JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Démonstration d'un théorème de M. Biot sur les réfractions astronomiques près de l'horizon

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 268-271.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__268_0>

DÉMONSTRATION

D'UN THÉORÈME DE M. BIOT

SUR

LES RÉFRACTIONS ASTRONOMIQUES PRÈS DE L'HORIZON;

PAR J. LIOUVILLE [*].

Deux molécules lumineuses partent d'un même point O de l'atmosphère terrestre; l'une est lancée dans la direction OA horizontale, l'autre dans la direction OB qui fait avec l'horizon un angle infiniment petit β. Il faut examiner les effets différents que produiront sur ces deux molécules les couches successives de l'atmosphère, dont on suppose la puissance réfractive variable suivant une fonction quelconque de la distance au centre C de la Terre.

La vitesse d'une molécule lumineuse dans un milieu donné ne dépend que de la nature de ce milieu. Les vitesses de nos deux molécules au point O sont donc égales. Les composantes de ces deux vitesses estimées perpendiculairement au rayon CO sont par suite, entre elles, dans le rapport de 1 à $\cos\beta$; et d'après le principe des aires, ce même rapport subsistera entre les composantes v, v' perpendiculaires aux rayons CM, CN, menés du centre C aux positions M, N, que nos deux molécules occuperont plus tard dans une même couche sphérique quelconque MN. Ainsi l'on aura toujours $v'=v\cos\beta$; ce qui, en négligeant les infiniment petits du second ordre, donne $v'=v$.

Quant aux composantes u, u' des vitesses dans le sens des rayons

[*] Le Mémoire de M. Biot fait partie des Additions à la *Connaissance des Temps* pour l'année 1839.

vecteurs CM, CN, elles devront (les vitesses absolues étant les mêmes de part et d'autre) satisfaire à la relation

$$v^2 + u^2 = v'^2 + u'^2 \quad \text{ou} \quad (u' + u)(u' - u) = v^2 \sin^2\beta,$$

en sorte que le produit $(u' + u)(u' - u)$ doit être un infiniment petit du second ordre. Cette condition est remplie d'elle-même au point O, puisqu'en ce point la composante u est nulle et la composante u' infiniment petite. Mais dans toute couche MN située à une distance finie du point O et coupée sous un angle fini par nos trajectoires lumineuses, u et u' auront des valeurs finies. Il faudra donc que la différence $u' - u$ soit infiniment petite du second ordre, ou que l'on ait $u' = u$ en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier.

En négligeant le carré de β, on a donc à la fois $u' = u$, $v' = v$, dans toute couche située à une distance finie du point O. Ainsi, à partir d'une certaine limite finie, nos deux molécules seront animées de vitesses égales, tant dans le sens du rayon que dans le sens perpendiculaire. Les déviations seront dès lors les mêmes de part et d'autre. L'inégalité de réfraction qui a lieu dans les deux trajectoires ne peut donc dépendre que de l'action des couches très-voisines du point O. C'est le théorème de M. Biot. On voit clairement ici, ce me semble, quelle en est l'origine physique, et pourquoi il se trouverait en défaut dans des atmosphères qui seraient douées d'une constitution exceptionnelle et où les trajectoires lumineuses dont nous avons parlé pourraient ne pas couper sous un angle fini des couches telles que MN situées à une distance finie du point O.

Quant à la mesure de l'effet produit par les couches très-voisines du point O, elle dépend d'une formule simple que M. Biot a donnée aussi, et qu'on peut retrouver par la méthode suivante.

Considérons la trajectoire d'une molécule lumineuse quelconque, ou plutôt la partie de cette trajectoire qui est comprise entre une couche sphérique de rayon r et la couche extrême de rayon a où se termine l'atmosphère. Soient r' une variable qui peut croître depuis r jusqu'à a, i l'indice de réfraction pour la couche de rayon r, i' l'indice analogue pour la couche de rayon r', et θ le complément de l'angle sous lequel la trajectoire lumineuse à son origine coupe la couche de rayon r. La partie R de la réfraction qui répond à l'espace compris entre les rayons r et a sera exprimée par la formule

$$\mathrm{R} = ir\sin\theta \int_a^r \frac{\frac{di'}{dr'}\,dr'}{i'\sqrt{i'^2 r'^2 - i^2 r^2 \sin^2\theta}},$$

laquelle résulte immédiatement de la théorie ordinaire et bien connue des réfractions. Je ne m'arrêterai pas à démontrer cette formule. On la déduira, si l'on veut, de celle que Laplace a donnée dans la *Mécanique céleste;* il suffira d'avoir égard à la différence des notations.

Si l'on considère r et θ comme des variables indépendantes, R sera une fonction de ces deux variables, et en différentiant sous ce point de vue, on obtiendra aisément une équation assez remarquable que les deux dérivées partielles de R doivent vérifier.

En effet, si l'on différentie par rapport à r, et si l'on se rappelle que i est fonction de r, on a d'abord

$$\frac{d\mathrm{R}}{dr} = \frac{\mathrm{R}}{ir}\cdot\frac{d.ir}{dr} + \frac{\sin\theta}{i\cos\theta}\cdot\frac{di}{dr}$$
$$+\ i^2 r^2 \sin^3\theta . \frac{d.ir}{dr} . \int_a^r \frac{\frac{di'}{dr'}\,dr'}{i'(i'^2 r'^2 - i^2 r^2 \sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}};$$

en différentiant par rapport à θ, on trouve d'autre part

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\theta} = \frac{\mathrm{R}\cos\theta}{\sin\theta} + i^3 r^3 \sin^2\theta\cos\theta \int_a^r \frac{\frac{di'}{dr'}\,dr'}{i'(i'^2 r'^2 - i^2 r^2 \sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'intégrale étant la même dans ces deux formules, on peut l'éliminer. Il vient ainsi

$$ir\cos\theta\,\frac{d\mathrm{R}}{dr} = \sin\theta\,\frac{d.ir}{dr}.\frac{d\mathrm{R}}{d\theta} + r\sin\theta\,\frac{di}{dr}.$$

C'est l'équation aux différences partielles dont nous parlions tout à l'heure.

Si l'on suppose l'angle θ droit, $\cos\theta \frac{dR}{dr}$ s'évanouira en général, et l'on aura

$$\frac{dR}{d\theta} = -\frac{rdi}{d(ir)},$$

formule équivalente à celle de M. Biot, et d'où l'on tire

$$\frac{dR}{d\theta}\, d\theta = -\frac{rdi}{d(ir)}\, d\theta.$$

Le premier membre de cette dernière équation exprime la quantité dont la réfraction varie lorsqu'un observateur placé dans la couche de rayon r passe d'une direction horizontale à une direction infiniment peu inclinée sur l'horizon; et nous voyons par la composition du second membre que cette quantité dépend uniquement de l'indice de réfraction i qui répond à la couche de rayon r et de la dérivée $\frac{di}{dr}$ de cet indice. Nous voilà donc de nouveau conduits à reconnaître que les couches supérieures de l'atmosphère n'ont ici aucune influence; mais de plus nous mesurons d'une manière très-simple l'effet produit par les couches inférieures.