JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

COSTE

Note sur le nombre des points multiples des courbes algébriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 184-189.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__184_0>

NOTE

SUR LE NOMBRE DES POINTS MULTIPLES

DES COURBES ALGÉBRIQUES;

PAR M. COSTE,

Capitaine d'Artillerie.

Dans cette Note, nous ne parlons que des points doubles et des points multiples des courbes algébriques; nous ne nous proposons pas de traiter à fond cette question, nous voulons seulement montrer quelques erreurs dans lesquelles peut conduire un certain genre de démonstration employé quelquefois dans l'étude des courbes.

Nous prendrons notre exemple dans l'*Introduction à l'Analyse des lignes courbes*, par Gabriel Cramer (Genève, 1750), ouvrage qui mérite à juste titre l'estime des géomètres; et c'est aussi, à cause de ce mérite, qu'il est nécessaire de relever le petit nombre d'erreurs qui peuvent s'y être glissées.

« De ce qu'une droite ne peut couper une courbe de $\nu^{ième}$ degré » en plus de ν points, il s'ensuit (suivant Cramer) qu'une courbe du » troisième ordre n'a qu'un point double, qu'une courbe de l'ordre » ν n'a qu'un point multiple de l'ordre $\nu - 1$. Il s'ensuit qu'une » courbe de l'ordre $2\nu - 1$ ne peut avoir à la fois deux points mul- » tiples de l'ordre ν.

» Si l'on considère, que l'on peut toujours faire passer une courbe » du deuxième ordre par cinq points donnés, et qu'une courbe de » deuxième ordre ne peut rencontrer une courbe de l'ordre ν en plus

» de 2ν points, on conclura qu'une courbe de l'ordre ν ne peut avoir
» cinq points dont les degrés de multiplicité fassent ensemble plus
» de 2ν unités, d'où il suit *qu'une courbe du quatrième ordre ne peut
» avoir quatre points doubles*. Car la courbe du deuxième ordre, qui
» passerait par ses quatre points doubles et par un cinquième point
» simple de la courbe du quatrième ordre, serait censée la rencontrer
» neuf fois; ce qui est impossible, puisqu'elle ne peut la rencontrer
» qu'en huit points.

» Par la même raison, une courbe du cinquième ordre, qui ne peut
» avoir qu'un point triple, ne peut avoir, avec ce point triple, *plus de
» trois points doubles*.

» Une courbe du sixième ordre *ne peut avoir quatre points triples*,
» ni même trois points triples et deux points doubles. Une courbe du
» septième ordre ne peut avoir cinq points triples, ni un point qua-
» druple avec trois points triples et quelque autre point multiple, etc. »

Ce passage suffit pour montrer la méthode que Cramer a suivie pour trouver le nombre des points multiples qu'une courbe algébrique peut avoir; nous avons écrit en italique quelques endroits dans lesquels se trouvent des erreurs.

Suivant Cramer, une courbe du quatrième ordre ne peut avoir en même temps quatre points doubles.

Pour montrer l'inexactitude de cette assertion, prenons une courbe du second degré, une ellipse réelle, ayant toutes ses coordonnées positives, et qui soit telle qu'elle soit tangente à la fois à l'axe des ordonnées et à l'axe des abscisses.

Pour remplir cette condition, l'équation de cette ellipse doit être telle, qu'en faisant $x=0$ on ait pour y deux valeurs égales, et qu'en faisant $y=0$ on ait aussi pour x deux valeurs égales.

Si, dans l'équation de cette ellipse, on met à la place de x la quantité x^2, et à la place de y la quantité y^2, on trouvera l'équation d'une courbe du quatrième degré qui aura quatre points doubles situés sur les axes des coordonnées.

L'équation de l'ellipse

$$y^2 - 2y + 16x^2 - 8x + 1 = 0$$

est un cas particulier qui remplit les conditions voulues.

Si l'on change dans cette équation x en x^2, et y en y^2, on a l'équation

$$y^4 - 2y^2 + 16x^4 - 8x^2 + 1 = 0,$$

qui représente une courbe du quatrième degré qui a quatre points doubles ; deux se trouvent sur l'axe des ordonnées aux deux distances ± 1, et deux sur l'axe des abscisses aux deux distances $\pm \frac{1}{2}$.

Une courbe du quatrième degré, ayant déjà quatre points doubles, peut être disposée dans la région des coordonnées positives, de manière à toucher, en deux points l'axe des ordonnées, et en deux autres points l'axe des abscisses. Ce qui revient au même, l'équation d'une courbe du quatrième degré ayant déjà quatre points doubles, peut être transformée, en changeant l'origine des coordonnées, en une autre équation qui, par l'hypothèse de $x = 0$, donne pour y deux couples de valeurs égales, et par l'hypothèse de $y = 0$ présente aussi pour x deux couples de valeurs égales.

Une fois que l'on aura trouvé une équation du quatrième degré remplissant ces conditions, il suffira d'y changer y en y^2, et x en x^2, pour avoir une courbe du huitième degré qui aura : huit points doubles situés sur les axes des coordonnées, et seize points doubles en dehors des axes des coordonnées, en tout vingt-quatre points doubles.

Une courbe du huitième degré pouvant avoir vingt-quatre points doubles, on trouvera de même qu'une courbe du seizième ordre pourra avoir cent douze points doubles, savoir, seize points doubles situés sur les axes des coordonnées, et quatre-vingt-seize points doubles en dehors des axes des coordonnées.

La partie réelle des courbes du quatrième ordre se présentant assez souvent sous forme de quatre ovales séparés, on pouvait prévoir que ces quatre ovales pourraient se toucher mutuellement deux à deux, et donner lieu à quatre points doubles.

La partie réelle des courbes du sixième ordre peut être présentée aussi quelquefois par neuf ovales rangés sur trois rangs, qui, en venant se toucher mutuellement deux à deux et tous ensemble, peuvent donner lieu à douze points doubles.

La partie réelle des courbes du huitième ordre peut s'offrir sous la forme de seize ovales séparés sur quatre rangs, qui, en se touchant mutuellement deux à deux, peuvent donner lieu à vingt-quatre points doubles.

En continuant de même, on verra que le nombre des points doubles, que peut avoir une courbe de l'ordre 2ν, peut s'élever à un nombre représenté par la quantité $2\nu(\nu - 1)$.

De même qu'une courbe de l'ordre ν, en mettant y^2 à la place de y, et x^2 à la place de x, peut donner une courbe de l'ordre 2ν; de même une courbe de l'ordre 2ν, qui ne contient que des puissances paires de x et de y, peut se réduire à une courbe de l'ordre ν, si l'on remplace y^2 par y, et x^2 par x.

Le nombre possible des points doubles de la courbe de l'ordre ν pourra donc se déduire du nombre possible des points doubles de la courbe de l'ordre 2ν. Si l'on désigne par M le nombre des points doubles de la courbe de l'ordre ν, et si l'on représente par N le nombre total des points doubles de la courbe de l'ordre 2ν, et par T le nombre des points doubles de la même courbe qui se trouvent sur les axes des coordonnées, on aura la relation

$$N - T = 4M.$$

Cette relation a lieu, soit que ν soit pair, soit qu'il soit impair.

Supposons ν impair, et de la forme $2\nu' + 1$. La courbe de l'ordre $4\nu' + 2$ pourra avoir $(8\nu'^2 + 4\nu')$ points doubles, parce qu'elle pourra avoir $(2\nu' + 1)^2$ ovales séparés, rangés sur $(2\nu' + 1)$ rangs. N sera donc égal à $8\nu'^2 + 4\nu'$.

Parmi les $(2\nu' + 1)^2$ ovales séparés, rangés sur $(2\nu' + 1)$ rangs, les deux rangées du milieu, partagées par les deux axes des coordonnées, pourront offrir chacune $2\nu'$ points doubles. Par conséquent la courbe de l'ordre $4\nu' + 2$ pourra avoir $4\nu'$ points doubles situés sur les axes des coordonnées. $4\nu'$ sera donc la valeur de T. Mettant N et T dans la relation précédente, on tirera M égale $2\nu'^2$. Cette formule n'est vraie que quand ν' est > 1.

D'où l'on conclura qu'une courbe d'un ordre impair $2\nu' + 1$ ne pourra avoir plus de $2\nu'^2$ points doubles.

Par la méthode des ovales séparés, on prouvera encore que, si dans une courbe de l'ordre 2ν en x, les termes contenant y ne sont que de l'ordre $2s$ au plus, le nombre des points doubles, que cette courbe pourra avoir, ne pourra pas être plus grand que

$$2s\nu - s - \nu.$$

Si, dans une équation de l'ordre $2\nu + 1$ en x, les termes contenant y ne s'élèvent qu'à l'ordre $2s + 1$, le nombre des points doubles de la courbe représentée par cette équation ne surpassera jamais $2s\nu$, ν et s étant > 1.

Dans une équation de l'ordre 2ν en x, si les termes contenant y ne sont que de l'ordre $2s + 1$ au plus, le nombre des points doubles de la courbe représentée par cette équation ne dépassera jamais

$$2s\nu - s.$$

D'après la méthode de Cramer, le nombre des points doubles d'une courbe de l'ordre 2ν ne pourrait s'élever qu'à $(2\nu - 1)(\nu - 1)$, et le nombre des points doubles d'une courbe de l'ordre $2\nu + 1$ à la quantité $\nu(2\nu + 1)$.

Un point triple se forme par la réunion de trois points doubles;
Un point quadruple se forme par la réunion de six points doubles;
Un point quintuple se forme par la réunion de dix points doubles;
Enfin un point de l'ordre ν est produit par la réunion d'un nombre de points doubles égal à $\frac{\nu(\nu - 1)}{2}$.

D'après cela, une courbe du huitième ordre pourrait peut-être avoir quatre points quadruples ou huit points triples. Pour être sûr qu'il existe des courbes du huitième degré qui ont huit points triples ou quatre points quadruples, il faut en prouver l'existence par d'autres considérations, ou bien il faut trouver une équation particulière du huitième degré qui donne une courbe qui ait quatre points quadruples ou huit points triples.

Cette remarque s'applique à tous les cas que l'on peut découvrir soit par la méthode de Cramer, soit par la méthode que nous avons présentée ci-dessus. Ces méthodes ne donnent pas de preuves d'existence, mais des possibilités ou des probabilités d'existence; elles ne sont en définitive que des limites.

Un point sextuple équivalant à quinze points doubles, une courbe de huitième ordre ne peut avoir à la fois qu'un point sextuple et neuf points doubles, et non un point sextuple et quinze points doubles, comme l'indique Cramer dans le tableau des points multiples que peut avoir une courbe du huitième degré.

Dans le même tableau, Cramer indique qu'une courbe du huitième ordre peut avoir à la fois un point quintuple, trois points triples et huit points doubles; et d'après le nombre des points doubles nécessaires pour former un point quintuple et un point triple, une courbe du huitième ordre ne peut avoir à la fois qu'un point quintuple, trois points triples et cinq points doubles.

On voit que Cramer ignorait aussi à combien de points doubles était équivalent un point multiple de l'ordre ν; équivalence qui se conclut de la similitude des branches de courbes avec des droites qui se coupent dans un même plan.