une valeur numérique à h, on rappellera d'abord que dans tous triangles rectangles en nombres entiers, α et β étant des nombres entiers quelconques, les côtés sont exprimés par $\alpha^2 - \beta^2$ et $2\alpha\beta$, et l'hypoténuse par $\alpha^2 + \beta^2$ [*], et par conséquent que h ne peut être que de la forme

$$\alpha^2 - \beta(2\alpha + \beta), \quad \text{ou} \quad \beta(2\alpha + \beta) - \alpha^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\alpha(\alpha - \beta) - \beta(\alpha + \beta), \quad \text{et} \quad \beta(\alpha + \beta) - \alpha(\alpha - \beta).$$

Il en résulte que cette valeur n'est pas arbitraire, et qu'on ne peut avoir que

$$h = 1,\ 7,\ 17,\ 23,\ 31,\ 41,\ 47,\ 49,\ 71,\ 73,\ 79,$$
$$89,\ 97,\ 113,\ 119,\ 127,\ \text{etc.};$$

---

[*] EULER, *Analyse indéterminée*, chapitre IV, art. 44, page 55.

tout autre nombre attribué à h rendrait le problème impossible. Il est d'ailleurs évident que, pour que les nombres composant le triangle soient premiers entre eux, il faut que α et β n'aient aucun diviseur commun, et que l'un soit un nombre pair et l'autre un nombre impair; en outre, h étant toujours un nombre impair, u sera une fraction ayant 2 pour dénominateur.

Si donc on désire que la différence des côtés soit un *minimum*, on aura pour ce cas

$$h = 1, \quad z^2 = 2u^2 + \tfrac{1}{2}, \quad \text{et} \quad x = u - \tfrac{1}{2}, \quad \text{et} \quad y = u + \tfrac{1}{2},$$

et pour avoir tous les triangles dont les côtés diffèrent d'une unité, on prendra

$$r = 2 \quad \text{et} \quad m = 3.$$

Or on aperçoit facilement que, si l'on fait $u = \frac{1}{2}$ [*],

$$z = 1;$$

et on a alors

$$F = mE + rE' = 3E + 2E', \quad \text{et} \quad F' = mE' + raE = 3E' + 4E;$$

$$G = 2mF - E = 6F - E, \quad \text{et} \quad G' = 2mF' - E' = 6F' - E';$$

d'où l'on déduit les séries récurrentes

$$u = \frac{1}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{41}{2},\ \frac{239}{2},\ \frac{1393}{2},\ \frac{8119}{2},\ \frac{47321}{2},\ \text{etc.},$$

$$z = 1,\ 5,\ 29,\ 169,\ 985,\ 5741,\ 33461,\ \text{etc.},$$

de la première desquelles on tire

$$y = 1,\ 4,\ 21,\ 120,\ 697,\ 4060,\ 23661,\ \text{etc.},$$

$$x = 0,\ 3,\ 20,\ 119,\ 696,\ 4059,\ 23660,\ \text{etc.}$$

---

[*] Si, dans ce cas, on faisait $u = -\frac{1}{2}$, on obtiendrait les mêmes séries qu'en faisant $u = \frac{1}{2}$; mais on verra ci-après qu'il n'en est pas toujours de même.

Il est à remarquer que l'équation

$$z^2 = 2u^2 + \tfrac{1}{2}$$

fournit un moyen expéditif d'avoir la racine carrée approchée de 2 en fractions ordinaires. En effet, on en tire

$$\frac{z}{u} = \sqrt{2 + \frac{1}{2u^2}},$$

et plus u devient grand, plus la fraction $\frac{1}{2u^2}$ est petite, et plus $\frac{z}{u}$ approche d'être égal à $\sqrt{2}$, sans cependant cesser de lui être supérieur. Ainsi $\frac{66922}{47321}$ est plus grand, mais presque égal à $\sqrt{2}$. On obtient de la même manière la racine carrée approchée, en fractions ordinaires, de tous les nombres qui ne sont pas des carrés parfaits, car l'équation

$$z^2 = au^2 + 1$$

donne en général

$$\frac{z}{u} = \sqrt{a + \frac{1}{u^2}},$$

et $\frac{z}{u}$ approche beaucoup de $\sqrt{a}$ lorsque u représente un grand nombre. Si l'on voulait avoir, par exemple, la valeur de plus en plus approchée de $\sqrt{3}$, on ferait $a = 3$; alors on aurait

$$r = 1,\quad 4,\quad 15,\quad 56,\quad 209,\quad 780,\quad 2911,\quad \text{etc.},$$
$$m = 2,\quad 7,\quad 26,\quad 97,\quad 362,\quad 1351,\quad 5042,\quad \text{etc.}$$

On voit que si, dans l'équation

$$z^2 = 3u^2 + 1,$$

on fait $u = 1$, on aura $z = 2$, et que si l'on prend pour r et m les nombres 2911 et 5042, on aura les séries

$$u = 1,\quad 10864,\quad 109552615,\quad \text{etc.},$$
$$z = 2,\quad 18817,\quad 189750626,\quad \text{etc.},$$

qui donnent pour valeurs de plus en plus approchées de $\sqrt{3}$,

$$\frac{2}{1},\ \frac{18817}{10864},\ \frac{189750626}{109552615},\ \text{etc.}$$

Enfin, si l'on voulait avoir la suite des triangles rectangles irréductibles en nombres entiers dont la différence des côtés est 7, l'équation

$$z^2 = 2u^2 + \frac{h^2}{2}$$

deviendrait

$$z^2 = 2u^2 + \frac{49}{2},$$

et l'on a

$$y = u + \frac{7}{2}, \quad \text{et} \quad x = u - \frac{7}{2}; \quad r = 2, \quad \text{et} \quad m = 3.$$

Faisant $u = -\frac{1}{2}$, on trouve que $z = 5$, et l'on a

$$\left.\begin{array}{l} u = -\frac{1}{2},\ \frac{17}{2},\ \frac{103}{2},\ \frac{601}{2},\ \frac{3503}{2},\ \frac{20417}{2},\ \text{etc.}, \\ z = 5,\ 13,\ 73,\ 425,\ 2477,\ 14437,\ \text{etc.}, \end{array}\right\} \text{séries récurrentes.}$$
$$\begin{array}{l} y = 3,\ 12,\ 55,\ 304,\ 1755,\ 10212,\ \text{etc.} \\ x = -4,\ 5,\ 48,\ 297,\ 1748,\ 10205,\ \text{etc.} \end{array}$$

Mais si l'on avait fait $u = \frac{1}{2}$, on aurait trouvé que $z = 5$, et l'on aurait eu

$$\left.\begin{array}{l} u = \frac{1}{2},\ \frac{23}{2},\ \frac{137}{2},\ \frac{799}{2},\ \frac{4657}{2},\ \frac{27143}{2},\ \text{etc.}, \\ z = 5,\ 17,\ 97,\ 565,\ 3293,\ 19193,\ \text{etc.}, \end{array}\right\} \text{séries récurrentes.}$$
$$\begin{array}{l} y = 4,\ 15,\ 72,\ 403,\ 2332,\ 13575,\ \text{etc.}, \\ x = -3,\ 8,\ 65,\ 396,\ 2325,\ 13568,\ \text{etc.} \end{array}$$

En sorte que voilà une seconde suite de triangles, satisfaisant à la question, que la première suite trouvée n'aurait pas fait soupçonner; ce qui montre que plusieurs séries récurrentes indépendantes les unes des autres peuvent satisfaire aux questions de ce genre. Cet exemple montre encore que toutes les valeurs de u qui, prises positivement ou négativement, satisfont également à l'équation

$$z^2 = 2u^2 + \frac{h^2}{2},$$

produisent cependant le plus souvent des séries différentes.

On ajoutera ici quelques mots sur l'ordre à suivre dans la recherche des diverses solutions en nombres entiers, premiers entre eux, de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

qui donne tous les triangles rectangles possibles. On a vu plus haut que les nombres α et β, dont se composent x, y et z, doivent être l'un pair et l'autre impair, premiers entre eux, et tels qu'on ait toujours $\alpha > \beta$. Le côté impair est exprimé par

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta);$$

le côté pair par $2\alpha\beta$, et il est toujours divisible par 4; l'hypoténuse est exprimée par $\alpha^2 + \beta^2$, nombre toujours impair, et qui, étant divisé par 4, laisse constamment 1 pour reste. Ainsi, 1° si l'on prend successivement pour α la suite des nombres naturels en commençant par 2, et qu'on donne, pour chacun, à β toutes les valeurs possibles, on obtiendra de cette manière une première suite de tous les triangles rectangles; 2° si l'on prend successivement pour côté impair la suite des nombres impairs, on observera que ce côté, en y comprenant l'unité, est toujours divisible en deux facteurs au moins, et que, s'il contient un plus grand nombre de facteurs premiers, on pourra en former plus ou moins de diviseurs différents qui, pris deux à deux, donneront autant de valeurs différentes pour α et β : on obtiendra de cette manière une seconde suite de tous les triangles rectangles, rangés dans un autre ordre que dans la première; 3° si l'on prend successivement pour côté pair le double de chaque nombre pair, et qu'on recherche tous les facteurs premiers de chacun de ces nombres, on aura encore, en les combinant entre eux, les différentes valeurs de α et β, et avec leur secours, une troisième suite des mêmes triangles, rangés encore dans un autre ordre; 4° enfin si dans la progression arithmétique

$$1, \quad 5, \quad 9, \quad 13, \quad 17, \quad \text{etc.},$$

dont le premier terme est l'unité et la différence des termes 4, on prend les termes qui sont la somme de deux carrés, ces termes sont les hypoténuses des triangles cherchés, ils donnent les valeurs de α et β, et fournissent encore une quatrième suite des mêmes triangles, mais dans un ordre différent de ceux que présentent les trois premières suites. Cette dernière suite s'obtient avec un peu moins de facilité que les précédentes; cependant, si l'on retranche des termes de la progression ci-dessus les plus grands carrés contenus dans chacun d'eux, on découvre assez promptement ceux qui satisfont à la question.

Si un nombre x est le produit de plusieurs facteurs premiers

$$1, \ A, \ B, \ C, \ D, \ E, \ \text{etc.},$$

on aura généralement

$$x = 1 \times A^p \times B^q \times C^r \times D^s \times \text{etc.};$$

et si n est le nombre de ces facteurs, non compris l'unité, le nombre de diviseurs différents qu'aura le nombre x s'obtiendra en prenant ces facteurs seuls, puis en les combinant 2 à 2, puis 3 à 3, puis 4 à 4, et ainsi de suite, et le nombre de ses diviseurs sera

$$\frac{1}{2}\left[n + 1 + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{1\ 2\ldots(n-1)n}\right].$$

Ainsi lorsque n sera

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \text{etc.},$$

le nombre des diviseurs de x, et par conséquent des valeurs différentes de α et β, sera

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \quad 32, \quad 64, \quad \text{etc.}$$

Il en résulte que pour les côtés pairs au-dessous de

$$2 \times 2.3 = 12,$$

et pour les côtés impairs au-dessous de

$$3.5 = 15,$$

un même nombre ne saurait appartenir à plus d'un triangle; qu'au-dessous de

$$2 \times 2.3.5 = 60$$

pour les premiers, et de

$$3.5.7 = 105$$

pour les seconds, un même nombre ne saurait appartenir à plus de deux triangles; qu'au-dessous de

$$2 \times 2.3.5.7 = 420$$

pour les côtés pairs, et de

$$3.5.7.11 = 1155$$

pour les côtés impairs, un même nombre ne saurait appartenir à plus de quatre triangles différents; etc.

Si l'on cherchait, par exemple, les huit triangles rectangles qui peuvent avoir pour côté pair

$$2 \times 2.3.5.7 = 420,$$

on trouverait que ces triangles sont les suivants; $n = 4$:

α	β	$\alpha^2 - \beta^2$	$2\alpha\beta$	$\alpha^2 + \beta^2$
$3.5 = 15$	$2.7 = 14$	29	420	421
$3.7 = 21$	$2.5 = 10$	341	420	541
$2.3.5 = 30$	7	851	420	949
$5.7 = 35$	$2.3 = 6$	1189	420	1261
$2.3.7 = 42$	5	1739	420	1789
$2.5.7 = 70$	3	4891	420	4909
$3.5.7 = 105$	2	11021	420	11029
$2.3.5.7 = 210$	1	44099	420	44101

Tels sont les principes sur lesquels ont été formées les quatre séries de triangles suivantes :

PREMIÈRE SÉRIE.					DEUXIÈME SÉRIE.					TROISIÈME SÉRIE.					QUATRIÈME ET DERNIÈRE SÉRIE.				
α	β	$\alpha^2-\beta^2$	$2\alpha\beta$	$\alpha^2+\beta^2$	α	β	$\alpha^2-\beta^2$	$2\alpha\beta$	$\alpha^2+\beta^2$	α	β	$\alpha^2-\beta^2$	$2\alpha\beta$	$\alpha^2+\beta^2$	α	β	$\alpha^2-\beta^2$	$2\alpha\beta$	$\alpha^2+\beta^2$
2	1	3	4	5	2	1	3	4	5	2	1	3	4	5	2	1	3	4	5
3	2	5	12	13	3	2	5	12	13	4	1	15	8	17	3	2	5	12	13
4	1	15	8	17	4	3	7	24	25	3	2	5	12	13	4	1	15	8	17
4	3	7	24	25	5	4	9	40	41	6	1	35	12	37	4	3	7	24	25
5	2	21	20	29	6	5	11	60	61	8	1	63	16	65	5	2	21	20	29
5	4	9	40	41	7	6	13	84	85	5	2	21	20	29	6	1	35	12	37
6	1	35	12	37	8	7	15	112	113	10	1	99	20	101	5	4	9	40	41
6	5	11	60	61	4	1	15	8	17	4	3	7	24	25	7	2	45	28	53
7	2	45	28	53	9	8	17	144	145	12	1	143	24	145	6	5	11	60	61
7	4	33	56	65	10	9	19	180	181	7	2	45	28	53	7	4	33	56	65
7	6	13	84	85	11	10	21	220	221	14	1	195	28	197	8	1	63	16	65
8	1	63	16	65	5	2	21	20	29	16	1	255	32	257	8	3	55	48	73
8	3	55	48	73	12	11	23	264	265	9	2	77	36	85	7	6	13	84	85
8	5	39	80	89	13	12	25	312	313	18	1	323	36	325	9	2	77	36	85
8	7	15	112	113	14	13	27	364	365	5	4	9	40	41	8	5	39	80	89
9	2	77	36	85	15	14	29	420	421	20	1	399	40	401	9	4	65	72	97
9	4	65	72	97	16	15	31	480	481	11	2	117	44	125	10	1	99	20	101
9	8	17	144	145	17	16	33	544	545	22	1	483	44	485	10	3	91	60	109
10	1	99	20	101	7	4	33	56	65	8	3	55	48	73	8	7	15	112	113
10	3	91	60	109	18	17	35	612	613	24	1	575	48	577	11	2	117	44	125
10	7	51	140	149	6	1	35	12	37	13	2	165	52	173	11	4	105	88	137.
10	9	19	180	181	19	18	37	684	685	26	1	675	52	677	9	8	17	144	145
11	2	117	44	125	20	19	39	760	761	7	4	33	56	65	12	1	143	24	145
11	4	105	88	137	8	5	39	80	89	28	1	783	56	785	10	7	51	140	149
11	6	85	132	157	21	20	41	840	841	6	5	11	60	61	11	6	85	132	157
11	8	57	176	185	22	21	43	924	925	10	3	91	60	109	12	5	119	130	169
11	10	21	220	221	23	22	45	1012	1013	15	2	221	60	229	13	2	165	52	173
12	1	143	24	145	7	2	45	28	53	30	1	899	60	901	10	9	19	180	181
12	5	119	120	169	24	23	47	1104	1105	32	1	1023	64	1025	11	8	57	176	185
12	7	95	168	193	25	24	49	1200	1201	17	2	285	68	293	13	4	153	104	185
12	11	23	264	265	26	25	51	1300	1301	34	1	1155	68	1157	12	7	95	168	193
13	2	165	52	173	10	7	51	140	149	9	4	65	72	97	14	1	195	28	197
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.