JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CATALAN

Note sur la sommation de quelques séries

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 1-12.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__1_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

NOTE
SUR LA SOMMATION DE QUELQUES SÉRIES;

PAR E. CATALAN.

I.

Si l'on donne aux entiers m et n toutes les valeurs possibles, différentes de l'unité, on aura

$$\sum \frac{1}{m^n - 1} = 1; \tag{1}$$

*pourvu que dans cette somme, on ne compte qu'*une seule fois *une même fraction résultant de deux ou plusieurs systèmes de valeurs attribuées à m et n* [*].

Ce théorème curieux est dû à Goldbach. Dans les *Commentaires de Pétersbourg*, pour l'année 1737, Euler le démontre à l'aide de la série divergente $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ On peut éviter l'emploi de cette série, et établir la démonstration d'une manière plus rigoureuse, comme il suit.

[*] Par exemple, la fraction

$$\frac{1}{4095} = \frac{1}{2^{12}-1} = \frac{1}{4^6-1} = \frac{1}{8^4-1} = \frac{1}{16^3-1} = \frac{1}{64^2-1}$$

ne doit être comptée qu'une seule fois dans la somme.

Représentons par p un quelconque des nombres 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32,...; nous aurons à démontrer l'équation

$$(2)\qquad \sum \frac{1}{p-1} = 1.$$

Soit r la plus petite racine de p; soit n l'indice de cette racine [*]. Le théorème énoncé reviendra à celui-ci :

$$(3)\qquad \sum \frac{1}{r^n-1} = 1.$$

En faisant $n = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$, nous aurons

$$\sum \frac{1}{r^n-1} = \sum \frac{1}{r^2-1} + \sum \frac{1}{r^3-1} + \sum \frac{1}{r^4-1} + \ldots$$

Or,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum \frac{1}{r^2-1} = \sum \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^6} + \ldots\right),\\ &\sum \frac{1}{r^3-1} = \sum \left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^6} + \frac{1}{r^9} + \ldots\right),\\ &\sum \frac{1}{r^4-1} = \sum \left(\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^8} + \frac{1}{r^{12}} + \ldots\right),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Ajoutant les termes placés dans une même colonne verticale, j'obtiens

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \sum \frac{1}{r^n-1} = &\sum \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \ldots\right)\\ &+ \sum \left(\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^6} + \frac{1}{r^8} + \ldots\right)\\ &+ \sum \left(\frac{1}{r^6} + \frac{1}{r^9} + \frac{1}{r^{12}} + \ldots\right)\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}\right.$$

ou bien, en sommant chaque progression,

$$(6)\qquad \sum \frac{1}{r^n-1} = \sum \frac{1}{r(r-1)} + \sum \frac{1}{r^2(r^2-1)} + \sum \frac{1}{r^3(r^3-1)} + \ldots$$

[*] Dans tout le cours de cette Note, nous continuerons à représenter par p un *nombre-puissance*, par r un nombre *non-puissance*, et par m ou n des nombres entiers quelconques, différents de l'unité.

Les termes qui entrent dans une quelconque de ces sommes sont essentiellement différents de ceux qui entrent dans toutes les autres, puisque r n'est pas une puissance; donc on reproduira tous ces termes si l'on prend la seule quantité $\frac{1}{m(m-1)}$, et qu'on attribue à m toutes les valeurs entières possibles, différentes de l'unité. Par suite.

$$(7) \qquad \sum \frac{1}{r^n-1} = \sum \frac{1}{m(m-1)}.$$

Mais on a, par une formule connue, qu'il est aisé de démontrer,

$$\sum \frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots = 1;$$

donc enfin

$$\sum \frac{1}{p-1} = 1.$$

II.

Reprenons l'équation (5),

$$\begin{aligned}\sum \frac{1}{r^n-1} = &\sum\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^6} + \ldots\right)\\ &+ \sum\left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^6} + \frac{1}{r^9} + \ldots\right)\\ &+ \sum\left(\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^8} + \frac{1}{r^{12}} + \ldots\right)\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{aligned}$$

et groupons les termes semblables; nous aurons

$$(8) \qquad \sum \frac{1}{r^n-1} = \sum\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{2}{r^4} + \frac{1}{r^5} + \frac{3}{r^6} + \frac{1}{r^7} + \frac{3}{r^8} + \ldots\right).$$

Il est facile de voir que le numérateur de chaque fraction est égal au nombre des diviseurs de l'exposant correspondant, autres que l'unité.

Ainsi, en appelant i le nombre des diviseurs de n,

$$(9) \qquad \sum \frac{i-1}{r^n} = 1.$$

III.

L'équation (5) peut encore se mettre sous la forme

$$(10)\qquad \sum \frac{1}{r^n - 1} = \sum \frac{1}{m^2} + \sum \frac{1}{m^3} + \sum \frac{1}{m^4} + \sum \frac{1}{m^5} + \ldots$$

On sait que la somme des puissances — n des nombres naturels, différents de l'unité, est toujours une quantité transcendante. L'équation précédente montre que si l'on fait varier n de 2 à l'infini, et qu'on ajoute toutes ces sommes, on obtient pour résultat l'unité. Cette remarque avait, je crois, été faite.

IV.

Problème. *On demande de déterminer* $\sum \frac{n-1}{r^n - 1}$.

En faisant successivement $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, nous aurons d'abord

$$(11)\qquad \sum \frac{n-1}{r^n - 1} = \sum \frac{1}{r^2 - 1} + \sum \frac{2}{r^3 - 1} + \sum \frac{3}{r^4 - 1} + \ldots;$$

ensuite

$$\sum \frac{1}{r^2 - 1} = \sum \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^6} + \ldots\right),$$
$$\sum \frac{2}{r^3 - 1} = \sum \left(\frac{2}{r^3} + \frac{2}{r^6} + \frac{2}{r^9} + \ldots\right),$$
$$\sum \frac{3}{r^4 - 1} = \sum \left(\frac{3}{r^4} + \frac{3}{r^8} + \frac{3}{r^{12}} + \ldots\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc, en ajoutant les termes placés verticalement,

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \sum \frac{n-1}{r^n - 1} = {} & \sum \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{r^3} + \frac{3}{r^4} + \ldots\right) \\ & + \sum \left(\frac{1}{r^4} + \frac{2}{r^6} + \frac{3}{r^8} + \ldots\right) \\ & + \sum \left(\frac{1}{r^6} + \frac{2}{r^9} + \frac{3}{r^{12}} + \ldots\right) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Ici, comme dans le § I, on peut réduire toutes ces sommes à une seule, et écrire

$$(13) \qquad \sum \frac{n-1}{r^n-1} = \sum \left(\frac{1}{m^2} + \frac{2}{m^3} + \frac{3}{m^4} + \frac{4}{m^5} + \ldots \right).$$

Posons

$$S = \frac{1}{m^2} + \frac{2}{m^3} + \frac{3}{m^4} \ldots;$$

nous aurons, en multipliant par $\frac{1}{m}$ et retranchant :

$$S\left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^4} + \ldots = \frac{1}{m(m-1)}.$$

Cette équation donne

$$S = \frac{1}{(m-1)^2}.$$

Par suite,

$$\sum \frac{n-1}{r^n-1} = \sum \frac{1}{(m-1)^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots$$

La somme des carrés des inverses des nombres naturels est égale à $\frac{\pi^2}{6}$; donc aussi

$$(14) \qquad \sum \frac{n-1}{r^n-1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

V.

Problème. *On demande de déterminer* $\sum \frac{1}{r^{2n}-1}$.

Un raisonnement identique avec celui du § I conduit à

$$(15) \qquad \sum \frac{1}{r^{2n}-1} = \sum \frac{1}{m^2(m^2-1)}.$$

Or,

$$\frac{1}{m^2(m^2-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1}\right) - \frac{1}{m^2};$$

donc

$$\sum \frac{1}{r^{2n}-1} = \frac{1}{2} \sum \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1}\right) - \sum \frac{1}{m^2}.$$

Mais

$$\sum\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots=\frac{3}{2};$$

$$\sum\frac{1}{m^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}-1.$$

Par la substitution de ces valeurs, l'équation (15) devient

$$(16)\qquad \sum\frac{1}{r^{2n}-1}=\frac{7}{4}-\frac{\pi^2}{6}=\text{environ } 0,105066.$$

Ce résultat se trouve démontré d'une autre manière dans le Mémoire d'Euler.

Remarquons, en passant, l'équation

$$(17)\qquad \sum\frac{1}{m^2-1}=\frac{3}{4}.$$

VI.

PROBLÈME. *Déterminer* $\sum\frac{n-1}{r^{2n}-1}$.

Le problème du § IV donne, par le changement de m en m^2 :

$$(18)\qquad \sum\frac{n-1}{r^{2n}-1}=\sum\frac{1}{(m^2-1)^2}.$$

On a

$$\frac{1}{(m^2-1)^2}=\frac{1}{4(m+1)^2}+\frac{1}{4(m-1)^2}-\frac{1}{2(m^2-1)};$$

donc

$$\sum\frac{n-1}{r^{2n}-1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots\right)-\frac{3}{8}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{8},$$

ou

$$(19)\qquad \sum\frac{n-1}{r^{2n}-1}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{11}{16}=\text{environ } 0,134967.$$

Si, au double du premier membre, nous ajoutons $\sum\frac{1}{r^{2n}-1}$, nous obtiendrons, par l'équation (16),

$$(20) \qquad \sum \frac{2n-1}{r^{2n}-1} = \frac{3}{8}.$$

Ainsi,

$$\frac{3}{15} + \frac{5}{63} + \frac{3}{80} + \frac{7}{255} + \frac{3}{624} + \frac{5}{728} + \ldots = \frac{3}{8}.$$

Nous avons trouvé, plus haut,

$$\sum \frac{n-1}{r^n-1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

En combinant cette équation avec l'équation (20), nous obtiendrons

$$\sum\left(\frac{1}{r^2-1} + \frac{2}{r^3-1} + \frac{3}{r^4-1} + \ldots\right) - 2\sum\left(\frac{3}{r^4-1} + \frac{5}{r^6-1} + \frac{7}{r^8-1} + \ldots\right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{4},$$

ou

$$(21) \qquad \sum\left(\frac{1}{r^2-1} + \frac{2}{r^3-1} - \frac{3}{r^4-1} + \frac{4}{r^5-1} - \frac{5}{r^6-1} + \ldots\right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{4}.$$

Dans la parenthèse, tous les termes, à partir du second, sont alternativement positifs et négatifs. Pour obtenir une formule plus symétrique, retranchons les deux membres de $2\sum \frac{1}{r^2-1}$, il viendra

$$\sum\left(\frac{1}{r^2-1} - \frac{2}{r^3-1} + \frac{3}{r^4-1} - \frac{4}{r^5-1} + \ldots\right) = 2\sum \frac{1}{r^2-1} + \frac{3}{4} - \frac{\pi^2}{6}.$$

On a évidemment

$$\sum \frac{1}{r^2-1} = \sum \frac{1}{m^2-1} - \sum \frac{1}{p^2-1};$$

ou, par la formule (17),

$$\sum \frac{1}{r^2-1} = \frac{3}{4} - \sum \frac{1}{p^2-1}.$$

Mais, p étant une puissance, son carré est égal à une puissance de degré pair, d'un nombre *non-puissance;* donc

$$\sum \frac{1}{p^2 - 1} = \sum \frac{1}{r^{2n} - 1}.$$

Ainsi, d'une part,

$$(22) \qquad \sum \frac{1}{r^2 - 1} = \frac{\pi^2}{6} - 1,$$

à cause de la formule (16); et ensuite

$$(23) \qquad \sum \left(\frac{1}{r^2 - 1} - \frac{2}{r^3 - 1} + \frac{3}{r^4 - 1} - \frac{4}{r^5 - 1} + \ldots \right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$$
$$= \text{environ } 0{,}394934.$$

Enfin, de $\frac{1}{r^{2n} - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^n - 1} - \frac{1}{r^n + 1} \right)$ on déduit, par les équations (1) et (16),

$$(24) \qquad \sum \frac{1}{r^n + 1} = \frac{\pi^2}{3} - \frac{5}{2} = \text{environ } 0{,}739\,868.$$

VII.

Le théorème de Goldbach consiste, comme nous avons vu, en ce que $\sum \frac{1}{r^n - 1} = 1$. Essayons d'évaluer $\sum \frac{1}{m^n - 1}$, chaque fraction étant prise autant de fois qu'elle se présente.

Observons que $\frac{1}{p^N - 1}$ peut se mettre sous la forme $\frac{1}{r^n - 1}$, n étant un multiple de N. Donc si r et n sont des nombres déterminés, il y aura, dans notre série, autant de fractions équivalentes à $\frac{1}{r^n - 1}$ que n admet de diviseurs différents de 1. Nous aurons donc

$$(25) \qquad \sum \frac{1}{m^n - 1} = \sum \frac{i - 1}{r^n - 1},$$

i étant le nombre des diviseurs de n.

Comme nous ne pouvons exprimer sous forme finie la somme qui se trouve dans le second membre, il est important d'obtenir une quantité plus grande que cette somme. Or, on a toujours $i < n$; donc

$$\sum \frac{i - 1}{r^n - 1} < \sum \frac{n - 1}{r^n - 1}.$$

Cette dernière somme a été trouvée égale à $\frac{\pi^2}{6}$; donc

$$(26)\qquad \sum \frac{i-1}{r^n-1} < 1{,}644\,934\ldots.$$

Ainsi la somme des fractions de la forme $\frac{1}{m^n-1}$ étant 1 quand on ne compte qu'une fois chacune d'elles, n'est pas augmentée de 0,645 par le fait de la reproduction de ces fractions. Nous trouverons, dans le paragraphe suivant, une limite supérieure plus approchée. On peut, du reste, transformer la série des fractions de manière à la rendre beaucoup plus convergente. En effet, l'identité

$$\frac{1}{r^n-1} - \frac{1}{r^n} = \frac{1}{(r^n-1)r^n}$$

donne

$$\sum \frac{i-1}{r^n-1} = \sum \frac{i-1}{r^n} + \sum \frac{i-1}{(r^n-1)r^n};$$

c'est-à-dire, à cause de la formule (9),

$$(27)\qquad \sum \frac{i-1}{r^n-1} = 1 + \sum \frac{i-1}{(r^n-1)r^n}.$$

Nous aurons ainsi

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} \sum \frac{1}{m^n-1} = 1 &+ \frac{1}{3.4} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \frac{2}{15.16} + \\ &+ \frac{1}{24.25} + \frac{1}{26.27} + \frac{1}{31.32} + \frac{1}{35.36} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

VIII.

Problème. *Calculer* $\sum \frac{n-1}{(r^n-1)r^n}$.

De $\frac{1}{(r^n-1)r^n} = \frac{1}{r^n-1} - \frac{1}{r^n}$ on conclut

$$\sum \frac{n-1}{(r^n-1)r^n} = \sum \frac{n-1}{r^n-1} - \sum \frac{n-1}{r^n}.$$

Nous avons trouvé, (14), $\sum \frac{n-1}{r^n-1} = \frac{\pi^2}{6}$. En outre, si l'on remplace m

par r dans la valeur de S du § IV, on aura

$$\sum \frac{n-1}{r^n} = \sum \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{r^3} + \frac{3}{r^4} + \ldots\right) = \sum \frac{1}{(r-1)^2};$$

donc

$$\sum \frac{n-1}{(r^n-1)\,r^n} = \frac{\pi^2}{6} - \sum \frac{1}{(r-1)^2}. \tag{29}$$

Ainsi la sommation proposée est ramenée à la recherche de $\sum \frac{1}{(r-1)^2}$. Nous pouvons encore simplifier la formule (29); car on a évidemment

$$\sum \frac{1}{(r-1)^2} = \sum \frac{1}{(m-1)^2} - \sum \frac{1}{(p-1)^2};$$

d'où, à cause de $\sum \frac{1}{(m-1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$,

$$\sum \frac{n-1}{(r^n-1)\,r^n} = \sum \frac{1}{(p-1)^2}. \tag{30}$$

Il résulte de cette dernière formule, que les deux séries

$$\frac{1}{3.4} + \frac{2}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \frac{3}{15.16} + \frac{1}{24.25} + \frac{2}{26.17} + \frac{4}{31.32} + \frac{1}{35.36} + \frac{1}{48.49} + \frac{5}{63.64} + \ldots,$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{15}\right)^2 + \left(\frac{1}{24}\right)^2 + \left(\frac{1}{26}\right)^2 + \left(\frac{1}{31}\right)^2 + \left(\frac{1}{35}\right)^2 + \left(\frac{1}{48}\right)^2 + \left(\frac{1}{63}\right)^2 + \ldots,$$

ont la même limite.

En réduisant en décimales les douze premiers termes de chaque série, on trouve, pour la première somme,

$$0{,}15643\ldots,$$

et pour la seconde

$$0{,}15714\ldots.$$

Le second résultat est plus grand que le premier, parce que les dénominateurs des secondes fractions sont moindres que ceux des fractions correspondantes; mais plus tard, les nombres de diviseurs devenant de plus en plus considérables, les termes de la première série seront, en partie, plus grands que ceux qui leur correspondent dans la seconde, ce qui établira la compensation.

Revenons actuellement à l'équation (27). Comme i est nécessairement moindre que n, on a

$$\sum \frac{i-1}{(r^n-1)r^n} < \sum \frac{n-1}{(r^n-1)r^n};$$

donc

$$\sum \frac{i-1}{r^n-1} < 1 + \sum \frac{n-1}{(r^n-1)r^n};$$

et en mettant pour cette dernière somme la valeur ci-dessus,

$$(31) \qquad \sum \frac{i-1}{r^n-1} < 1,15714\ldots$$

On voit donc que la somme des fractions $\frac{1}{m^n-1}$ est moindre que 1,15714. Ainsi que nous l'avons annoncé, cette limite supérieure est plus basse que celle qui a été donnée ci-dessus (26).

Les treize premiers termes de la série (28), étant réduits en décimales, donnent

$$(32) \qquad \sum \frac{1}{m^n-1} > 1,11947\ldots$$

Je crois pouvoir affirmer que cette valeur est approchée à moins de 0,01. Par conséquent,

$$(33) \qquad \sum \frac{1}{m^n-1} = \text{environ } 1,12.$$

IX.

Parmi les théorèmes contenus dans le Mémoire d'Euler, nous remarquerons encore celui-ci :

a étant un nombre pair quelconque, et n un entier plus grand que l'unité; la somme des fractions de la forme $\frac{1}{a^n-1}$ *est égale au loga-*

rithme népérien de 2, si l'on ne compte qu'une seule fois chaque fraction qui se reproduit.

Euler démontre ce théorème, aussi bien que le premier, en employant la série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

Pour déterminer $\sum \frac{1}{a^n - 1}$, cherchons $\sum \frac{1}{b^n - 1}$, b étant un nombre impair quelconque, différent de 1.

En appliquant encore la méthode de démonstration du premier paragraphe, nous trouverons

$$\sum \frac{1}{b^n - 1} = \sum \frac{1}{b(b-1)} = \sum \left(\frac{1}{b-1} - \frac{1}{b} \right);$$

donc

$$\sum \frac{1}{b^n - 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots \tag{34}$$

Mais on a, d'une part,

$$l(1+1) = l(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots;$$

et d'autre part,

$$\sum \frac{1}{a^n - 1} + \sum \frac{1}{b^n - 1} = \sum \frac{1}{r^n - 1} = 1;$$

d'où, en substituant,

$$\sum \frac{1}{a^n - 1} = l.2. \tag{35}$$

Les équations (14), (19), (22), (23), (24), (30), (33) expriment des théorèmes assez curieux. Ceux du § VIII exigeraient, pour être plus précis, que l'on pût trouver $\sum \frac{1}{(p-1)^2}$ sous forme finie. J'ignore si cette question a été résolue.