JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CATALAN

Théorème sur la réduction d'une intégrale multiple

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 81-84.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__81_0>

THÉORÈME

SUR LA RÉDUCTION D'UNE INTÉGRALE MULTIPLE;

PAR E. CATALAN.

La formule suivante

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\varphi(m\cos\theta+n\sin\theta\sin\omega+p\sin\theta\cos\omega)\sin\theta d\theta d\omega=2\pi\int_{-1}^{+1}\varphi(\alpha\sqrt{m^2+n^2+p^2})d\alpha,$$

que l'on doit à M. Poisson [*], est comprise comme cas particulier dans une autre formule que je vais démontrer, et où l'intégrale double se trouve remplacée par une intégrale multiple.

Soit l'intégrale d'ordre $n-1$,

$$(1)\quad A=\int\int\ldots dx_1.dx_2\ldots dx_{n-1}.\varphi(m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n)\sqrt{1+\left(\frac{dx_n}{dx_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{dx_n}{dx_{n-1}}\right)^2},$$

dans laquelle les variables reçoivent toutes les valeurs, positives ou négatives, propres à vérifier l'équation

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1,$$

et dans laquelle aussi, par conséquent, les variables indépendantes satisfont à la condition

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2 \overline{\overline{<}} 1.$$

Cette intégrale revient évidemment à

$$(2)\quad A=\int\int\ldots\frac{dx_1\ldots dx_{n-1}}{x_n}\varphi(m_1x_1+\ldots+m_nx_n).$$

[*] *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome III, page 126

Pour la réduire, je prends les formules de transformation suivantes :

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 = a_1u_1 + b_1u_2 + \ldots + l_1u_n, \\ x_2 = a_2u_1 + b_2u_2 + \ldots + l_2u_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_nu_1 + b_nu_2 + \ldots + l_nu_n : \end{cases}$$

dans ces équations, les coefficients de u_1 sont

$$a_1 = \frac{m_1}{\Delta}, \quad a_2 = \frac{m_2}{\Delta}, \quad \ldots\ldots, \quad a_n = \frac{m_n}{\Delta},$$

en supposant

$$\Delta^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2;$$

les autres coefficients satisfont aux conditions

$$(4)\qquad \begin{cases} b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = 1, \ldots\ l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2 = 1, \\ a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = 0, \ldots\ a_1l_1 + a_2l_2 + \ldots + a_nl_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad k_1l_1 + k_2l_2 + \ldots + k_nl_n = 0. \end{cases}$$

Le nombre des coefficients a_1, b_1, etc., dans les formules (3), est $n^2 - n$. Les équations de condition sont en nombre $(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. On pourra donc prendre arbitrairement $n^2 - n - \frac{n(n+1)}{2}$ coefficients, ou $\frac{n(n-3)}{2}$ coefficients.

En ajoutant les carrés des équations (3), et ayant égard aux relations (4), on trouve

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x^n = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2;$$

donc

$$(5)\qquad u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = 1.$$

Les formules (3) et (4) donnent aussi

$$(6)\qquad m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n = u_1\Delta;$$

donc, au moyen de la transformation de variables qui vient d'être indiquée, la fonction $\varphi(m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n)$ devient simplement

$$\varphi(u_1 \Delta).$$

Il nous reste actuellement à transformer la quantité $dx_1 \ldots dx_{n-1}$. Or, M. Jacobi a démontré depuis long-temps [*] que le système de variables employé ci-dessus donne cette relation très simple :

$$\frac{dx_1 \ldots dx_{n-1}}{x_n} = \frac{du_1 . du_2 \ldots du_{n-1}}{u_n}.$$

En substituant dans la formule (2), on trouve

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{A} = \int\int \ldots \frac{du_1 . du_2 \ldots du_{n-1}}{u_n} \varphi(u_1 \Delta).$$

Dans cette nouvelle intégrale, les variables doivent recevoir toutes les valeurs réelles satisfaisant à l'équation (5).

Actuellement, remplaçons u_n par sa valeur, et donnons à u_1 une valeur déterminée; nous aurons à évaluer

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{B} = \int\int \ldots \frac{du_2 \ldots du_{n-1}}{\sqrt{1 - u_1^2 - \ldots - u_{n-1}^2}},$$

les limites étant données par

$$u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_{n-1}^2 \overset{=}{<} 1 - u_1^2.$$

On sait [**] que cette intégrale d'ordre $n-2$, a pour expression

$$\text{(9)} \qquad \mathrm{B} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (1 - u_1^2)^{\frac{n-3}{2}};$$

---

[*] Journal de M. Crelle, tome XII, page 40. — M. Sturm m'a fait voir que l'on peut arriver facilement à cette relation, en effectuant le changement de variables *successivement*, au lieu de l'opérer en une seule fois.

[**] *Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples*, tome IV de ce Journal, page 336.

donc, en substituant dans la formule (7), et doublant le résultat à cause du radical, on obtiendra

$$(10)\qquad A = 2\,\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}\varphi(u_1\Delta)\,du_1\,(1-u_1^2)^{\frac{n-3}{2}}.$$

Enfin, en égalant les valeurs (2) et (10), on a ce théorème :

$$(11)\quad \int\int\ldots\frac{dx_1\ldots dx_{n-1}}{\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_{n-1}^2}}\varphi(m_1x_1+\ldots+m_nx_n)=2\,\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}\varphi(u\Delta)\,du(1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}.$$

Si l'on pose $u=\cos\theta$, on obtient, au lieu de la formule (10),

$$(12)\qquad A = 2\,\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^\pi\varphi(\Delta\cos\theta)\sin^{n-2}\theta d\theta.$$

Lorsque $n=3$, la formule (11) coïncide avec celle de M. Poisson.

(Juin 1840.)