JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur un problème de géométrie relatif à la théorie des maxima et minima

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 163-164.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__163_0>

SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE

RELATIF A LA THÉORIE DES MAXIMA ET MINIMA;

PAR J. LIOUVILLE.

Quand on traduit en analyse un problème de géométrie, on doit en général avoir égard à certaines conditions spéciales, attachées à la nature de ce problème, quoique non exprimées explicitement, et dont on ne pourrait quelquefois négliger de tenir compte, sans arriver à une absurdité. L'exemple suivant, que je donne depuis longtemps dans mes cours, me paraît, à cause de sa simplicité même, bon à développer devant des élèves.

On propose de trouver la ligne la plus courte ou la plus longue qu'on puisse mener à un cercle donné d'un point A pris dans son plan. Soient O le centre du cercle, r son rayon, et x, y les coordonnées rectangulaires d'un des points M de sa circonférence, en sorte que $x^2+y^2=r^2$; soit de plus $\mathrm{OA}=a$, et admettons que l'axe des x coïncide avec la droite OA. On aura

$$\overline{\mathrm{AM}}^2 = y^2 + (a-x)^2 = a^2 - 2ax + r^2.$$

Telle est la quantité qu'il faut rendre un *maximum* ou un *minimum*. Or, si d'après la règle ordinaire, on voulait égaler à zéro la dérivée de cette quantité, on trouverait l'équation absurde $-2a=0$, d'où il semblerait résulter que le problème n'a aucune solution, tandis qu'évidemment il en a deux.

Pour faire disparaître le paradoxe, il suffit d'observer que par la nature même du problème de géométrie qui nous occupe, l'abscisse x ne peut varier qu'entre les limites $-r$, $+r$. Or la fonction $a^2-2ax+r^2$ est décroissante quand on suppose, ce qui est permis, a positif: la plus petite valeur de cette fonction répond dès lors à $x=-r$ et la plus grande à $x=r$. Donc, etc.

Si, au lieu de prendre pour axe des x la droite OA, on avait pris une autre droite à volonté, l'analyse seule aurait conduit sans aucune considération accessoire quelconque à la solution demandée, et la difficulté indiquée ne se serait pas présentée à nous. En nommant α, β les coordonnées du point A, on aurait eu

$$\overline{\mathrm{AM}}^2 = r^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2,$$

d'où, par la condition ordinaire du *maximum* ou *minimum*,

$$\alpha + \beta \frac{dy}{dx} = 0.$$

Mais l'équation du cercle donne $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$; il vient donc

$$y = \frac{\beta x}{\alpha};$$

cette dernière équation est celle de la droite OA : les points où la droite OA coupe le cercle sont donc les points cherchés. Ici les points dont nous parlons sont immédiatement fournis par la méthode ordinaire. La raison toute simple en est que leurs abscisses sont comprises entre $-r$ et $+r$, et sont différentes de ces deux limites, de telle manière que la fonction $\overline{\mathrm{AM}}^2 = r^2 - 2\alpha x - 2\beta y$ augmente lorsqu'on passe, par exemple, de l'abscisse qui répond au *minimum* aux abscisses plus grandes ou plus petites qui sont à côté. Quand on prend, au contraire, la droite OA pour axe des x, le *minimum* répond à $x = r$, mais c'est un *minimum* de $\overline{\mathrm{AM}}^2$ ou $a^2 - 2ax + r^2$ sous le point de vue géométrique, en comparant à l'abscisse r des abscisses toutes plus petites que r, et non sous le point de vue analytique où l'on aurait à comparer à l'abscisse r des abscisses à volonté plus grandes ou plus petites.