JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur l'ellipse de plus petite surface qui passe par trois points A, B, C, et sur l'ellipsoïde de plus petit volume qui passe par quatre point A, B, C, D

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 190-191.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__190_0>

gallica NUMDAM

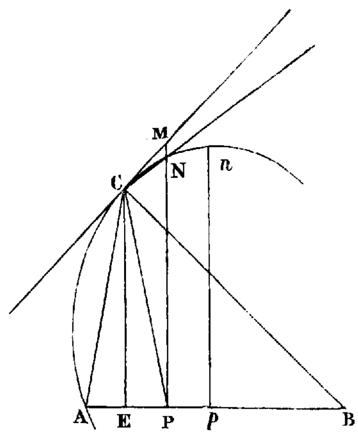
Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur l'ellipse de plus petite surface qui passe par trois points A, B, C, *et sur l'ellipsoïde de plus petit volume qui passe par quatre points* A, B, C, D;

PAR J. LIOUVILLE.

Je dis que la tangente au point C de l'ellipse dont il s'agit est parallèle à AB. Supposons, en effet, que le contraire ait lieu et que la tangente CM soit placée comme l'indique la figure. Menons CE perpendi-



culaire sur AB. L'angle MCE étant obtus, si l'on prend parallèlement à CE une droite MNP très-voisine de CE et qu'on tire la corde CN, on pourra faire en sorte que l'angle NCP soit aussi obtus. On aura dès lors CP $<$ NP. Cela posé, inclinons toutes les ordonnées (NP, np, etc.) de l'ellipse, actuellement perpendiculaires à AB, en les faisant tourner autour de leurs pieds (P, p, etc.) de manière à les rendre parallèles à la droite CP; en même temps, diminuons-les dans le rapport constant de

CP à NP. L'ancienne ellipse se transformera ainsi dans une autre ellipse passant encore par les points A, B et aussi par le point C, où se transportera le point N de l'ellipse primitive. Or l'aire de la nouvelle ellipse est plus petite que celle de l'ancienne; en inclinant les ordonnées on change, en effet, les rectangles infinitésimaux dont se compose l'aire primitive, en parallélogrammes dont la base est la même et la hauteur moindre dans le rapport du sinus de l'angle CPA à l'unité; en diminuant ensuite les ordonnées, on diminue également les parallélogrammes dont il s'agit. La nouvelle ellipse ayant ainsi une aire moindre que l'ancienne, celle-ci n'était pas la plus petite possible. Donc, etc.

La tangente à l'ellipse *minimum* en chacun des sommets du triangle ABC étant, d'après ce qu'on vient de voir, parallèle à la corde qui forme le côté opposé, le centre de cette ellipse doit se trouver à la fois sur les trois droites qui joignent les sommets dont il s'agit aux milieux des côtés opposés. En d'autres termes, il doit coïncider avec le centre de gravité du triangle ABC.

Ces résultats s'accordent avec ceux qu'Euler a déduits de l'analyse dans les *Mémoires de Saint-Pétersbourg*, et que d'autres auteurs ont ensuite obtenus par différents moyens. La méthode que nous avons suivie pourrait servir à résoudre des problèmes analogues pour certaines courbes de degré supérieur. Il est clair aussi qu'elle s'étend à la détermination de l'ellipsoïde *minimum* passant par quatre points donnés. Les plans tangents à cet ellipsoïde aux quatre sommets du tétraèdre ABCD doivent être parallèles aux faces opposées; son centre doit par suite coïncider avec le centre de gravité du tétraèdre.