JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CATALAN

Deux problèmes de probabilités

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 75-80.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__75_0>

DEUX PROBLÈMES DE PROBABILITÉS;

PAR E. CATALAN.

Ces deux problèmes n'offrent aucune difficulté théorique, mais ils conduisent à des résultats remarquables par leur simplicité.

PREMIER PROBLÈME.

Une urne A *contient* b *boules blanches et* n *boules noires. On en extrait, au hasard,* m *boules que l'on place, sans les connaître, dans une seconde urne* B, *laquelle renferme alors* m *boules, blanches et noires, en proportion inconnue. On tire de cette urne, successivement,* p *boules; et il arrive que toutes sont blanches. Quelle est la probabilité que, faisant un tirage de plus, on obtiendra encore une boule blanche?*

La question présente trois cas différents, selon que m est plus petit que b et n, ou compris entre les deux, ou plus grand que ces deux nombres. Afin d'abréger, je considérerai seulement le premier cas; les deux autres, ainsi que je m'en suis assuré, conduisent au même résultat.

1. Relativement à la composition de l'urne B, avant l'extraction des p boules blanches, on peut établir $m-p+1$ hypothèses. Cette urne pouvait effectivement contenir, savoir :

	p	boules blanches et	$m-p$	boules noires,
ou	$p+1$	....	$m-p-1$	............,
	....	....	....	....
	$m-i$	boules blanches et	i	boules noires,
	....	....	....	....
ou enfin,		m boules blanches.		

2. La probabilité que B renfermait primitivement $m-i$ boules blanches et i boules noires, est proportionnelle à la probabilité d'extraire d'une urne A, contenant b boules blanches et n boules noires, un nombre $m-i$ des premières boules, en m tirages. Elle est proportionnelle aussi à la probabilité d'extraire p boules blanches d'une urne qui en contiendrait $m-i$ blanches et i noires.

3. En posant $b+n=s$, la probabilité de tirer de A, $m-i$ boules blanches et i boules noires, *dans un ordre déterminé*, a pour expression :

$$\frac{b(b-1)\ldots\ldots(b-m+i+1)}{s(s-1)\ldots\ldots(s-m+i+1)}\cdot\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-i+1)}{(s-m+i)\ldots\ldots(s-m+1)};$$

donc la probabilité de faire cette extraction *dans un ordre quelconque*, sera égale à la quantité précédente, multipliée par le facteur

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots i\times 1.2.3\ldots(m-i)}.$$

En second lieu, la probabilité de la sortie de p boules blanches d'une urne qui en contiendrait $m-i$ blanches et i noires, a pour valeur,

$$\frac{(m-i)(m-i-1)\ldots\ldots(m-i-p+1)}{m(m-1)\ldots\ldots(m-p+1)}.$$

La probabilité de l'hypothèse en question sera donc proportionnelle à

$$\frac{b(b-1)\ldots(b-m+i+1)\times n(n-1)\ldots(n-i+1)}{s(s-1)\ldots\ldots(s-m+1)}\times\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots i\times 1.2.3\ldots(m-i)}\times\frac{(m-i)(m-i-1)\ldots(m-i-p+1)}{m(m-1)\ldots(m-p+1)},$$

ou proportionnelle à

$$\frac{1.2.3\ldots(m-p)\times b(b-1)\ldots(b-p+1)}{s(s-1)\ldots(s-m+1)}\times\frac{(b-p)(b-p-1)\ldots(b-m+i+1)}{1.2.3\ldots(m-i-p)}\times\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i}.$$

Désignons par ϖ_i la probabilité de cette hypothèse, et représentons par A_i la quantité

$$\frac{(b-p)(b-p-1)\ldots(b-m+i+1)}{1.2.3\ldots(m-i-p)}\times\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i};$$

nous aurons

$$\varpi_i = \frac{A_i}{\sum_0^{m-p} A_i}.$$

4. Le premier facteur de A_i est le coefficient de $u^{b-m+i} v^{m-i-p}$ dans le développement de $(u+v)^{b-p}$; l'autre est égal au coefficient de $u^{n-i} v^i$ dans $(u+v)^n$. Il est facile de voir que, si l'on multiplie les deux développements, le coefficient de $u^{b-m+n} v^{m-p}$ dans le produit $(u+v)^{b+n-p}$, sera égal à $\sum_0^{m-p} A_i$. On a donc

$$\sum_0^{m-p} A_i = \frac{s-p}{1} \cdot \frac{s-p-1}{2} \cdots \frac{s-m+1}{m-p};$$

et par suite

$$\varpi_i = \frac{(b-p)\ldots(b-m+i+1)}{1.2.3\ldots(m-i-p)} \times \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i} \times \frac{1.2.3\ldots(m-p)}{(s-p)\ldots(s-m+1)}.$$

5. La probabilité de la sortie d'une dernière boule blanche de B, prise *relativement* à l'hypothèse précédente, est $\varpi_i \frac{m-i-p}{m-p}$. Donc la probabilité de l'évènement qui fait l'objet de ce problème sera

$$P = \sum_0^{m-p} \varpi_i \frac{m-i-p}{m-p};$$

ou, en remplaçant ϖ_i par sa valeur, et négligeant la probabilité relative à $i = m-p$, laquelle serait zéro,

$$P = (b-p)\frac{1.2.3\ldots(m-p-1)}{(s-p)\ldots(s-m+1)} \sum_0^{m-p-1} \frac{(b-p-1)\ldots(b-m+i+1)}{1.2.3\ldots(m-i-p-1)} \times \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i}.$$

6. Le premier facteur sous le signe $\sum$ est le coefficient de $u^{b-m+i} v^{m-i-p-1}$, dans le développement de $(u+v)^{b-p-1}$; le second est le coefficient de $u^{n-i} v^i$ dans $(u+v)^n$. Si l'on multiplie les deux développements, le coefficient de $u^{s-m} v^{m-p-1}$ dans $(u+v)^{s-p-1}$, sera l'expression de $\sum_0^{m-p-1}$. On conclut de là

$$P = \frac{b-p}{s-p}.$$

7. Ainsi, la probabilité d'extraire de l'urne B une boule blanche, après que l'on en a déjà tiré p, est indépendante du nombre de boules que contenait cette urne; elle est la même que celle d'extraire une boule blanche d'une urne qui en contiendrait $b-p$ blanches et n noires. Un raisonnement très simple va servir à vérifier qu'il en doit être ainsi.

Supposons qu'au lieu de prendre m boules de l'urne A, pour les placer, sans les voir, dans l'urne B, nous n'ayons rien changé à la composition de cette première urne. Supposons de plus qu'ayant fait p tirages, nous ayons amené chaque fois une boule blanche : la probabilité d'en extraire encore une au tirage suivant, est $\frac{b-p}{s-p}$. Or, $p+1$ étant au plus égal à m, on peut regarder les p boules déjà extraites, plus celle que l'on va tirer, comme faisant partie d'un groupe de m boules, isolées parmi les s boules de l'urne A. On peut faire, sur la composition de ce groupe, absolument les mêmes hypothèses que l'on ferait sur celle de l'urne B; ce groupe inconnu peut donc remplacer l'urne B, etc.

8. Il est bien évident actuellement, que si, indépendamment des p boules blanches, on avait tiré de l'urne B, q boules noires, la probabilité d'extraire encore une boule blanche, serait la même que si le tirage s'était fait directement dans l'urne A, c'est-à-dire que l'on aurait

$$P = \frac{b-p}{s-(p+q)}.$$

9. En supposant $b = m = n$, on retombe sur un problème de probabilités inséré dans un autre recueil, et dont la solution est fausse, puisqu'elle conduit à $P = \frac{1}{2}$, tandis que l'on doit trouver $P = \frac{n-p}{2n-p}$.

SECOND PROBLÈME.

Une urne contient b *boules blanches et* n *boules noires; une autre urne renferme* b′ *boules blanches et* n′ *boules noires. On tire au hasard* p *boules de la première urne, et* p′ *boules de la seconde; et l'on réunit ces* p + p′ *boules dans une troisième urne. Quelle est la probabilité d'extraire de celle-ci une boule blanche?*

10. En posant $b + n = s$, $b' + n' = s'$, puis développant un calcul assez long, que je supprime, on trouve pour la probabilité demandée,

$$P = \frac{b}{s} \cdot \frac{p}{p + p'} + \frac{b'}{s'} \cdot \frac{p'}{p + p'}.$$

11. A l'aide du problème qui précède, on peut arriver à ce résultat d'une manière très simple.

Cherchons la probabilité d'extraire de la troisième urne, une boule blanche provenant de la première. Cette probabilité est celle d'un évènement composé; car il faut : 1° que la boule appartienne à la premiere urne; 2° qu'elle soit blanche.

D'abord, la probabilité que la boule tirée de la troisième urne provient de la première urne, est $\frac{p}{p + p'}$. En second lieu, si l'on avait mis à part les p boules extraites de la première urne, la probabilité de la sortie d'une boule blanche au moyen d'un tirage fait dans ces p boules, serait, par le premier problème, égale à $\frac{b}{s}$ [*].

En multipliant ces deux probabilités simples, on obtient pour la probabilité de la sortie d'une boule blanche provenant de la première urne, $\frac{b}{s} \cdot \frac{p}{p + p'}$. Et si actuellement on demande d'extraire de la troisième urne une boule blanche, sans déterminer d'où elle doit provenir, on obtient $P = \frac{b}{s} \cdot \frac{p}{p + p'} + \frac{b'}{s'} \cdot \frac{p'}{p + p'}$, comme ci-dessus.

---

[*] Cela résulterait aussi d'un Mémoire de M. Mondésir, inséré dans ce Journal, tome II, page 3.

12. Si, au lieu de deux urnes, il y en a m, dont on ait ôté respectivement $p, p', p'',\ldots$ boules pour les mettre dans une dernière urne, la probabilité d'extraire de celle-ci une boule blanche, aura pour valeur,

$$P=\frac{b}{s}\cdot\frac{p}{p+p'+\ldots}+\frac{b'}{s'}\cdot\frac{p'}{p+p'+p''+\ldots}+\ldots$$

13. Supposons

$$p=p'=p''=\ldots;$$

il vient

$$P=\frac{1}{m}\left(\frac{b}{s}+\frac{b'}{s'}+\frac{b''}{s''}+\ldots\right).$$

De là on conclut facilement ce théorème très simple, et qui peut avoir des applications :

Soit un nombre quelconque d'urnes renfermant des boules de différentes couleurs, en quantités déterminées. On tire de chaque urne un même nombre de boules que l'on réunit, sans les voir, dans une dernière urne. La probabilité d'extraire de celle-ci une boule d'une couleur donnée est égale à la probabilité d'amener une boule de cette même couleur en mettant, au hasard, la main dans l'une des urnes, avant l'enlèvement des boules.

(Février 1840.)