

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Extrait d'un mémoire sur un cas particulier du problème des trois corps

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 7 (1842), p. 110-113.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__110_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

EXTRAIT D'UN MÉMOIRE

SUR UN CAS PARTICULIER DU PROBLÈME DES TROIS CORPS;

PAR J. LIOUVILLE [*].

Quoique les géomètres soient loin d'avoir résolu d'une manière complète et générale le problème des trois corps, ils en ont obtenu cependant des solutions particulières dont on peut faire usage quand les coordonnées et les vitesses initiales remplissent certaines conditions. Lagrange et Laplace en ont donné divers exemples, que l'on trouve réunis et démontrés d'une manière simple dans le chapitre VI du X^{me} livre de la *Mécanique céleste*. En voici un digne d'attention : Considérant trois masses rangées en ligne droite, Laplace prouve que si, après avoir établi entre ces masses et les distances qui les séparent une relation convenable, on imprime à deux d'entre elles autour du centre de la troisième des vitesses parallèles l'une à l'autre et proportionnelles à leurs distances au centre, les trois masses sous l'influence de leurs actions mutuelles resteront par la suite constamment en ligne droite, la droite qui les contient étant bien entendu mobile ; les vitesses et les distances pourront changer avec le temps, mais le rapport des vitesses et celui des distances seront égaux et invariables ; la loi du mouvement de chaque masse sera d'ailleurs la même que pour un point matériel attiré vers un centre fixe.

On sait que, dans notre système, les planètes dont la distance au Soleil est la plus grande se meuvent aussi le plus lentement, et que les carrés des temps des révolutions augmentent à peu près comme les cubes des grands axes des orbites. Dans le système particulier que nous venons d'indiquer, les choses ne se passeraient point ainsi. Quelle que

[*] Ce Mémoire sera publié dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1845

soit en effet celle de nos trois masses que l'on veuille prendre pour centre du mouvement, les deux autres qui doivent rester en ligne droite avec elle accompliront nécessairement leurs révolutions dans un temps égal, malgré l'inégalité des distances. C'est là assurément un théorème fort remarquable; mais n'oublions pas qu'il suppose, qu'il exige certaines conditions spéciales, et surtout une relation convenable entre les masses et les distances. Étant données trois masses quelconques, on peut du reste toujours faire en sorte que la relation dont il s'agit ait lieu. Pour fixer les idées, admettons que les trois masses soient celles du Soleil, de la Terre et de la Lune, et nous reconnaitrons avec Laplace que cette relation serait satisfaite en plaçant la Lune sur le prolongement de la droite qui joint le centre du Soleil au centre de la Terre, à une distance de cette dernière planète égale à très-peu près à la centième partie de la distance de la Terre au Soleil : une modification légère dans la valeur de la masse de la Terre rendrait le nombre cité (un centième) rigoureusement exact. Cela étant, Laplace en conclut que si, à l'époque arbitraire prise pour origine, la Lune s'était trouvée en opposition avec le Soleil à une distance de cet astre représentée par 101, celle de la Terre étant représentée par 100, et que les vitesses relatives de la Terre et de la Lune autour du Soleil eussent été aussi à cette époque parallèles et dans le rapport de 100 à 101, la Lune serait toujours restée en opposition avec le Soleil, de manière à ne jamais cesser d'éclairer la Terre pendant les nuits.

L'illustre auteur reproduit cette assertion dans l'*Exposition du Système du Monde* : « Quelques partisans des causes finales ont imaginé, » dit-il, que la Lune a été donnée à la Terre pour l'éclairer pendant les » nuits. Dans ce cas la nature n'aurait point atteint le but qu'elle se » serait proposé, puisque nous sommes souvent privés à la fois de la » lumière du Soleil et de celle de la Lune. Pour y parvenir, il eût » suffi de mettre à l'origine la Lune en opposition avec le Soleil dans » le plan même de l'écliptique, à une distance égale à la centième » partie de la distance de la Terre au Soleil, et de donner à la Lune et » à la Terre des vitesses parallèles et proportionnelles à leurs distances » à cet astre. Alors la Lune, sans cesse en opposition au Soleil, eût » décrit autour de lui une ellipse semblable à celle de la Terre; ces » deux astres se seraient succédé l'un à l'autre sur l'horizon, et comme

» à cette distance la Lune n'eût point été éclipsée, sa lumière aurait
 » constamment remplacé celle du Soleil. »

Pour l'exactitude absolue de la proposition énoncée, il faut qu'à l'origine du temps la relation entre les masses et les distances et la proportionnalité de ces dernières aux vitesses aient été rigoureusement vérifiées, ainsi que le parallélisme des vitesses; il faut de plus qu'aucune cause perturbatrice ne vienne par la suite troubler le mouvement, ce qu'on ne peut pas admettre. A la vérité, si le système que nous considérons est un système stable qui tende à résister aux perturbations et à revenir de lui-même à son état régulier de mouvement, cette remarque aura peu d'importance. Il faudrait sans doute avoir égard aux petits dérangements occasionnés par les diverses causes dont l'effet n'est pas insensible, mais cela n'empêcherait pas la Lune d'être toujours à très-peu près sur le prolongement de la droite qui joint le Soleil à la Terre. Or, en tenant compte de la réfraction, on voit qu'un certain écart de la Lune à cette droite ne l'empêcherait pas d'éclairer la Terre pendant la totalité de chaque nuit. Au contraire, si l'état de mouvement dont nous avons parlé plus haut est instable, s'il tend à se détruire de lui-même de plus en plus dès qu'il a éprouvé de légers dérangements (et c'est en effet ce qui a lieu, comme on le verra dans mon Mémoire), alors il faudra reconnaître que ce genre de mouvement ne peut pas exister d'une manière permanente dans la nature. La vraie question, on le comprend donc, est celle de la stabilité. Se contenter de dire avec l'auteur d'une dissertation imprimée à Rome en 1825 [*], que le système de nos trois masses doit éprouver des perturbations de la part des autres planètes et qu'ainsi l'opposition de la Lune au Soleil ne peut pas subsister à toute époque mathématiquement, d'une manière absolue (*scrupulosissime*), c'est énoncer une vérité évidente, triviale, et non pas faire une objection sérieuse. Quelle théorie en effet serait à l'abri d'une semblable objection ?

Le problème qu'il fallait résoudre et que je traite dans mon Mémoire est le suivant : *Trois masses étant placées non plus rigoureusement,*

[*] En voici le titre : *Paucis expenditur cl. Laplace opinio de illorum sententiâ qui lunam conditam dicunt ut noctu tellurem illuminet.*

mais à très-peu près dans les conditions énoncées par Laplace, on demande si l'action réciproque des masses maintiendra le système dans cet état particulier de mouvement ou si elle tendra au contraire à l'écart de plus en plus. Pour le résoudre d'après la méthode ordinairement suivie dans les questions de stabilité, j'ai dû considérer des équations différentielles linéaires qui se sont d'abord trouvées être à coefficients variables, même en négligeant, comme on pouvait le faire ici, l'excentricité de l'orbite terrestre. Une transformation simple m'a conduit ensuite à des équations à coefficients constants que j'ai pu intégrer. L'intégration terminée, j'ai reconnu que les effets des causes perturbatrices, loin d'être contrebalancés, sont au contraire agrandis d'une manière rapide par les actions mutuelles de nos trois masses : cette conclusion subsiste quels que soient les rapports de grandeur des masses. Si la Lune avait occupé à l'origine la position particulière que Laplace indique, elle n'aurait pu s'y maintenir que pendant un temps très-court.

