JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BINET

Remarque sur une courbe qui est sa propre développée, et sur un genre de surfaces qui contiennent le lieu des centres de l'une de leurs deux espèces de courbures

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 61-64.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__61_0>

Remarque sur une courbe qui est sa propre développée, et sur un genre de surfaces qui contiennent le lieu des centres de l'une de leurs deux espèces de courbures;

Par M. J. BINET,

Professeur au Collége de France.

La cycloïde et la spirale logarithmique ont été remarquées par les géomètres comme se reproduisant, en quelque sorte, dans leurs développées. Mais j'ignore si l'on a reconnu qu'il existe des courbes qui sont leurs développées à elles-mêmes.

L'équation polaire de la spirale logarithmique étant $u^m = e^t$, u sera le rayon vecteur et t l'azimuth de ce rayon, en sorte que si t s'accroît, on parcourra la courbe dans le sens de l'accroissement de u, et quand t diminuera on suivra la courbe en sens contraire : m est un paramètre constant. Si, par exemple, on pose $t - \frac{3\pi}{2}$ à la place de t, on aura

$$u_1^m = e^{t - \frac{3\pi}{2}} = u^m . e^{-\frac{3\pi}{2}}.$$

Ce point de la courbe sera situé sur une perpendiculaire au rayon vecteur u. On sait que sur ce même rayon vecteur se trouve le centre de courbure, répondant au point (t, u), et que ses coordonnées sont

$$t_1 = t - \frac{3\pi}{2}, \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{1}{m} u,$$

(Voyez le *Calcul différentiel* de M. Lacroix); il s'ensuit qu'il est sur la courbe $u_1 = \frac{1}{m} e^{\frac{1}{m}\left(t_1 + \frac{3\pi}{2}\right)}$, laquelle est une spirale égale à la développante, mais autrement placée sur le plan des coordonnées, selon la remarque de Jacques Bernoulli; et que par suite le rayon u_1 forme avec la dèveloppée, l'angle constant dont m est la tangente. On peut disposer de ce paramètre de manière que le centre de courbure coïncide avec le point de la développante, que nous avons mentionné ci-dessus, et dont les coordonnées sont

$$t_1 = t - \frac{3\pi}{2}, \quad u_1 = ue^{-\frac{3\pi}{2m}},$$

il faudra pour cela que $\frac{1}{m}u = ue^{-\frac{3\pi}{2m}}$; en élevant à la puissance m, et en divisant par u^m, on aura

$$m^m = e^{\frac{3\pi}{2}},$$

ce qui donne pour m la valeur approximative $m = 3{,}64427\ldots.$ Cette valeur de m fournira une spirale logarithmique dont la développée sera située sur la courbe elle-même.

On peut obliger le centre de courbure à se placer sur une autre spire intérieure à celle que nous venons d'employer, mais toujours sur la même direction perpendiculaire au rayon vecteur u; ainsi l'on pourra le faire coïncider avec le point

$$t_1 = t - \frac{7\pi}{2}, \quad u_1 = u.e^{-\frac{7\pi}{2m}},$$

et l'on aura, pour déterminer m, l'équation

$$m^m = e^{\frac{7\pi}{2}}.$$

Cette valeur donnera une autre spirale logarithmique qui sera aussi sa développée à elle-même. En général, si l'on détermine m par l'équation

$$m^m = e^{(4i-1)\frac{\pi}{2}},$$

i étant un entier positif, on aura encore le paramètre d'une spirale logarithmique qui contiendra sa développée : ainsi il existe un nombre infini de spirales qui offrent cette singularité d'être leurs développées.

Cette propriété repose sur celle de la spirale logarithmique, d'avoir pour développée une courbe de forme identique à la développante, et qui pourrait lui être superposée par un déplacement. Dans une autre note, nous nous occuperons de la question de savoir quelles sont les courbes qui ont ce caractère, de se reproduire dans leurs développées : elle conduit à une équation aux différences mêlées, qui exige la résolution d'une équation transcendante de la forme

$$m^m = A.$$

Mais en ce moment nous allons donner la construction d'un genre de surfaces courbes qui renferment les centres de l'une de leurs deux espèces de courbures ; propriété analogue à celle qui vient d'être constatée pour les spirales logarithmiques, dont on a déterminé convenablement le paramètre m.

Ayant choisi arbitrairement deux surfaces quelconques S, S_1, on leur mènera un plan tangent R : on les suppose telles que ce plan puisse librement rouler, sans glisser, sur S et S_1 ; on tracera sur le plan tangent mobile R l'une des spirales particulières λ renfermant sa propre développée. Entraînée avec le plan R dans son roulement sur les surfaces S, S_1, la courbe λ deviendra la génératrice d'une surface courbe Λ, qui offrira cette propriété que, dans chacune de ses positions, λ sera une ligne de courbure de la surface Λ ; et les centres de courbure de Λ, considérés dans le sens de λ, seront situés sur la courbe λ elle-même, prise dans cette position. Dans son mouvement général, la courbe λ aura donc engendré à la fois la surface Λ et l'une des nappes, lieu des centres de ses courbures principales. Le lieu des centres de la seconde espèce de courbure de Λ sera la surface développable à laquelle le plan R demeure tangent dans toutes ses positions, et dont il est l'enveloppée mobile, selon la dénomination usitée par Monge : cette surface enveloppe les deux arbitraires S et S_1, et sa forme ne dépend que d'elles seules.

Le genre de surfaces dont je viens de donner la description, est un cas spécial des surfaces décrites par une courbe plane quelconque, dont le plan roule sur une surface développable arbitraire : on doit à Monge la connaissance des propriétés extrêmement remarquables qui résultent de cette génération ; il les a exposées dans un de ses plus élégants Mémoires (tome VI du *Journal de l'École Polytechnique*)

L'équation aux différences partielles, qui répond au cas général de Monge, est du troisième ordre; celle qui exprimerait la génération particulière dont nous venons de nous occuper ne serait que du second ordre.

On pourrait réduire à un point la surface S_1, et alors la surface développable engendrée par le plan roulant sur S, et passant par le point S_1, ne serait plus qu'un cône arbitraire dont le sommet serait en S_1. Si la surface S se réduisait aussi à des dimensions infiniment petites ou à un point, le plan R, assujéti à passer par la droite SS_1, ne permettrait plus à la courbe λ qu'une simple révolution autour de l'axe de rotation SS_1; il n'y aurait plus d'arbitraire, dans ce mode de génération, que les grandeurs nécessaires pour fixer la position de la courbe λ à l'égard de l'axe de rotation.

En supposant encore le roulement du plan R dirigé par deux surfaces arbitraires S, S_1, si l'on traçait sur ce plan mobile une courbe λ dont la développée λ_1 lui fût égale, mais sans coïncider avec elle; la surface Λ_1 décrite par λ_1, serait toujours le lieu des centres répondant aux lignes de courbures λ de la surface Λ: mais la forme de Λ_1 serait en général très différente de celle de Λ.