JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Note sur un passage de la mécanique analytique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 165-168.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__165_0>

NOTE

SUR UN PASSAGE

DE LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE;

PAR M. J. BERTRAND,

Élève-Ingénieur des Mines.

Lagrange démontre, dans la *Mécanique analytique*, tome I, p. 293, que, dans un système quelconque soumis à l'action de forces instantanées, la somme des forces vives est *maxima* ou *minima* relativement à tout autre mouvement que pourrait prendre le système, sous l'influence des mêmes impulsions, après l'introduction de certaines liaisons nouvelles. Ainsi, par exemple, s'il s'agit d'un corps solide, la somme des forces vives est *maxima* ou *minima*, relativement aux mouvements qui auraient lieu si, l'impulsion restant la même, on fixait un axe quelconque dans l'intérieur du solide.

M. Delaunay, dans une Note insérée au tome V de ce Journal, a montré qu'il y a toujours *maximum*, mais la démonstration qu'il en donne est un peu longue et s'écarte beaucoup de celle de Lagrange.

Plus récemment, M. Sturm a fait voir (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XIII, page 1046) que le théorème de Lagrange est un cas particulier d'une proposition plus générale à laquelle il est parvenu; il a indiqué aussi un moyen direct fort simple d'établir ce théorème dans le cas d'un corps solide, au moyen des belles propriétés de l'ellipsoïde central de M. Poinsot.

Le but de cette Note est de montrer que l'analyse de Lagrange peut aussi servir à prouver qu'il y a toujours *maximum*, et donne même l'expression de la perte de forces vives à laquelle M. Sturm a été conduit par son théorème général. Il suffira, comme on va le voir, d'ajouter quelques mots aux raisonnements de la *Mécanique analytique*.

Voici la démonstration ainsi modifiée, dans laquelle j'écris en italique tout ce que j'ai dû ajouter :

« On peut, dans l'équation de l'article 2 de la section précédente, » supposer les variations δx, δy, δz, proportionnelles aux vitesses » x', y', z' que les corps reçoivent par l'impulsion; on aura ainsi » l'équation (des forces vives)

$$S\,[m\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) + Xx' + Yy' + Zz'] = 0,$$

» dans laquelle la partie $S\,m(x'^2 + y'^2 + z'^2)$ représente la force » vive de tout le système. Cette équation étant combinée avec les trois » équations de l'article (14), donne lieu à une propriété de maximis et » minimis relative à la ligne autour de laquelle le système tourne au » premier instant, lorsqu'il a reçu une impulsion quelconque, ligne » qu'on peut nommer aussi axe spontané de rotation.

» Si l'on nomme α, β, γ les parties des vitesses x', y', z' qui dé- » pendent du changement de position respective des corps du sys- » tème, et qu'on les ajoute à celles qui résultent des rotations (ar- » ticle 17), on aura les valeurs complètes de x', y', z' exprimées » ainsi :

$$x' = z\omega' - y\varphi' + \alpha,\quad y' = x\varphi' - z\psi' + \beta,\quad z' = y\psi' - x\omega' + \gamma.$$

» Supposons maintenant qu'on différentie ces valeurs *ou qu'on en* » *prenne les différences finies*, en ne regardant que ψ', ω', φ', comme » variables, et qu'on dénote ces différentielles *ou ces différences* par » la caractéristique δ [*], on aura

$$\delta x' = z\delta\omega' - y\delta\varphi',\quad \delta y = x\delta\varphi' - z\delta\psi',\quad \delta z = y\delta\psi' - x\delta\omega';$$

---

[*] Ces variations, représentées par le signe δ, se rapportent aux changements qu'éprouvent les vitesses, par le seul fait d'une modification apportée aux liaisons, les forces motrices restant les mêmes.

» or les trois équations de l'article (14),

$$\int m(x'y - y'x) + xY - yX = 0,$$

$$\int m(z'x - x'z) + zX - xZ = 0,$$

$$\int m(yz' - zy') + yZ - zY = 0,$$

» étant multipliées respectivement par $\delta\varphi'$, $\delta\omega'$, $\delta\psi'$, et ajoutées en-
» semble en faisant passer sous le signe $\int$ les différentielles $\delta\varphi'$, $\delta\omega'$,
» $\delta\psi'$ qui sont les mêmes pour tous les corps, donnent, par la sub-
» stitution des valeurs précédentes,

$$\int m(x\delta x' + y\delta y' + z\delta z') + X\delta x' + Y\delta y' + Z\delta z' = 0;$$

» mais l'équation des forces vives étant différentiée, par rapport à δ,
» donne, *en conservant tous les termes, comme on doit le faire puis-*
» *qu'il s'agit de différences finies*,

$$\int [2m(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z')]$$
$$+ [m(\delta x')^2 + (\delta y')^2 + (\delta z')^2] + X\delta x' + Y\delta y' + Z\delta z' = 0;$$

» donc on a, par la comparaison de ces deux équations,

$$\int m(x'\delta x' + y'\delta y' + z'\delta z') + m[(\delta x')^2 + (\delta y')^2 + (\delta z')^2] = 0,$$

» et par conséquent

$$\delta \int m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = -\int m(\delta x'^2 + \delta y'^2 + \delta z'^2). \text{ »}$$

Cette équation, qui ne diffère du résultat de Lagrange que par l'introduction des termes du second ordre entrant dans le second membre, montre que l'accroissement de forces vives est négatif et égal à la somme des forces vives perdues par les différents points. Rien ne suppose ici que les variations soient infiniment petites.

La démonstration précédente, quoique bien simple, l'est encore moins que celle du théorème général de M. Sturm. J'ai cru néanmoins qu'il pouvait être intéressant de montrer que la méthode de Lagrange suffit pour traiter complétement le cas particulier dont il s'était occupé. On voit qu'il suffit d'ajouter quelques mots à ce qui avait été dit par cet illustre géomètre.