JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur les fractions qui se présentent sous la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 160-162.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__160_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

SUR LES FRACTIONS

QUI SE PRÉSENTENT SOUS LA FORME INDÉTERMINÉE $\frac{\infty}{\infty}$;

Par J. LIOUVILLE.

M. Cauchy a étendu aux fractions $\frac{f(x)}{F(x)}$, qui pour une valeur particulière a de x se présentent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$, la règle connue depuis longtemps pour celles qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$. La méthode très-simple dont il s'est servi ne paraît pas s'appliquer, à la vérité, au cas où la valeur de la fraction considérée est nulle ou infinie pour $x = a$; mais dans le tome VI de ce Journal (page 14), M. Bertrand a donné de la règle citée une démonstration nouvelle qui n'est pas sujette à la même objection, et qui prouve que dans les cas singuliers dont on vient de parler cette règle subsiste. Divers géomètres sont arrivés par une route différente au même résultat. J'indiquerai cependant encore un autre moyen d'y parvenir.

Tout se réduit à prouver que la règle de M. Cauchy reste exacte quand la vraie valeur de $\frac{f(a)}{F(a)}$ est nulle; le cas où la valeur cherchée est infinie se ramène en effet à celui-là en renversant la fraction. Or, si l'on ajoute à la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$, supposée nulle pour $x = a$, une constante C, d'où résulte la somme

$$\frac{f(x) + CF(x)}{F(x)},$$

la valeur de cette dernière fraction, aussi pour $x = a$, sera précisément la constante C qui n'est ni o ni ∞. On pourra donc appliquer la méthode de M. Cauchy et l'on trouvera

$$C = \frac{f'(a) + CF'(a)}{F'(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)} + C,$$

d'où

$$\frac{f'(a)}{F'(a)} = 0 = \frac{f(a)}{F(a)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Quand la vraie valeur de

$$\frac{f(x)}{F(x)},$$

pour $x = a$, est en elle-même indéterminée, ce qui arrive par exemple, si l'on prend

$$f(x) = 2x + x \sin x, \quad F(x) = 1 + 3x + x \cos x, \quad \text{et} \quad a = \infty,$$

on conçoit qu'il n'y a rien à attendre de la règle indiquée. Mais je remarquerai ici que la vraie valeur de $\frac{f(a)}{F(a)}$ peut être déterminée, et celle de $\frac{f'(a)}{F'(a)}$ être néanmoins essentiellement indéterminée. La règle dont nous parlons cesse alors d'être applicable. Cette restriction a également lieu pour le cas des fractions $\frac{0}{0}$. Ainsi pour $x = \infty$, la vraie valeur de

$$\frac{x - \cos x}{x + \sin x}$$

est l'unité, tandis que la fraction

$$\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x},$$

qui résulte du rapport des dérivées des deux termes, est tout à fait indéterminée. Semblablement la fraction

$$\frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}, \quad \text{ou} \quad \frac{x \cos \frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x} + x \cos \frac{1}{x}},$$

se réduit à zéro pour $x = 0$, et cependant le rapport des dérivées donne

$$\frac{\sin\frac{1}{x} + 2x\cos\frac{1}{x}}{\cos x + \sin\frac{1}{x} + 2x\cos\frac{1}{x}},$$

fraction qui ne tend pas vers une limite déterminée lorsque x tend vers zéro.

Peut-être est-il bon d'ajouter en général que les règles du genre de celle que nous venons de discuter et qui se rapportent à des valeurs singulières et exceptionnelles ont presque toujours des cas en défaut qui résultent de leur nature même. Il faut en user avec réserve et s'assurer, dans chacun des exemples auxquels on les applique, que l'usage en est légitime. Ces règles n'en ont pas moins une utilité incontestable; aussi les géomètres ont-ils apprécié depuis longtemps l'extension élégante que M. Cauchy a su donner au théorème de L'Hopital.