JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P.-H. BLANCHET

Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 65-68.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__65_0>

Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville,

Par M. P.-H. BLANCHET [*].

« Dans le dernier cahier du *Journal de Mathématiques*, vous avez inséré une Note de M. Bertrand [**]. Ce jeune géomètre, qui donne à la science de si brillantes espérances, y a complété une démonstration ingénieuse de M. Cauchy; mais il a, je crois, employé une espèce de continuité vers l'infini que peut-être il vaudrait mieux éviter.

» Au Collége Saint-Louis, en 1836, dans un cours qui avait lieu les vendredis seulement, la même difficulté s'était présentée à mon esprit. J'ai cru l'avoir écartée de la manière suivante :

» D'abord il suffit de vérifier l'indication de la formule dans le cas où la limite cherchée est nulle; car, en renversant, on la vérifiera pour l'infini. Cela posé, on a, dans le voisinage de $x = x_0$,

$$\frac{f(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{\dfrac{1}{\mathrm{F}(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}} = \frac{\dfrac{\mathrm{F}'(\xi)}{[\mathrm{F}(\xi)]^2}}{\dfrac{f'(\xi)}{[f(\xi)]^2}},$$

[*] Depuis l'envoi de cette Lettre, M. Duhamel m'a dit qu'il avait présenté à peu près de la même manière la deuxième partie de ma Note dans son Cours lithographié il y a plusieurs années, et que la première partie se trouvait reproduite dans les feuilles imprimées du même Cours, distribuées aux élèves cette année, postérieurement à la remarque de M. Bertrand. Je n'ai pas entre les mains les moyens de faire la comparaison. P.-H. B.

[**] Il s'est glissé dans la Note de M. Bertrand deux fautes d'impression que l'on corrigera à l'aide de l'errata suivant : page 15, ligne 5 en remontant, *au lieu de* $a + \theta(h - h')$, *lisez* $a + h' + \theta(h - h')$; page 16, ligne 15, *au lieu de* infini, *lisez* nul. J. L.

en désignant par ξ une valeur comprise entre x et x_0. On tire de là

$$\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \frac{\frac{f(\xi)}{F(\xi)}}{\frac{f(x)}{F(x)}} \times \frac{f(\xi)}{F(\xi)}, \quad \text{ou} \quad \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \left[\frac{\frac{f(\xi)}{F(\xi)}}{\frac{f(x)}{F(x)}}\right]^2 \cdot \frac{f(x)}{F(x)}.$$

Si l'on fait converger x, et à plus forte raison ξ, vers x_0, la quantité $\frac{f(\xi)}{F(\xi)}$ finira par devenir plus petite que $\frac{f(x)}{F(x)}$, qui converge vers 0; donc, en général, le rapport

$$\frac{\frac{f(\xi)}{F(\xi)}}{\frac{f(x)}{F(x)}}$$

finira par devenir plus petit que 1; donc aussi la valeur absolue de $\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$ sera plus petite que celle de $\frac{f(\xi)}{F(\xi)}$, ou, à plus forte raison, que celle de $\frac{f(x)}{F(x)}$. Donc, si ce dernier rapport s'évanouit pour $x = x_0$, le premier s'évanouira aussi, ce qu'il fallait prouver.

» On voit, en même temps, que le premier rapport ne sera jamais un infiniment petit d'un ordre moins élevé que le dernier.

» Remarque analogue si la limite cherchée était infinie.

» Le cas exceptionnel de $x_0 = \infty$ n'est pas plus embarrassant. Il suffit de remplacer x par $\frac{1}{z}$; pour $x = \infty$, on aura $z = 0$, qui ne peut faire exception; donc

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{F'\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)},$$

sous les conditions de continuité par rapport à z. ζ est compris entre z et 0, et ξ entre x et ∞.

» D'ailleurs le théorème fondamental de M. Cauchy peut être étendu à ce cas.

» Il est très facile de réunir, si l'on veut, les deux difficultés.

» Permettez-moi, Monsieur, de profiter encore de cette occasion pour vous adresser une démonstration de la possibilité de permuter, en général, l'ordre de deux différentiations. Elle a été faite pour le même Cours.

» *Lemme*. Si l'on a

$$\lim._\alpha \varphi(x, \alpha) = \psi(x),$$

on aura aussi

$$\lim._\alpha \varphi'_x(x, \alpha) = \psi'(x),$$

sous les conditions ordinaires de continuité dans le voisinage des valeurs que l'on considérera.

» En effet, on aura

$$\lim._\alpha \varphi(x + h, \alpha) = \psi(x + h);$$

par suite

$$\lim._\alpha [\varphi(x + h, \alpha) - \varphi(x, \alpha)] = \psi(x + h) - \psi(x),$$

ou, d'après un théorème connu de M. Cauchy,

$$\lim._\alpha h\varphi'_x(x + \Theta h, \alpha) = h\psi'(x + \theta h),$$

ou encore

$$h.\lim._\alpha \varphi'_x(x + \Theta h, \alpha) = h.\psi'(x + \theta h).$$

On peut diviser par h, que nous supposerons infiniment petit mais non pas nul, ce qui donne

$$\lim._\alpha \varphi'_x(x + \Theta h, \alpha) = \psi'(x + \theta h).$$

Or, pour h infiniment petit, le premier membre de la dernière équation diffère infiniment peu de $\lim._\alpha \varphi'_x(x, \alpha)$; le deuxième membre diffère infiniment peu de $\psi'(x)$, donc la différence entre ces deux quantités est infiniment petite, et, comme elle est constante, elle est nulle. Donc

$$\lim._\alpha \varphi'_x(x, \alpha) = \psi'(x).$$

» *Théorème*.

$$f''_{y,x}(x, y) = f''_{x,y}(x, y).$$

En effet,

$$\lim._h \frac{f(x+h,\, y)-f(x,\, y)}{h} = f'_x(x,\, y);$$

donc, en vertu du lemme précédent,

$$\lim._h \frac{f'_y(x+h,\, y)-f'_y(x,\, y)}{h} = f''_{x,y}(x,\, y),$$

ou

$$f''_{y,x}(x,\, y) = f''_{x,y}(x,\, y).$$

Cette démonstration suppose seulement que la dérivée seconde et que les dérivées premières sont continues dans le voisinage des valeurs que l'on considère. »

(8 mars 1841.)