JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CATALAN

Problèmes de calcul intégral

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 419-440.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__419_0>

PROBLÈMES

DE CALCUL INTÉGRAL,

Par E. CATALAN.

I.

Un cône a pour base un petit cercle d'une sphère donnée, et pour sommet un point de la surface sphérique. On demande la mesure de l'angle conique.

PREMIÈRE SOLUTION.

Je prends pour origine le sommet du cône; pour plan des zx, le plan diamétral principal commun aux deux surfaces; je suppose l'axe des z perpendiculaire au plan de la base du cône. Enfin, les trois axes seront rectangulaires.

Cela étant, l'équation de la sphère peut s'écrire

$$(x-\alpha)^2+y^2+(z-\gamma)^2=1,$$

sous la condition

$$\alpha^2+\gamma^2=1.$$

On trouve facilement que l'équation du cône est de la forme

$$(x^2+y^2)(\gamma+\delta)^2-z^2(\mathrm{R}^2-\alpha^2)-2\alpha(\gamma+\delta)zx=0,$$

en prenant

$$\delta^2+\mathrm{R}^2=1.$$

Mais

$$R^2 - \alpha^2 = \gamma^2 - \delta^2;$$

ce qui donne plus simplement

$$(\gamma + \delta)(x^2 + y^2) - z^2(\gamma - \delta) - 2\alpha z x = 0.$$

Maintenant, pour avoir la mesure de l'angle conique, je coupe le cône par une sphère concentrique, ayant pour rayon l'unité. Son équation sera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

La courbe d'intersection des deux surfaces se projettera sur le plan des zx, suivant une courbe du second degré, dont l'équation est

$$2z(\gamma z + \alpha x) = \gamma + \delta.$$

Si l'on construit l'hyperbole représentée par cette équation, et le cercle qui a pour rayon l'unité, la portion de surface sphérique qu'il s'agit d'évaluer se trouvera projetée sur l'espace compris entre ces deux courbes. D'ailleurs, comme cette surface est partagée en deux parties symétriques par le plan zx, on aura, en représentant son aire par A :

$$A = 2\int\int \frac{dx\,dz}{\sqrt{1 - x^2 - z^2}}.$$

En prenant des coordonnées polaires, cette formule devient

$$A = 2\int\int \frac{\rho\,d\rho\,d\omega}{\sqrt{1 - \rho^2}}.$$

Avant d'aller plus loin, il convient, pour simplifier l'intégration, de transformer les axes.

L'équation polaire de la courbe est

$$2\rho^2[\gamma \sin\omega + \alpha\cos\omega]\sin\omega = \gamma + \delta.$$

Je déplace l'axe polaire d'un angle indéterminé m, en prenant

$$\omega = m + \theta.$$

En même temps, je fais

$$\gamma = \cos\lambda, \quad \alpha = \sin\lambda.$$

L'équation devient

$$2\rho^2 \sin(m + \theta + \lambda)\sin(m + \theta) = \gamma + \delta,$$

ou

$$\rho^2 [\cos\lambda - \cos(2m + 2\theta + \lambda)] = \gamma + \delta.$$

Je vais disposer de m, de façon que ρ^2 ne change pas, quand on remplace θ par $-\theta$. Il est clair qu'il suffit de poser

$$2m + \lambda = \pi;$$

d'où

$$m = \frac{\pi - \lambda}{2}.$$

L'équation polaire est actuellement

$$\rho^2 = \frac{\gamma + \delta}{\cos\lambda + \cos 2\theta};$$

et nous aurons

$$A = 4\iint \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{1 - \rho^2}}.$$

On devra intégrer, par rapport à ρ, de

$$\rho = \sqrt{\frac{\gamma + \delta}{\cos\lambda + \cos 2\theta}}$$

jusqu'à

$$\rho = 1;$$

et par rapport à θ, de

$$\theta = 0 \text{ à } \theta = \theta_1;$$

ce dernier arc étant déterminé par l'équation

$$1 = \frac{\gamma + \delta}{\cos\lambda + \cos 2\theta_1},$$

qui donne

$$\cos 2\theta_1 = \delta.$$

En intégrant par rapport à ρ, l'on obtient

$$A = 4\int_0^{\theta_1} d\theta \sqrt{1 - \frac{\gamma + \delta}{\cos\lambda + \cos 2\theta}},$$

ou

$$A = 4\int_0^{\theta_1} d\theta \sqrt{\frac{\cos 2\theta - \delta}{\cos 2\theta + \gamma}}.$$

Pour réduire en fonctions elliptiques, je pose

$$\operatorname{tang}\theta = p\sin\varphi;$$

d'où

$$d\theta = \frac{p}{1 + p^2\sin^2\varphi}\cos\varphi\, d\varphi, \quad \cos 2\theta = \frac{1 - p^2\sin^2\varphi}{1 + p^2\sin^2\varphi},$$

$$\frac{\cos 2\theta - \delta}{\cos 2\theta + \gamma} = \frac{(1 - \delta) - p^2(1 + \delta)\sin^2\varphi}{(1 + \gamma) - p^2(1 - \gamma)\sin^2\varphi}.$$

Prenons pour valeur de l'indéterminée,

$$p = \sqrt{\frac{1 - \delta}{1 + \delta}}:$$

ceci est permis, car

$$\operatorname{tang}\theta_1 = \sqrt{\frac{1 - \delta}{1 + \delta}};$$

donc l'arc θ croissant de 0 à θ_1, φ croîtra de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

L'intégrale qu'il s'agit de réduire devient

$$A = 4p\sqrt{1-\delta}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{1+p^2\sin^2\varphi} \frac{1}{\sqrt{(1+\gamma) - \frac{1-\delta}{1+\delta}(1-\gamma)\sin^2\varphi}}.$$

En posant

$$c^2 = \frac{1-\delta}{1+\delta}\frac{1-\gamma}{1+\gamma},$$

et remplaçant p par sa valeur, elle se transforme facilement en

$$A = \frac{8}{\sqrt{(1+\gamma)(1+\delta)}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\left(1+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}c^2\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}$$

$$-4\sqrt{\frac{1+\delta}{1+\gamma}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}.$$

Donc

$$A = \frac{8}{\sqrt{(1+\gamma)(1+\delta)}}\Pi_1\left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}c^2, c\right) - 4\sqrt{\frac{1+\delta}{1+\gamma}}F_1(c).$$

Si l'on suppose

$$\alpha = 0,$$

ce qui donne

$$\gamma = 1,$$

la formule générale peut s'exprimer sous forme finie, et l'on trouve

$$A = 2\pi\left(1-\sqrt{\frac{1+\delta}{2}}\right),$$

ainsi qu'on peut le vérifier directement.

Pour exprimer A, seulement par des fonctions de première et de seconde espèce, je pose

$$n = \cot^2\mu;$$

et je prends la formule de Legendre (*Exercices*, tome Ier, page 137),

$$\frac{\Delta(b,\mu)}{\sin\mu\cos\mu}\,\Pi_1(n,c) = \tfrac{1}{2}\pi + \frac{\sin\mu}{\cos\mu}\,\Delta(b,\mu)\,F_1(c) + F_1(c)\,F(b,\mu)$$
$$- F_1(c)\,E(b,\mu) - E_1(c)\,F(b,\mu).$$

On a

$$\cot^2\mu = \frac{1-\delta}{1+\delta}, \qquad \sin\mu = \sqrt{\frac{1+\delta}{2}}, \qquad \cos\mu = \sqrt{\frac{1-\delta}{2}},$$

$$b^2 = 1 - c^2 = 2\,\frac{\delta+\gamma}{(1+\delta)(1+\gamma)}, \qquad \sqrt{1 - b^2\sin^2\mu} = \sqrt{\frac{1-\delta}{1+\gamma}}, \text{ etc.};$$

et enfin,

$$A = 2\pi + 4\,[F_1(c)\,F(b,\mu) - F_1(c)\,E(b,\mu) - E_1(c)\,F(b,\mu)].$$

SECONDE SOLUTION.

Le problème dont nous venons de développer la solution peut encore s'énoncer en ces termes :

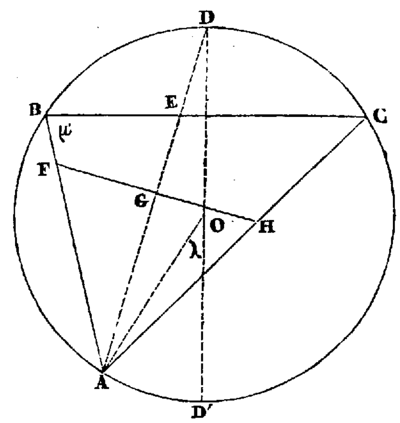
Un cône oblique à base circulaire étant donné, on le coupe par une sphère concentrique, et l'on demande de calculer la portion de surface sphérique interceptée.

Dans une précédente Note [*], nous avons résolu la même question pour le cas d'un *cône droit à base elliptique;* mais comme un cône oblique à base circulaire peut toujours être regardé comme étant droit et à base elliptique, il est évident que la question actuelle rentre dans l'autre. Il

---

[*] Page 340 de ce volume (cahier de septembre).

résulte de cette observation, que la valeur de A, que nous venons de calculer directement, doit pouvoir se conclure de celle qui se trouvait dans la Note précitée.



Soit ABDC la section faite dans la sphère par un plan diamétral, passant par le sommet du cône, perpendiculairement à sa base. La trace du plan de cette base sur celui de la figure, ou le diamètre du petit cercle de la sphère, sera BC. Soient BA et AC les arêtes *minimum* et *maximum* du cône. Représentons par λ l'angle AOD′ que forme le rayon AO mené au sommet du cône avec le diamètre DD′ perpendiculaire à sa base, et par μ l'angle ABC.

Si nous joignons AD, cette droite, bissectrice de l'angle BAC, sera l'axe du cône. Prenons $AG = OD = 1$, et par le point G, menons un plan perpendiculaire à AG : la section faite dans ce cône sera une ellipse ayant FH pour petit axe et G pour centre. Si le lecteur se reporte à la Note déjà citée, il verra que $FG = b$. L'autre demi-axe, qui se projette en G, est celui que nous avions représenté par a. Calculons ces deux quantités.

L'inspection de la figure donne facilement

$$A = \pi + \lambda - 2\mu,$$

$$AC = 2\sin\mu, \quad BC = 2\sin(2\mu - \lambda), \quad AB = 2\sin(\mu - \lambda).$$

Ensuite, AED étant la bissectrice de l'angle BAC, on a

$$\mathrm{BE} = \mathrm{AB}\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\pi+\lambda-2\mu)}{\sin\left(\mu+\frac{\pi+\lambda-2\mu}{2}\right)} = 2\sin(\lambda-\mu)\,\frac{\cos\left(\mu-\frac{\lambda}{2}\right)}{\cos\frac{\lambda}{2}},$$

$$\mathrm{CE} = 2\sin\mu\,\frac{\cos\left(\mu-\frac{\lambda}{2}\right)}{\cos\frac{\lambda}{2}};$$

et ensuite

$$\mathrm{AE} = 2\sin\mu\,\frac{\sin(\mu-\lambda)}{\cos\frac{\lambda}{2}}.$$

En nommant Y l'ordonnée du petit cercle pour le point E,

$$\mathrm{Y}^2 = \mathrm{BE}.\mathrm{CE},$$

donc

$$\mathrm{Y} = 2\,\frac{\cos\left(\mu-\frac{\lambda}{2}\right)}{\cos\frac{\lambda}{2}}\sqrt{\sin\mu.\,\sin(\mu-\lambda)}.$$

La génératrice projetée sur AE coupe les droites projetées en G, E, de manière que

$$\frac{\mathrm{Y}}{a} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AG}};$$

ce qui donne

$$a = \frac{\cos\left(\mu-\frac{\lambda}{2}\right)}{\sqrt{\sin\mu.\sin(\mu-\lambda)}}.$$

On a

$$\sin\mu.\,\sin(\mu-\lambda) = \frac{\cos\lambda-\cos(2\mu-\lambda)}{2},$$

$$\cos\left(\mu-\frac{\lambda}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(2\mu-\lambda)}{2}};$$

donc

$$a = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\mu - \lambda)}{\cos\lambda - \cos(2\mu - \lambda)}} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{\cos\lambda + \cos A}},$$

ou

$$a = \sqrt{\frac{1-\delta}{\gamma+\delta}};$$

et

$$b = \mathrm{FG} = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}},$$

ou

$$b = \sqrt{\frac{1-\delta}{1+\delta}}.$$

Dans la première Note, nous avions pour le carré du module :

$$c^2 = \frac{a^2 - b^2}{1 + a^2}.$$

En remplaçant a et b par les valeurs qui précèdent, on trouve

$$c^2 = \frac{1-\delta}{1+\delta}\,\frac{1-\gamma}{1+\gamma}.$$

Cette valeur est précisément celle que nous avons employée ci-dessus.

Si nous prenons encore

$$\sin^2\theta' = \frac{b^2(1+a^2)}{a^2(1+b^2)},$$

nous trouverons

$$\sin\theta' = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}, \quad \cos\theta' = \sqrt{\frac{1-\gamma}{2}}.$$

A l'aide de ces différentes valeurs, et en employant la formule trouvée dans la Note dont il s'agit, on trouve, pour la mesure de l'angle conique,

$$A = 4\left[E_1(c)F(c',\theta')+F_1(c)E(c',\theta')-F_1(c)F(c',\theta')-\frac{\gamma+\delta}{\sqrt{(1+\delta)(1+\gamma)}}F_1(c)\right].$$

Dans cétte formule, c' représente le module complémentaire.

Nous avons trouvé ci-dessus, en posant

$$\sin\mu = \sqrt{\frac{1+\delta}{2}},$$

$$\cos\mu = \sqrt{\frac{1-\delta}{2}}:$$

$$A = 2\pi + 4\left[F_1(c)F(c',\mu) - F_1(c)E(c',\mu) - E_1(c)F(c',\mu)\right].$$

On pourrait vérifier l'identité de ces valeurs en partant des relations qui existent entre les fonctions de même module ; mais cette recherche étant longue et peu utile, je ne m'y arrêterai pas.

Dans la première solution, nous avons dit qu'en supposant $\gamma = 1$, on trouve

$$4\int_0^{\theta_1} d\theta \sqrt{\frac{\cos 2\theta - \delta}{\cos 2\theta + \gamma}} = 2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{1+\delta}{2}}\right).$$

Nous allons développer le calcul, qui nous conduira à l'évaluation d'une partie remarquable de la surface sphérique.

Désignons par B l'intégrale prise de o à θ; nous aurons d'abord, en remplaçant δ par $2\sin^2\mu - 1$,

$$B = \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\cos\theta}\sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\mu}.$$

Posons

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{y^2+\sin^2\mu}{y^2+1}};$$

nous aurons

$$\sin\theta = \frac{\cos\mu}{\sqrt{y^2+1}}, \quad d\theta = -\cos\mu \frac{y\,dy}{(1+y^2)\sqrt{y^2+\sin^2\mu}},$$

$$\sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\mu} = \frac{y\cos\mu}{\sqrt{y^2+1}}.$$

D'ailleurs $\theta = 0$ donne $y = \infty$; donc

$$B = \cos^2\mu \int_y^\infty \frac{y^2 dy}{(y^2+1)(y^2+\sin^2\mu)}.$$

On a identiquement

$$\frac{y^2}{(y^2+1)(y^2+\sin^2\mu)} = \frac{1}{y^2+\sin^2\mu} - \frac{1}{(y^2+1)(y^2+\sin^2\mu)}$$

$$= \frac{1}{y^2+\sin^2\mu} - \frac{1}{\cos^2\mu}\left(\frac{1}{y^2+\sin^2\mu} - \frac{1}{y^2+1}\right).$$

Donc

$$B = \int_y^\infty \frac{dy}{y^2+1} - \sin^2\mu \int_y^\infty \frac{dy}{y^2+\sin^2\mu};$$

ce qui donne immédiatement

$$B = (1-\sin\mu)\frac{\pi}{2} + \sin\mu.\ \text{arc tang}\,\frac{y}{\sin\mu} - \text{arc tang}\, y.$$

On a

$$y = \sqrt{\frac{\cos^2\theta - \sin^2\mu}{\sin^2\theta}},$$

donc

$$\text{arc tang}\, y = \text{arc tang}\sqrt{\frac{\cos^2\theta - \sin^2\mu}{\sin^2\theta}}.$$

Si la tangente est

$$\sqrt{\frac{\cos^2\theta - \sin^2\mu}{\sin^2\theta}},$$

le cosinus sera

$$\frac{\sin\theta}{\cos\mu}.$$

De même pour le second arc, la tangente étant

$$\frac{\sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\mu}}{\sin\theta.\,\sin\mu},$$

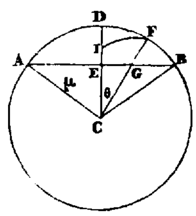
le cosinus sera

$$\frac{\sin\theta\sin\mu}{\cos\theta\cos\mu}.$$

La formule précédente devient donc

$$B = (1 - \sin\mu)\frac{\pi}{2} + \sin\mu \,\text{arc}\,(\cos = \tang\theta\tang\mu) - \text{arc}\left(\cos = \frac{\sin\theta}{\cos\mu}\right).$$

Considérons une sphère dont le rayon est pris pour unité.



Soit AB la projection d'un petit cercle, et soient CD, CF les traces de deux plans passant par le diamètre perpendiculaire à la figure, CD étant perpendiculaire à AB.

D'après ce que nous avons vu dans la première solution, si l'on suppose

$$\text{CAE} = \mu \quad \text{et} \quad \text{DCF} = \theta,$$

l'intégrale B représente l'aire de la portion de la sphère projetée suivant DEGF. Cette portion se compose du triangle birectangle projeté sur CDF, et formé par trois arcs de grands cercles, diminué du triangle rectangle projeté sur CEG, et formé de deux grands arcs et d'un petit. J'ignore si cette évalution avait déjà été faite.

Du point F comme pôle, avec un rayon sphérique $= AD = \frac{\pi}{2} - \mu$, traçons un arc de petit cercle; il rencontrera l'arc de grand cercle projeté sur CD en un point I. Si alors nous traçons l'arc de grand cercle IF, nous aurons dans l'espace un triangle sphérique IFD, rectangle en D. Représentons par F et I les angles aigus de ce triangle. Les formules de la trigonométrie sphérique donnent

$$\cos F = \operatorname{tang} DF \cot IF = \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}\mu,$$

$$\sin DF = \sin I . \sin IF,$$

d'où

$$\sin I = \frac{\sin\theta}{\cos\mu}.$$

Alors la formule précédente devient

$$B = (1 - \sin\mu)\frac{\pi}{2} + F\sin\mu - \left(\frac{\pi}{2} - I\right),$$

ou

$$B = I - \sin\mu\left(\frac{\pi}{2} - F\right);$$

et comme l'aire du triangle DIF serait exprimée par $I - \left(\frac{\pi}{2} - F\right)$, il s'ensuit qu'en la représentant par T, l'on a

$$B - T = (1 - \sin\mu)\left(\frac{\pi}{2} - F\right);$$

ce qui est assez simple.

II.

Problème. Déterminer le volume de la partie commune à un ellipsoïde et à une sphère concentriques?

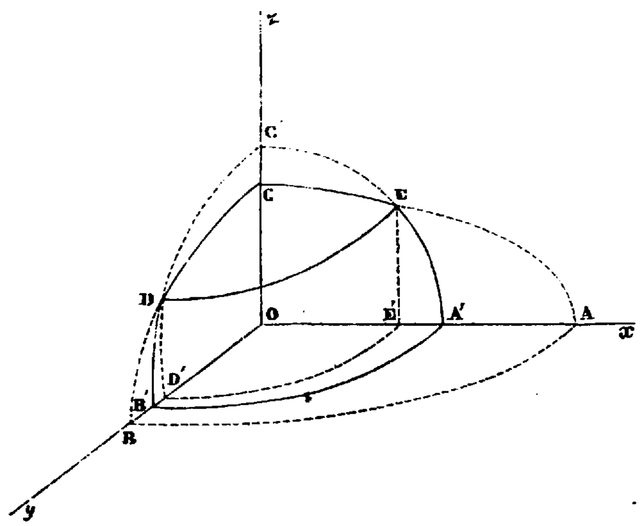
Prenons pour axes des coordonnées, les axes principaux de l'ellipsoïde : les équations des deux surfaces seront

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La sphère et l'ellipsoïde peuvent se couper de deux manières : ou bien l'ellipsoïde a quatre sommets extérieurs à la sphère, ou bien il n'en a que deux. Si, pour fixer les idées, on suppose

$$a > b > c,$$

le premier cas se présentera lorsque R sera compris entre b et c; et le second, lorsque R sera compris entre a et b. Je vais développer les calculs relatifs à la première hypothèse.



Soit OABC la portion de l'ellipsoïde déterminée par les parties positives des trois plans coordonnés, et soit OA'B'C' la portion correspondante de la sphère.

Les deux surfaces se coupent suivant une ligne DE, ayant pour projection sur le plan des xy la courbe D'E'. Il s'agit de trouver l'expression du volume limité par les trois plans coordonnés, la portion CDE de surface ellipsoïdale, et la partie B'DEA' de surface sphérique.

Soit V ce volume, et soit v le volume C'DEC; nous aurons d'abord

$$V = \frac{1}{6}\pi R^3 - v. \tag{2}$$

En second lieu, si z' et z'' représentent respectivement l'ordonnée de la surface sphérique et celle de la surface ellipsoïdale, répondant à un même système de valeurs de x et y, nous avons

$$v = \int\int (z' - z'')\, dx dy,$$

ou

$$v = \int\int \left[\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\right] dx dy. \tag{3}$$

L'intégration doit être étendue à tout l'espace OD'E'.

L'élimination de z entre les équations (1) donne, pour équation de D'E' :

$$x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) = R^2 - c^2. \tag{4}$$

Afin d'intégrer $z'dxdy$, je pose

$$x = \rho\cos\omega, \quad y = \rho\sin\omega,$$

ce qui donne

$$z'dxdy = \rho d\rho d\omega \sqrt{R^2 - \rho^2}.$$

En même temps, l'équation (4) devient

$$(5) \qquad \rho' = ab\sqrt{\frac{R^2 - c^2}{a^2b^2 - c^2(b^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega)}}.$$

De même, dans $z''dx\,dy$, je pose

$$\frac{x}{a} = \rho\cos\omega, \quad \frac{y}{b} = \rho\sin\omega;$$

d'où

$$z''dxdy = abc.\rho d\rho d\omega\sqrt{1-\rho^2}.$$

L'équation (4) donne, par le même changement de variables,

$$(6) \qquad \rho'' = \sqrt{\frac{R^2 - c^2}{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega - c^2}}.$$

Au moyen de cette double transformation, la formule (3) devient

$$(7) \quad v = \int\int \rho d\rho d\omega\sqrt{R^2 - \rho^2} - abc\int\int \rho d\rho d\omega\sqrt{1-\rho^2}.$$

Dans la première intégrale, on devra intégrer par rapport à ρ, de $\rho = 0$ à $\rho = \rho'$, et par rapport à ω, de 0 à $\frac{\pi}{2}$; dans la seconde, les limites de ρ seront 0 et ρ'', et celles de ω, 0 et $\frac{\pi}{2}$.

On trouve immédiatement

$$\int_0^{\rho'} \rho d\rho\sqrt{R^2 - \rho^2} = \tfrac{1}{3}R^3 - \tfrac{1}{3}c^3\left[\frac{a^2b^2 - R^2(b^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega)}{a^2b^2 - c^2(b^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega)}\right]^{\frac{3}{2}},$$

$$\int_0^{\rho''} \rho d\rho\sqrt{1-\rho^2} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}\left[\frac{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega - R^2}{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega - c^2}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

La formule (7) se change maintenant en celle-ci :

$$(8) \qquad v = \tfrac{1}{6}\pi(R^3 - abc) - \tfrac{1}{3}c^3 A + \tfrac{1}{3}abc\,B;$$

en posant

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \left[\frac{a^2 b^2 - R^2(b^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega)}{a^2 b^2 - c^2\,(b^2\cos^2\omega + a^2\sin^2\omega)}\right]^{\frac{3}{2}},$$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \left[\frac{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega - R^2}{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega - c^2}\right]^{\frac{3}{2}};$$

ou

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \left[\frac{b^2(a^2 - R^2) + a^2(b^2 - R^2)\operatorname{tang}^2\omega}{b^2(a^2 - c^2) + a^2(b^2 - c^2)\operatorname{tang}^2\omega}\right]^{\frac{3}{2}}, \\ B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \left[\frac{(a^2 - R^2) + (b^2 - R^2)\operatorname{tang}^2\omega}{(a^2 - c^2) + (b^2 - c^2)\operatorname{tang}^2\omega}\right]^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}\right.$$

Nous allons ramener ces deux intégrales aux fonctions elliptiques.

Pour opérer cette réduction, je pose, dans A, $\operatorname{tang}\omega = p\operatorname{tang}\theta$, p étant une indéterminée.

Cette transformation donne

$$\frac{d\omega}{\cos^2\omega} = p\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta},$$

ou

$$d\omega = p\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta + p^2\sin^2\theta},$$

et

$$dA = p\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta + p^2\sin^2\theta}\left[\frac{b^2(a^2 - R^2) + a^2p^2(b^2 - R^2)\operatorname{tang}^2\theta}{b^2(a^2 - c^2) + a^2p^2(b^2 - c^2)\operatorname{tang}^2\theta}\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Je dispose de p, de manière que

$$b^2(a^2 - R^2) = a^2p^2(b^2 - R^2);$$

ce qui donne

$$A = pb^3(a^2 - R^2)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(\cos^2\theta + p^2\sin^2\theta)[b^2(a^2 - c^2)\cos^2\theta + a^2p^2(b^2 - c^2)\sin^2\theta]^{\frac{3}{2}}}.$$

Par le changement de θ en $\frac{\pi}{2} - \theta$, cette expression devient d'abord

$$A = pb^3(a^2 - R^2)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[p^2-(p^2-1)\sin^2\theta][a^2p^2(b^2-c^2)-(a^2p^2b^2-a^2p^2c^2-a^2b^2+b^2c^2)\sin^2\theta]^{\frac{3}{2}}}.$$

D'après la valeur de p^2, on a

$$a^2p^2(b^2-c^2) - b^2(a^2-c^2) = \frac{b^2}{b^2-R^2}[(a^2-R^2)(b^2-c^2)-(a^2-c^2)(b^2-R^2)]$$
$$= \frac{b^2}{b^2-R^2}(a^2-b^2)(R^2-c^2),$$

$$a^2p^2(b^2-c^2) = \frac{b^2(a^2-R^2)(b^2-c^2)}{(b^2-R^2)}, \quad p^2 - 1 = \frac{R^2(a^2-b^2)}{a^2(b^2-R^2)};$$

donc

$$A =$$
$$pa^2(a^2 - R^2)^{\frac{3}{2}}(b^2-R^2)^{\frac{5}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[b^2(a^2-R^2)-R^2(a^2-b^2)\sin^2\theta][(a^2-R^2)(b^2-c^2)-(a^2-b^2)(R^2-c^2)\sin^2\theta]^{\frac{3}{2}}}.$$

En remplaçant p par sa valeur

$$\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2-R^2}{b^2-R^2}},$$

et posant, pour abréger,

$$(10) \qquad e^2 = \frac{(a^2-b^2)(R^2-c^2)}{(a^2-R^2)(b^2-c^2)}, \quad \beta^2 = \frac{R^2(b^2-c^2)}{b^2(R^2-c^2)},$$

on réduit la formule précédente à

$$(11) \qquad A = \frac{a}{b}\frac{(b^2-R^2)^2}{(a^2-R^2)^{\frac{1}{2}}(b^2-c^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1-\beta^2e^2\sin^2\theta)(1-e^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Des calculs de même nature, exécutés sur la seconde formule (9), conduisent à

$$(12) \qquad B = \frac{(b^2-R^2)^2}{(a^2-R^2)^{\frac{1}{2}}(b^2-c^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1-\beta'^2e^2\sin^2\theta)(1-e^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

en prenant

$$\beta'^2 = \frac{b^2 - c^2}{R^2 - c^2}. \tag{13}$$

Substituant ces valeurs de A et B dans la formule (8), j'obtiens

$$(14)\left\{\begin{aligned} v &= \tfrac{1}{6}\pi(R^3 - abc) \\ &+ \frac{1}{3}\frac{ac}{b}\frac{(b^2 - R^2)^2}{(a^2 - R^2)^{\frac{1}{2}}(b^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}}\left[b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1 - \beta'^2 e^2\sin^2\theta)(1 - e^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} - c^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1 - \beta^2 e^2\sin^2\theta)(1 - e^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\right].\end{aligned}\right.$$

On a identiquement

$$\frac{1}{(1 - e^2 x)(1 - \beta^2 e^2 x)} = \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1}\,\frac{1}{1 - \beta^2 e^2 x} - \frac{1}{\beta^2 - 1}\,\frac{1}{1 - e^2 x};$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1 - \beta^2 e^2\sin^2\theta)(1 - e^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1 - \beta^2 e^2\sin^2\theta)\sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}}$$

$$- \frac{1}{\beta^2 - 1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1 - e^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

On a encore identiquement :

$$d\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}} = -\frac{1 - e^2}{e^2}\,\frac{d\theta}{(1 - e^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{e^2}\,d\theta\sqrt{1 - e^2\sin^2\theta};$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1 - e^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1 - e^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\sqrt{1 - e^2\sin^2\theta};$$

et par conséquent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1 - \beta^2 e^2\sin^2\theta)(1 - e^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1 - \beta^2 e^2\sin^2\theta)\sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}}$$

$$- \frac{1}{(\beta^2 - 1)(1 - e^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}.$$

Les formules (10) donnent facilement

$$\beta^2 - 1 = \frac{c^2}{b^2}\frac{b^2 - R^2}{R^2 - c^2}, \quad \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} = \frac{R^2(b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - R^2)}, \quad 1 - e^2 = \frac{(a^2 - c^2)(b^2 - R^2)}{(a^2 - R^2)(b^2 - c^2)};$$

l'équation précédente devient donc, en employant les notations de Legendre :

$$(15)\left\{\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - \beta^2 e^2 \sin^2\theta)(1 - e^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{R^2(b^2 - c^2)}{c^2(b^2 - R^2)}\Pi_1(-\beta^2 e^2, e)\\ &- \frac{b^2(b^2 - c^2)(a^2 - R^2)(R^2 - c^2)}{c^2(a^2 - c^2)(b^2 - R^2)^2}E_1(e).\end{aligned}\right.$$

On trouve de la même manière

$$(16)\left\{\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - \beta'^2 e^2 \sin^2\theta)(1 - e^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{b^2 - c^2}{b^2 - R^2}\Pi_1(-\beta'^2 e^2, e)\\ &- \frac{(b^2 - c^2)(a^2 - R^2)(R^2 - c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - R^2)^2}E_1(e).\end{aligned}\right.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (14) donne ensuite

$$(17)\left\{\begin{aligned}\nu &= \frac{1}{6}\pi(R^3 - abc)\\ &+ \frac{1}{3}\frac{ac}{b}\frac{b^2 - R^2}{\sqrt{(a^2 - R^2)(b^2 - c^2)}}\left[b^2\Pi_1(-\beta'^2 e^2, e) - R^2\Pi_1(-\beta'^2 e^2, e)\right].\end{aligned}\right.$$

Enfin, introduisant cette nouvelle valeur dans l'équation (2), et multipliant le résultat par 8, on obtient définitivement, pour le volume commun à l'ellipsoïde et à la sphère,

$$8V =$$

$$\frac{4}{3}\pi abc - \frac{8}{3}\frac{ac}{b}\frac{b^2 - R^2}{\sqrt{(a^2 - R^2)(b^2 - c^2)}}\left[b^2\Pi_1(-\beta'^2 e^2, e) - R^2\Pi_1(-\beta^2 e^2, e)\right].$$

On voit donc que l'évaluation de ce volume dépend de deux fonctions elliptiques complètes de troisième espèce. Ces fonctions ont pour module commun

$$e = \sqrt{\frac{(a^2-b^2)(R^2-c^2)}{(a^2-R^2)(b^2-c^2)}},$$

et leurs paramètres sont respectivement

$$-\beta'^2 e^2 = -\frac{a^2-b^2}{a^2-R^2}, \quad -\beta^2 e^2 = -\frac{R^2(a^2-b^2)}{b^2(a^2-R^2)}.$$

Une fonction complète de troisième espèce peut s'exprimer par des fonctions de première et de seconde espèce; la dernière formule peut donc aussi être écrite d'une autre manière, mais alors elle moins simple.

Cette formule convient au cas où l'on suppose

$$a > b > R > c.$$

Admettons maintenant que l'on ait

$$a > R > b > c.$$

Voici une considération qui permettra d'arriver au nouveau résultat sans que l'on soit obligé de refaire le calcul.

Je pose, dans les équations (1),

$$x = ax', \ y = by', \ z = cz',$$
$$\frac{R}{a} = c', \quad \frac{R}{b} = b', \quad \frac{R}{c} = a';$$

ce qui donne

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \quad \left(\frac{x'}{c'}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b'}\right)^2 + \left(\frac{z'}{a'}\right)^2 = 1.$$

En même temps nous aurons

$$c' < 1, \ b' > 1, \ a' > 1, \ c' < b' < a',$$

ou

$$a' > b' > 1 > c'.$$

On voit donc que ces équations représentent une sphère et un ellipsoïde ayant entre eux la même relation que les surfaces considérées plus haut. Si donc on veut obtenir le volume de la partie commune à cette sphère et à cet ellipsoïde, il suffira d'employer la valeur de $8V$ en y faisant

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c', \quad R = 1;$$

ou plutôt en prenant,

$$a = \frac{R}{c}, \quad b = \frac{R}{b}, \quad c = \frac{R}{a}, \quad R = 1.$$

On obtient ainsi, en multipliant le résultat par abc, attendu que $dx.dy.dz = abc.dx'.dy'.dz'$:

$$8V =$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{8}{3}\frac{ac}{b}\frac{R^2 - b^2}{(\sqrt{R^2 - c^2})(a^2 - b^2)}[R^2\Pi_1(-\gamma'^2 f^2, f) - b^2\Pi_1(-\gamma^2 f^2, f)]$$

Dans cette formule

$$f^2 = \frac{(b^2 - c^2)(a^2 - R^2)}{(R^2 - c^2)(a^2 - b^2)}, \quad \gamma'^2 f^2 = \frac{R^2(b^2 - c^2)}{b^2(R^2 - c^2)}, \quad \gamma^2 f^2 = \frac{b^2 - c^2}{R^2 - c^2}.$$