JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-L. RAABE

Note sur la théorie de la convergence et de la divergence des séries

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 85-88.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__85_0>

NOTE

SUR LA THÉORIE DE LA CONVERGENCE

ET

DE LA DIVERGENCE DES SÉRIES;

PAR M. J.-L. RAABE,

Professeur à Zurich.

(Extrait du *Journal* de M. Crelle, tome XI, page 309. — Traduction de M. LEBESGUE.)

Dans le 10e volume du *Journal de Mathématiques et de Physique* rédigé par MM. Ettingshausen et Baumgartner, j'ai démontré le théorème suivant :

« Quand u_n représente le terme général d'une série, et que la li-
» mite de l'expression $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$, pour une valeur infiniment
» grande de n, est égale à k, cette série est convergente ou divergente,
» selon que k est plus grand ou plus petit que l'unité [*]. »

---

[*] Si M. Duhamel avait eu connaissance de la Note de M. Raabe, écrite en allemand, il aurait reconnu que la règle qu'il donne (tome IV de ce Journal, page 216) revient au théorème de M. Raabe, puisqu'en posant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\alpha},$$

il vient

$$\lim.\, n\alpha = \lim.\, n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right).$$

Les personnes qui ont lu l'article de M. Duhamel verront avec plaisir l'extension donnée par M. Raabe à la règle en question.

(*V.-A. Lebesgue.*)

Ce théorème peut être employé avec succès pour comparer, sous le rapport de la convergence ou de la divergence, deux séries dont le terme général de l'une est une fonction du terme général de l'autre.

Dans ce cas, soit u_n le terme général d'une des séries, et $f(u_n)$ celui de l'autre, en supposant à la fonction $f(u_n)$ la propriété de ne pas devenir infiniment grande pour une valeur infiniment petite de u_n.

Posons l'équation

$$(1) \qquad k' = \lim. n \left[\frac{f(u_n)}{f(u_{n+1})} - 1 \right],$$

la limite se rapportant à une valeur infiniment grande de n; la série dont le terme est $f(u_n)$ sera convergente ou divergente, selon qu'on aura

$$k' > 1,$$

ou

$$k' < 1.$$

De l'équation

$$k = \lim. n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right)$$

on tire

$$\lim. f(u_n) = \lim. \left[f\left(u_{n+1} + \frac{u_{n+1}}{n} k \right) \right];$$

par là l'équation (1) devient

$$(2) \qquad k' = \lim. n \left[\frac{f\left(u_{n+1} + \frac{u_{n+1}}{n} k \right)}{f(u_{n+1})} - 1 \right].$$

Si l'on développe $f\left(u_{n+1} + \frac{u_{n+1}}{n} k \right)$ par la formule de Taylor, on a, eu égard à la propriété supposée à la fonction $f(u_n)$,

$$k' = k \lim. \left[\frac{f'(u_{n+1})}{f(u_{n+1})} u_{n+1} \right],$$

où l'on a fait, pour abréger, $f'(u_{n+1}) = \frac{df(u_{n+1})}{du_{n+1}}$. Si l'on pose

$$\frac{f'(u_{n+1})}{f(u_{n+1})} \cdot u_{n+1} = \mathrm{F}(u_{n+1}),$$

on a

$$k' = k \lim. \mathrm{F}(u_{n+1}),$$

équation qui montre comment k' et k dépendent l'un de l'autre.

Dans le cas particulier pour lequel

$$\lim. \mathrm{F}(u_{n+1}) = 1,$$

on a

$$k' = k,$$

et alors, selon que k est > 1 ou < 1, les deux séries sont à la fois convergentes ou divergentes.

Quand on suppose

$$f(u_{n+1}) = \frac{u^{\alpha}_{n+1}}{(1 - u_{n+1})^{\beta}},$$

on a

$$\lim. \mathrm{F}(u_{n+1}) = \alpha,$$

et par conséquent

$$k' = k\alpha.$$

Soit, par exemple,

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1};$$

on tombera sur les deux séries

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n},$$

$$\frac{2^{w}}{1^{w+\alpha}} + \frac{3^{w}}{2^{w+\alpha}} + \frac{4^{w}}{3^{w+\alpha}} \ldots\ldots + \frac{n^{w}}{(n-1)^{w+\alpha}},$$

où $w = \beta - \alpha$. Comme on a ici

$$k = 1,$$

il en résultera

$$k' = \alpha,$$

et par conséquent la 2^e^ série sera convergente ou divergente, selon que α sera > 1 ou < 1.

Zurich, 21 août 1833.