JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} + \int(x)\frac{dy}{dx} + \mathrm{F}(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 134-136.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__134_0>

SUR L'ÉQUATION

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + \mathrm{F}(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0;$$

Par J. LIOUVILLE.

On peut joindre cette équation à celles que l'on prend pour exemples dans les Traités de calcul intégral, et en particulier aux deux suivantes si connues,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + \mathrm{F}(x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^n = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + \mathrm{F}(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

Il est aisé en effet d'en trouver l'intégrale complète. Servons-nous pour cela de la méthode de la variation des constantes. Si l'on supprimait le dernier terme, l'équation proposée se réduirait à

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} = 0,$$

et fournirait

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{C}e^{-\int f(x)\,dx}.$$

On peut conserver cette expression de $\frac{dy}{dx}$ même quand $\mathrm{F}(y)$ n'est pas zéro, pourvu que l'on regarde C comme une fonction de y. Il vient ainsi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-\int f(x)\,dx}\left[\frac{d\mathrm{C}}{dy}\frac{dy}{dx} - \mathrm{C}f(x)\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -f(x)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\mathrm{C}}\cdot\frac{d\mathrm{C}}{dy}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

En substituant cette valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans l'équation proposée, on obtient

$$\frac{1}{C} \cdot \frac{dC}{dy} + F(y) = 0,$$

et en intégrant

$$C = A e^{-\int F(y)\,dy}.$$

On a par suite

$$\frac{dy}{dx} = A\, e^{-\int F(y)\,dy}\, e^{-\int f(x)\,dx},$$

équation où les variables se séparent d'elles-mêmes et qui conduit à l'intégrale cherchée,

$$\int e^{\int F(y)\,dy} \,.\, dy = A \int e^{-\int f(x)\,dx}\, dx + B,$$

B étant aussi bien que A une constante arbitraire.

On pourrait aussi supprimer d'abord dans l'équation proposée le second terme, ce qui la réduirait à

$$\frac{d^2y}{dx^2} + F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

En posant $\frac{dy}{dx} = p$ et observant que $\frac{d^2y}{dx^2} = p\,\frac{dp}{dy}$, on aurait ensuite

$$\frac{dp}{dy} + p\,F(y) = 0,$$

et en intégrant,

$$p \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = C e^{-\int F(y)\,dy}.$$

On pourra conserver cette expression de $\frac{dy}{dx}$ même quand $f(x)$ n'est pas zéro, pourvu que l'on regarde C comme une fonction de x. En différentiant sous ce point de vue, on trouve aisément

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{1}{C} \cdot \frac{dC}{dx} \cdot \frac{dy}{dx},$$

de sorte qu'en substituant dans l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + \mathrm{F}(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

on a

$$\frac{1}{\mathrm{C}} \cdot \frac{d\mathrm{C}}{dx} + f(x) = 0.$$

De là on tire

$$\mathrm{C} = \mathrm{A}\, e^{-\int f(x)\, dx},$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{A}\, e^{-\int \mathrm{F}(y)\, dy}\, e^{-\int f(x)\, dx},$$

comme ci-dessus.