JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. BRASSINE

Sur quelques propriétés des courbes et des surfaces du second degré

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 120-125.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__120_0>

SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES COURBES

ET DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. E. BRASSINE,

Professeur à l'École d'artillerie de Toulouse.

Nous appellerons, dans tout ce qui suit, *points conjugués* des points placés sur une courbe ou une surface du second degré, aux extrémités d'un système quelconque de diamètres conjugués. Si, par exemple, sur une ellipse rapportée à son centre et à ses axes, x', y' désignent les coordonnées d'un point m', les coordonnées x'', y'' du point conjugué m'' seront liées avec les premières par les relations

$$y'' = \frac{b}{a}x', \quad x'' = -\frac{ay'}{b}.$$

Cela posé, nous énoncerons les propositions suivantes.

1°. Si l'on prend deux points conjugués quelconques sur une ellipse donnée, et si l'on joint chacun de ces points avec les deux foyers de cette courbe, on démontre que : *la somme des rectangles que l'on obtient en multipliant entre eux les deux rayons vecteurs aboutissant à chacun des points conjugués, égale la somme des carrés des demi-axes.*

Si les foyers sont désignés par les lettres F, F', on aura la relation

$$\mathrm{F}m' \times \mathrm{F}'m' + \mathrm{F}m'' \times \mathrm{F}'m'' = a^2 + b^2.$$

2°. Si dans un ellipsoïde de révolution on joint chacun des trois points conjugués, d'un système conjugué quelconque, avec les deux foyers, *la somme des trois rectangles que l'on obtient, en multipliant entre eux les deux rayons vecteurs aboutissant à chacun des points conjugués, égale la somme des carrés des trois demi-axes de l'ellipsoïde.*

Si l'équation de l'ellipsoïde est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

cette somme de rectangles vaudra $2a^2 + c^2$.

3°. Si l'on considère les trois couples de foyers, symétriquement placés sur le grand et le moyen axe d'un ellipsoïde quelconque, on démontre que : si l'on joint chaque couple de foyers avec les trois points conjugués m', m'', m''', et que l'on effectue les produits des deux rayons vecteurs de chaque couple aboutissant à un même point, *la somme des carrés des produits provenant des rayons vecteurs de deux couples quelconques de foyers, moins la double somme des carrés des produits provenant des rayons vecteurs du troisième couple de foyers, est une quantité constante.*

Cette proposition, convenablement modifiée, s'appliquerait aisément à l'ellipsoïde de révolution ou à l'ellipse. Nous ferons d'ailleurs observer que nous considérons toujours, dans nos énoncés relatifs à l'ellipsoïde, les foyers des sections que l'on obtient en faisant successivement x, y, z égaux à zéro dans l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ de sa surface rapportée à son centre et à ses axes.

4°. Dans une ellipse ou dans un ellipsoïde, *la somme des carrés des rayons vecteurs, partant de foyers et aboutissant aux extrémités d'un système de diamètres conjugués ou aux points conjugués, est constante.*

On trouverait encore une somme constante si l'on faisait la somme des carrés des lignes qui joignent les extrémités des axes avec les points conjugués.

Si par chacun des deux ou des trois points conjugués, pris sur une ellipse ou un ellipsoïde, on mène la normale à cette courbe ou à cette surface, on démontre que *la somme des carrés des normales conjuguées est constante;* d'où il résulte que *la somme des puissances* *deux tiers des rayons de courbure d'une ellipse, menés aux points conjugués m', m'' de cette courbe, est aussi constante.*

La somme des carrés des sous-normales conjuguées est constante dans l'ellipse comme dans l'ellipsoïde.

5°. Si par les points conjugués m', m'' d'une ellipse, on mène deux normales, chacune de ces normales divisera le grand axe ou la distance des foyers en deux segments, et l'on démontre que *si l'on ajoute le rectangle des segments formés par la normale avec le rectangle des segments formés par la normale conjuguée, la somme sera constante.*

Si par les mêmes points conjugués m', m'' on mène deux tangentes à l'ellipse, et qu'on les prolonge jusqu'à la circonférence décrite sur le grand axe de cette ellipse, les deux tangentes, devenues cordes de cette circonférence, seront divisées aux points m', m'' en deux segments tels que : *si l'on ajoute le rectangle des deux segments de la première tangente, avec le rectangle des deux segments de la seconde tangente, la somme sera constante.*

On peut observer aussi que les triangles compris entre les axes et les tangentes conjuguées sont équivalents.

6°. Si nous considérons, sur une ellipse rapportée à son centre et à ses axes, un point quelconque m' déterminé par les coordonnées x', y', et sur la circonférence décrite sur le grand axe, un point M' déterminé par les deux coordonnées x', $\frac{ay'}{b}$, on sait que la tangente au point M' donne, par son intersection avec le grand axe, un point de la tangente à l'ellipse au point m'. Ce même point M' peut servir à la détermination directe de la normale au point m'. Il suffit, en effet, de joindre le point M' avec le centre O et de prolonger le rayon M'O jusqu'à ses deux rencontres avec une nouvelle circonférence décrite du point O comme centre avec la somme des demi-axes comme rayon, pour obtenir deux points qui appartiennent aux normales menées au point m' et au point opposé dont les coordonnées sont $-x'$, $-y'$.

Une construction analogue servirait à déterminer la normale au point x', y', z' de l'ellipsoïde de révolution $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; il suffirait de mener par le point x', y', $\frac{a}{c}z'$ de la sphère $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$, un rayon dont on chercherait l'intersection avec une nouvelle sphère $x^2 + y^2 + z^2 = (a + c)^2$.

La construction de la normale, en un point de l'ellipsoïde quelconque $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, exigerait l'emploi de deux ellipsoïdes de révolution auxiliaires

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{(a+b)^2} + \frac{y^2}{(a+b)^2} + \frac{c^2 z^2}{(ab+c^2)^2} = 1.$$

Ces propriétés peuvent faciliter la solution de quelques questions, et rendre élégantes certaines constructions de la géométrie descriptive, relatives aux plans tangents.

7°. Si par trois points conjugués m', m'', m''', d'un ellipsoïde, on fait trois sections circulaires, parallèles à un *des axes*, la *somme des aires des trois sections sera constante*. Si par exemple on considère l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, tel que $a > c > b$, l'aire des trois cercles parallèles à l'axe des z sera égale au double du cercle qui a c pour rayon.

Si l'on considère trois points conjugués m', m'', m''' situés sur la surface d'un ellipsoïde, pour chacun de ces points on peut évaluer les deux rayons de courbure *maxima* et *minima* des sections normales principales. La moyenne géométrique entre ces deux rayons aura une valeur que nous désignerons par R' pour le point m' et par R'', R''' pour les points m'', m'''. Cela posé, on démontre que *la somme de ces trois moyennes est constante*. De sorte qu'on a toujours

$$R' + R'' + R''' = a.b.c\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

8°. Quelques-uns des énoncés précédents conviennent, avec de simples modifications de signes, à l'hyperbole ou aux hyperboloïdes. Nous observerons d'ailleurs que les relations très-simples $y'' = \frac{bx'}{a}$, $x'' = \mp \frac{ay'}{b}$, entre les coordonnées des points conjugués de l'ellipse ou de l'hyperbole, peuvent servir à démontrer très-aisément les propositions précédentes relatives à ces courbes, ainsi que toutes les propriétés connues de leurs diamètres conjugués. Pour les surfaces du second ordre on peut employer les relations que nous allons établir en démontrant deux théorèmes connus.

Considérons la sphère $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$ et les deux ellipsoïdes $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, rapportés au même centre et aux mêmes axes; imaginons du centre o de la sphère trois rayons rectangulaires qui coupent sa surface aux points M′, M″, M‴ déterminés par des coordonnées $x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z'''$; il est évident que x', x'', x''' peuvent être considérés comme les cosinus des angles que l'axe des x fait avec les directions rectangulaires oM′, oM″, oM‴; par suite

(1)
$$x'^2+x''^2+x'''^2=a^2,$$
et par une raison semblable,
$$y'^2+y''^2+y'''^2=a^2,\quad z'^2+z''^2+z'''^2=a^2.$$

Imaginons sur l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, trois points m', m'', m''', déterminés par les coordonnées $x', y', \frac{c}{a}z', x'', y'', \frac{c}{a}z'', x''', y''', \frac{c}{a}z'''$; ces points seront les extrémités de trois diamètres conjugués om', om'', om''', et l'on voit que pour les coordonnées de ces extrémités il existera des relations analogues aux relations (1); par suite

$$om'^2+om''^2+om'''^2=2a^2+c^2.$$

Enfin trois points μ', μ'', μ''' de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ déterminés par les coordonnées $x', \frac{b}{a}y', \frac{c}{a}z', x'', \frac{b}{a}y'', \frac{c}{a}z''$ forment un système conjugué, et les égalités que l'on déduit des relations (1) donnent

$$o\mu'^2+o\mu''^2+o\mu'''^2=a^2+b^2+c^2.$$

Les trois rayons oM′, oM″, oM‴, de la sphère, sont les arêtes d'une pyramide oM′M″M‴ dont le volume est évidemment $\frac{a^3}{6}$. Mais cette pyramide peut être considérée comme l'excès d'un tronc de prisme triangulaire dont les arêtes parallèles sont z', z'', z''' sur trois pyramides quadrangulaires qui ont leur sommet en o et pour bases des trapèzes dont les côtés parallèles sont $z'\,z''$, $z''\,z'''$, $z'\,z'''$. Dans les deux ellipsoïdes $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, les pyramides $om'm''m'''$, $o\mu'\mu''\mu'''$, formées par les demi-diamètres conjugués, sont les différences de prismes et de pyramides analogues; mais ces nouveaux solides sont successivement aux premiers dans le rapport de $c : a$ et de $cb : a^2$. Donc les pyramides $om'm''m'''$ et $o\mu'\mu''\mu'''$ auront respectivement pour mesure $\frac{1}{6}\,a^2c$ et $\frac{1}{6}\,abc$.