JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BINET

Note sur la Convergence des Suites

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 495-496.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__495_0>

Note sur la Convergence des Suites;

Par M. J. BINET.

On doit à M. Cauchy une règle importante sur la convergence de la série $U = u_1 + u_2 + \ldots u_n + u_{n+1} + \text{etc.}$: il l'a déduite de la comparaison des termes de rangs très-avancés u_n, u_{n+1}, etc., que l'on suppose positifs, avec ceux de la suite

$$\frac{1}{n^{1+\alpha}} + \frac{1}{(n+1)^{1+\alpha}} + \frac{1}{(n+2)^{1+\alpha}} + \text{etc.},$$

dont la convergence ou la divergence dépendent du signe de α. (Voyez l'*Analyse algébrique* et le deuxième volume des *Exercices de Mathématiques* de M. Cauchy.) En partant de cette dernière proposition, l'on reconnaît facilement que la série

$$S_n = \frac{1}{n^{1+\alpha_n}} + \frac{1}{(n+1)^{1+\alpha_{n+1}}} + \frac{1}{(n+2)^{1+\alpha_{n+2}}} + \text{etc.}$$

sera convergente toutes les fois que α_n, α_{n+1}, α_{n+2}, etc., formeront une suite indéfiniment croissante; que S_n demeure encore convergente si les α_n, α_{n+1}, ..., finissent par devenir positifs à partir d'un certain rang, et continuent à rester positifs et finis jusqu'à α_∞. La série serait divergente si, à partir d'un certain rang assignable p, la suite des α_p, α_{p+1}, etc., entrait dans le négatif et y restait jusqu'à l'infini.

Ayant admis que u_n, u_{n+1}, etc., sont positifs, nous pouvons poser, en général,

$$u_n = \frac{1}{n^{1+\alpha_n}},$$

et alors la partie $u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \text{etc.} = U_n$ de la série proposée sera remplacée par

$$U_n = \frac{1}{n^{1+\alpha_n}} + \frac{1}{(n+1)^{1+\alpha_{n+1}}} + \frac{1}{(n+2)^{1+\alpha_{n+2}}} + \text{etc.}$$

Cette série, d'après la remarque précédente, exige, pour la convergence, que la quantité α_p évaluée pour de hautes valeurs de $p > n$ demeure positive, sans pouvoir devenir infiniment petite; mais elle pourra admettre pour α_p toute grandeur positive indéfiniment croissante avec p. Or de l'équation $u_n = \frac{1}{n^{1+\alpha_n}}$ on tire $n^{\alpha_n} = \frac{1}{nu_n}$, et en prenant les logarithmes,

$$\alpha_n = -\frac{l(nu_n)}{l(n)}.$$

α_n devant demeurer positif pour de hautes valeurs que nous dénoterons par n, au lieu de p, il faut que le logarithme $l(nu_n)$ soit constamment négatif; à cette première condition l'on doit joindre celle qui veut que $-\frac{l(nu_n)}{l(n)}$ demeure ou indéfiniment croissant ou tout au moins fini quand n s'avance vers l'infini. Si au contraire la fonction $-\frac{l(nu_n)}{l(n)}$ décroît continuellement à mesure que n augmente, jusqu'à devenir infiniment petite, nulle ou négative quand $n = \infty$, la série U_n n'admettra pas de limite finie et par conséquent la série U, dont elle fait partie, sera divergente.

En énonçant son théorème sous une autre forme, M. Cauchy dit que la convergence de la série U exige que le rapport $-\frac{l(nu_n)}{l(n)}$ converge vers une limite positive finie et *déterminée* g : la proposition est ainsi exactement exprimée, pour le cas où ce rapport décroît avec $\frac{1}{n}$; mais il nous semble utile d'ajouter que si ce rapport est indéfiniment croissant avec n dans le sens positif et n'admet plus de limite déterminée, la convergence de la série n'en devient que plus rapide. Avec cette extension le critérium comprend la plupart des règles proposées pour constater la convergence d'une suite infinie. Nous montrerons, dans une autre occasion, comment il peut être employé dans des cas qui ont été jugés difficiles, par exemple, lorsque la loi de la série est telle que $u_{n+1} = u_n(1-\beta_n)$, β_n exprimant une fonction décroissante avec $\frac{1}{n}$ et qui devient infiniment petite pour des valeurs infinies de n.

***ERRATA** pour le Mémoire de* M. LIOUVILLE, *sur l'élimination.*

(Cahiers de septembre, octobre et novembre.)

Page 380, ligne 16, *au lieu de* $\sum \frac{1}{x} = -\sum \frac{k}{h} = -\frac{\Sigma k}{\Sigma h}$, *lisez* $\sum \frac{1}{x} = -\sum \frac{k}{h}$

Page 380, ligne 20, *supprimez la fin de la phrase à partir des mots* ou (ce qui revient au même) est égale, etc.

Page 411, ligne 8, *au lieu de* ω et θ, *lisez* ω et Ω.