JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Mémoire sur quelques propositions générales de géométrie et sur la théorie de l'élimination dans les équations algébriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 345-411.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__345_0>

MÉMOIRE

SUR

QUELQUES PROPOSITIONS GÉNÉRALES DE GÉOMÉTRIE

ET

SUR LA THÉORIE DE L'ÉLIMINATION DANS LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR J. LIOUVILLE.

(Présenté à l'Académie des Sciences le 23 août 1841 [*].)

I.

1. En considérant la série complète des tangentes que l'on peut mener à une courbe géométrique parallèlement à une droite donnée, on trouve que le centre des moyennes distances des points de contact de ces tangentes avec la courbe est indépendant de la direction commune des tangentes, c'est-à-dire reste fixe lorsqu'on incline à la fois toutes les tangentes sans altérer leur parallélisme. De même si l'on considère la série complète des plans tangents que l'on peut mener à une surface géométrique parallèlement à un plan donné, on trouve que le centre des moyennes distances des points de contact de ces plans tangents avec la surface est indépendant de la direction commune des plans tangents. Il faut dans cet énoncé tenir compte de tous les points de contact réels ou imaginaires, situés à une distance finie ou infinie; il faut aussi compter deux fois, trois fois, ... tout point qui résulte de la réunion de deux, de trois, ... points en un seul. C'est ce que nous

[*] *Comptes rendus,* tome XIII, page 412. — Les principaux résultats avaient été communiqués antérieurement à la Société philomatique (séance du 10 juillet 1841).

ferons toujours dans ce Mémoire, et ce dont nous avertissons une fois pour toutes. Il y a peut-être quelques inconvénients, mais il y a aussi dans certaines théories, et en particulier dans celle qui nous occupe, de grands avantages à introduire ainsi dans la Géométrie le langage de l'algèbre. En cela du reste nous suivons l'exemple de M. Poncelet et de la plupart des auteurs auxquels la Géométrie est redevable des immenses progrès qu'elle a faits dans ces derniers temps.

2. Grace aux méthodes élégantes et fécondes dont s'est enrichie la science, les deux théorèmes précédents se présentent d'eux-mêmes comme une déduction naturelle, nécessaire, presque immédiate, d'un théorème de Newton sur les diamètres des courbes. Après les avoir donnés dans son *Aperçu historique*, M. Chasles observe que leur existence entraîne celle de deux théorèmes d'algèbre dont la démonstration directe lui semble offrir des difficultés. En effet, si l'on représente par $M(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe géométrique, les points de contact de cette courbe avec une tangente parallèle à la droite dont l'équation est $y = ax$, devront satisfaire à la fois aux deux équations

$$M = 0, \quad \frac{dM}{dx} + a\frac{dM}{dy} = 0;$$

donc si la proposition de géométrie plane énoncée plus haut est exacte, il faut qu'en éliminant y on trouve pour coefficient du second terme de l'équation finale en x, mise sous la forme ordinaire

$$x^i + Gx^{i-1} + \text{etc.} = 0,$$

une quantité G indépendante de a. En vertu du théorème relatif aux surfaces, il faut de même qu'en éliminant y et z entre les trois équations algébriques

$$M(x, y, z) = 0, \quad \frac{dM}{dx} + a\frac{dM}{dz} = 0, \quad \frac{dM}{dy} + b\frac{dM}{dz} = 0,$$

le coefficient du second terme dans l'équation finale en x soit indépendant de a et b.

3. C'est pour obtenir une démonstration directe de ces théorèmes relatifs à l'élimination, que j'ai d'abord entrepris mes recherches. Cette démonstration, je dois l'avouer, a été loin d'offrir les difficultés que semblait redouter M. Chasles : elle repose en effet sur des principes très-simples et très-connus, mais dont on n'avait peut-être pas assez développé jusqu'ici les conséquences. En poursuivant mon travail, j'ai reconnu ensuite que les mêmes principes conduisent au beau théorème de M. Jacobi (*), exprimé par l'équation

$$\sum \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{C(\alpha, \beta)} = 0,$$

où le signe $\sum$ se rapporte à tous les couples (α, β) de racines des deux équations algébriques simultanées $f(\alpha, \beta) = 0$, $F(\alpha, \beta) = 0$, et où $C(\alpha, \beta)$ désigne la fonction entière suivante

$$\frac{df}{d\alpha}\frac{dF}{d\beta} - \frac{df}{d\beta}\frac{dF}{d\alpha},$$

qui dépend de f et F, tandis que φ_1 est une fonction entière quelconque de degré inférieur à $C(\alpha, \beta)$.

Ce théorème est compris comme cas particulier dans une équation remarquable, à laquelle je me suis trouvé conduit par mon analyse. Soient $f(x, y)$, $F(x, y)$, $\varphi(x, y)$ trois fonctions algébriques entières de x, y, et $\varphi_1(x, y)$ une quatrième fonction entière, quelconque aussi, mais de degré inférieur à φ : posons

$$\frac{df}{dx}\frac{dF}{dy} - \frac{df}{dy}\frac{dF}{dx} = C(x, y),$$

$$\frac{dF}{dx}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{d\varphi}{dx} = A(x, y);$$

---

[*] Voyez le Mémoire intitulé : *Theoremata nova algebraïca*. (Journal de M. Crelle, tome XIV, page 281.) *Voir* aussi le tome XV, page 306.

nous aurons

$$\sum \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha, \beta)} = \sum \frac{\varphi_1(\lambda, \mu)\, \mathrm{C}(\lambda, \mu)}{f(\lambda, \mu)\, \mathrm{A}(\lambda, \mu)},$$

le signe sommatoire s'étendant dans le premier membre à tous les couples (α, β) de racines des équations simultanées $f(\alpha, \beta) = 0$, $\mathrm{F}(\alpha, \beta) = 0$, et dans le second membre à tous les couples (λ, μ) de racines des équations simultanées $\mathrm{F}(\lambda, \mu) = 0$, $\varphi(\lambda, \mu) = 0$. Le théorème de M. Jacobi répond au cas de $\varphi(x, y) = \mathrm{C}(x, y)$.

4. On arrive à des résultats semblables pour $(s + 1)$ polynomes $f(x, y, \ldots, z)$, $\mathrm{F}(x, y \ldots z) \ldots$, $\varphi(x, y \ldots z)$, $\psi(x, y \ldots z)$ contenant s lettres $x, y, \ldots, z$. Désignons par $\mathrm{D}(x, y, \ldots, z)$ la *résultante* [*] du système

$$\begin{array}{l}
\dfrac{df}{dx}, \dfrac{df}{dy}, \ldots\ldots, \dfrac{df}{dz}, \\[2ex]
\dfrac{d\mathrm{F}}{dx}, \dfrac{d\mathrm{F}}{dy}, \ldots\ldots, \dfrac{d\mathrm{F}}{dz}, \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
\dfrac{d\varphi}{dx}, \dfrac{d\varphi}{dy}, \ldots\ldots, \dfrac{d\varphi}{dz},
\end{array}$$

dans lequel la fonction ψ n'entre pas; le mot *résultante* ayant ici la signification que Laplace lui a donnée quand il a démontré la règle générale par laquelle on résout les équations du premier degré. Soit $\mathrm{A}(x, y, \ldots, z)$ ce que devient l'expression $\mathrm{D}(x, y, \ldots, z)$ lorsqu'on y remplace f par $-\psi$, en sorte que $\mathrm{A}(x, y, \ldots, z)$ dépendra de $\mathrm{F}, \ldots, \varphi, \psi$, mais non plus de f. Soit enfin $\psi_1(x, y, \ldots, z)$ un nouveau polynome quelconque de degré inférieur à ψ. On aura

$$\sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)}{\psi(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)} = \sum \frac{\psi_1(\lambda, \mu, \ldots, \nu)\, \mathrm{D}(\lambda, \mu, \ldots, \nu)}{f(\lambda, \mu, \ldots, \nu)\, \mathrm{A}(\lambda, \mu, \ldots, \nu)},$$

---

[*] Au lieu du mot *résultante*, les géomètres emploient souvent le mot *déterminant*.

le signe $\sum$ s'étendant dans le premier membre à tous les couples $(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$ de racines des équations simultanées

$$f(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = 0, \quad F(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = 0, \ldots, \quad \varphi(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = 0,$$

et dans le second membre à tous les couples $(\lambda, \mu, \ldots, \nu)$ de racines des équations simultanées

$$F(\lambda, \mu, \ldots, \nu) = 0, \ldots, \quad \varphi(\lambda, \mu, \ldots, \nu) = 0, \quad \psi(\lambda, \mu, \ldots, \nu) = 0.$$

Si l'on prend en particulier

$$\psi(x, y, \ldots, z) = D(x, y, \ldots, z),$$

il vient

$$\sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)}{D(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)} = 0.$$

3. Toute cette théorie, comme on le verra dans mon Mémoire, repose sur une observation bien simple, savoir, que la somme des racines de l'équation finale, régulièrement obtenue, pour une inconnue déterminée, par l'élimination des autres inconnues effectuée d'après la méthode des fonctions symétriques, dans un système quelconque d'équations algébriques, doit rester la même quelle que soit celle de ces équations qu'il nous plaît de choisir pour y substituer les racines que les autres fournissent. L'équation finale en x résultant de l'élimination de $y, \ldots z$ entre les équations algébriques $M = 0$, $N = 0, \ldots, P = 0$, $Q = 0$, peut en effet être obtenue soit en faisant le produit des valeurs que prend le polynome Q lorsqu'on y substitue les racines $(y, \ldots z)$ fournies par les équations $M = 0$, $N = 0, \ldots$, $P = 0$, soit en faisant le produit des valeurs que prend le polynome M lorsqu'on y substitue les racines $(y, \ldots z)$ fournies par les équations $N = 0, \ldots P = 0$, $Q = 0$. De là, pour la somme $\sum x$ des racines, deux expressions qui ne peuvent manquer d'être égales et se présentent pourtant sous des formes différentes. C'est en égalant entre elles ces deux expressions que j'ai trouvé, sans le chercher, le théorème

énoncé plus haut. Au lieu de la somme des racines, on pourrait employer la somme de leurs valeurs inverses, et l'on arriverait aux mêmes résultats.

On peut aussi démontrer nos formules en s'appuyant sur la loi si connue de décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. Mais cette nouvelle méthode mérite d'être l'objet d'un article spécial [*].

Le théorème de M. Jacobi et les théorèmes analogues auxquels je suis parvenu, conduisent à un grand nombre de propositions géométriques, dont la plupart me paraissent nouvelles. On en trouvera quelques exemples dans mon Mémoire.

II.

6. Soient $M(x,y)=0$, $N(x,y)=0$, ou plus simplement $M=0$, $N=0$, deux équations algébriques à deux inconnues x et y. Supposons que la première équation soit de degré m, et que, résolue par rapport à y, elle fournisse les m racines $y_1, y_2, \ldots, y_m$; puis faisons

$$N(x,y_1)\,N(x,y_2)\,\ldots\,N(x,y_m) = X:$$

X sera une fonction entière et symétrique par rapport à $y_1, y_2, \ldots, y_m$, et par suite pourra s'exprimer en fonction entière de x. L'équation finale en x résultant de l'élimination de y entre les deux équations proposées sera d'ailleurs $X=0$. Pour obtenir cette équation finale, il suffit donc de former le produit X.

Indépendamment de toute théorie d'élimination, on pourrait se proposer de chercher, comme nous allons le faire, le produit X des quantités $N(x,y_1), \ldots, N(x,y_m)$ produites par la substitution dans la fonction entière quelconque $N(x,y)$, des racines $y_1, \ldots, y_m$ d'une équation donnée $M(x,y)=0$ où y est l'inconnue. Ce problème,

[*] On peut dès à présent en prendre une idée nette en lisant la Note insérée dans les *Comptes rendus*, tome XIII, page 467.

qui est utile aussi dans la pratique, comprend comme cas particulier celui de l'élimination ; mais à cause de sa généralité même il est plus facile à résoudre. Ayant alors en effet une seule équation entre x et y, on voit que x sera une variable indépendante, et $y_1, y_2, \ldots, y_m$ des fonctions de cette variable : or la présence d'une variable indépendante dans les calculs multipliera évidemment les moyens de transformation.

7. Dans le polynome M, qui est par hypothèse de degré m par rapport à x et y, groupons ensemble les termes homogènes de l'ordre m, puis ceux de l'ordre $(m-1)$, puis ceux de l'ordre $(m-2)$, et ainsi de suite : opérons de même sur le polynome $N(x, y)$ que nous supposerons de degré n : ces deux polynomes prendront la forme

$$\begin{aligned} M &= x^m f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-2} f_2\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots, \\ N &= x^n F\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} F_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-2} F_2\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots, \end{aligned}$$

ou bien, en désignant par u le rapport de y à x,

$$\begin{aligned} M &= x^m f(u) + x^{m-1} f_1(u) + x^{m-2} f_2(u) + \ldots, \\ N &= x^n F(u) + x^{n-1} F_1(u) + x^{n-2} F_2(u) + \ldots : \end{aligned}$$

la fonction $f(u)$ est au plus de degré m, $f_1(u)$ au plus de degré $(m-1)$, $f_2(u)$ au plus de degré $(m-2), \ldots$ par rapport à u ; et $F(u)$, $F_1(u), \ldots$ sont de même respectivement de degrés n, $n-1, \ldots$ au plus.

Dans le cas général $f(u)$ est en effet un polynome quelconque de degré m. Attachons-nous d'abord à ce cas général, sauf à revenir plus tard, en peu de mots, sur les cas particuliers, et admettons désormais que l'équation $f(\alpha) = 0$ est satisfaite par m racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

8. Cela posé, si l'on considère à part l'équation

$$M(x, y) = x^m f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0,$$

c'est-à-dire

$$x^m f(u) + x^{m-1} f_1(u) + \ldots = 0,$$

on voit qu'en supposant la valeur de x très-grande, le rapport u de y à x fourni par cette équation converge indéfiniment vers la limite α fournie par l'équation $f(\alpha) = 0$, les m racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ correspondant aux m valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de y ou $u_1, u_2, \ldots, u_m$ de u.

Ainsi en général une racine u de l'équation $M = 0$, peut être mise sous la forme $u = \alpha + \varepsilon$, ε ou plutôt son module devenant infiniment petit quand la valeur de x devient infiniment grande.

Mais la valeur approchée de εx est très-facile à trouver, et par la théorie des asymptotes on sait qu'elle se réduit à la constante α' déterminée pour chaque valeur de α par l'équation du premier degré

$$f'(\alpha)\alpha' + f_1(\alpha) = 0,$$

où $f'(\alpha)$ désigne, conformément à la notation de Lagrange, la dérivée $\frac{df(\alpha)}{d\alpha}$. En d'autres termes, la valeur de u peut être mise sous la forme

$$u = \alpha + \frac{\alpha'}{x} + \frac{\eta}{x},$$

η ou plutôt son module devenant infiniment petit quand la valeur de x devient infiniment grande.

Ajoutons que la valeur approchée de η est à son tour de la forme $\frac{\alpha''}{x}$, α'' étant déterminée par l'équation

$$f'(\alpha)\alpha'' + \frac{f''(\alpha)}{2}\alpha'^2 + f'_1(\alpha)\alpha' + f_2(\alpha) = 0,$$

et qu'on peut mettre u sous la forme

$$u = \alpha + \frac{\alpha'}{x} + \frac{\alpha''}{x^2} + \frac{\zeta}{x^2},$$

ζ ou son module devenant infiniment petit lorsque la valeur de x devient infiniment grande. On pourrait évidemment continuer ce calcul à l'aide duquel la valeur de u (et par suite la valeur de y) se trouve développée en série ordonnée suivant les puissances descendantes de x. Cette série résulte très-simplement de la théorie des asymptotes, théorie que l'on ne présente pas toujours, mais qu'il serait facile de présenter sous une forme complétement rigoureuse, si l'on voulait entrer ici dans des détails auxquels les géomètres exercés suppléeront sans peine. Les asymptotes rectilignes ($y = \alpha x + \alpha'$) de la courbe représentée par l'équation $M(x, y) = 0$ sont, comme on voit, généralement en nombre m, à cause des m racines de l'équation $f(\alpha) = 0$; mais chacune d'elles est réelle ou imaginaire, suivant que la racine α correspondante est elle-même réelle ou imaginaire.

9. Au lieu de développer y en série ordonnée suivant les puissances descendantes de x, on pourrait développer y en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable. On groupera entre eux et on représentera par $\mathrm{f}(y)$ les termes de M qui sont indépendants de x; on groupera de même et on représentera par $x\mathrm{f}_1(y)$, $x^2\mathrm{f}_2(y)$,... les termes du premier degré, du second degré,... en x, en sorte que l'équation $M = 0$ devienne

$$\mathrm{f}(y) + x\,\mathrm{f}_1(y) + x^2\,\mathrm{f}_2(y) + \ldots = 0;$$

$\mathrm{f}(y)$, $\mathrm{f}_1(y)$, $\mathrm{f}_2(y)$, ... sont respectivement des polynomes de degrés m, $m-1$, $m-2$,..., au plus: nous admettrons (c'est le cas général) que $\mathrm{f}(y)$ est en effet un polynome de degré m et que de plus les racines de l'équation $\mathrm{f}(\gamma) = 0$ sont toutes inégales. Cela posé, pour des valeurs très-petites de x, on pourra développer y sous la forme

$$y = \gamma + \gamma' x + \gamma'' x^2 + \ldots\ldots,$$

γ, γ', γ'', ... étant déterminés par les équations

$$\mathrm{f}(\gamma) = 0, \quad \mathrm{f}'(\gamma)\gamma' + \mathrm{f}_1(\gamma) = 0,$$
$$\mathrm{f}'(\gamma)\gamma'' + \frac{\mathrm{f}''(\gamma)}{2}\gamma'^2 + \mathrm{f}'_1(\gamma)\gamma' + \mathrm{f}_2(\gamma) = 0, \text{ etc.}$$

Ici, comme dans le n° **8**, je supprime la démonstration qui se présente d'elle-même. Au besoin, du reste, on trouvera dans les ouvrages de M. Cauchy tous les détails nécessaires pour le développement des racines des équations en séries ordonnées suivant les puissances d'un paramètre contenu dans l'équation.

Les segments compris entre l'origine des coordonnées et les points où la courbe représentée par l'équation $M = 0$ est coupée par la transversale que l'on a prise pour axe des y, sont fournis par l'équation $f(\gamma) = 0$; les tangentes à la courbe menées par les m points dont il s'agit sont représentées par l'équation $y = \gamma + \gamma' x$; γ'' dépend de la courbure de la courbe en ces mêmes points. Les équations en $\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$ ont la même forme que les équations en α, α', α'', ... du n° précédent; d'où résulte une liaison intime, et du reste bien connue des géomètres, entre la théorie des asymptotes et celle des tangentes aux divers points d'une courbe situés sur une même transversale.

10. La valeur de u ou de $\frac{y}{x}$, savoir $u = \alpha + \varepsilon$, que nous avons trouvée n° **8**, suffit pour déterminer le premier terme du polynome X et le degré de l'équation finale. En effet, si l'on divise par x^{mn} les deux membres de l'équation $X = N(x, y_1)\, N(x, y_2) \ldots N(x, y_m)$, il viendra

$$\frac{X}{x^{mn}} = \frac{N(x, y_1)}{x^n} \cdot \frac{N(x, y_2)}{x^n} \cdots \frac{N(x, y_m)}{x^n};$$

on voit aisément ce que devient pour $x = \infty$ le rapport

$$\frac{N(x, y)}{x^n}$$

où y représente une quelconque des racines $y_1, y_2, \ldots, y_m$; en effet, si dans

$$N(x, y) = x^n F(u) + x^{n-1} F_1(u) + \ldots,$$

on met pour u sa valeur $\alpha + \varepsilon$, on a

$$\frac{N(x, y)}{x^n} = F(\alpha + \varepsilon) + \frac{1}{x} F_1(\alpha + \varepsilon) + \ldots,$$

quantité qui pour $x = \infty$ se réduit à $F(\alpha)$. Donc pour $x = \infty$, il vient aussi

$$\frac{X}{x^{mn}} = F(\alpha_1) F(\alpha_2) \ldots F(\alpha_m).$$

En d'autres termes le polynome X est en général de degré mn et a pour premier terme

$$F(\alpha_1) F(\alpha_2) \ldots F(\alpha_m) x^{mn}.$$

On retombe ainsi sur le théorème connu relatif au degré de l'équation finale [*].

On peut trouver de la même manière le second terme ou plutôt tous les termes du polynome X. Il suffit, en effet, de remplacer dans le produit

$$N(x, y_1)\, N(x, y_2) \ldots N(x, y_m),$$

les racines $y_1, y_2, \ldots, y_m$ par leurs valeurs déduites de la formule générale

$$\frac{y}{x} \quad \text{ou} \quad u = \alpha + \frac{\alpha'}{x} + \frac{\alpha''}{x^2} + \ldots$$

du n° **8**, puis d'effectuer le développement de ce produit suivant les puissances descendantes de x. Dans ce but, on observera qu'en général

$$N(x, y) \quad \text{ou} \quad x^n F(u) + x^{n-1} F_1(u) + \ldots$$

---

[*] Pour former le premier terme de X, il suffit, comme on voit, de connaître le premier terme de chacune des séries qui représentent le développement des racines y ordonné suivant les puissances descendantes de x. Ce premier terme est en général de la forme αx, mais dans certains cas particuliers, il devient proportionnel à une puissance de x dont l'exposant est différent de l'unité et se calcule par la règle du parallélogramme de Newton. Les cas particuliers dont il s'agit ont été examinés par M. Minding, dans un des derniers cahiers du Journal de M. Crelle (t. XXII, p. 178). Le Mémoire de Minding, dont je n'ai eu connaissance que depuis peu de jours, est écrit en allemand ; nous en donnerons la traduction dans un prochain cahier.

se transforme dans la somme suivante

$$x^n F\left(\alpha + \frac{\alpha'}{x} + \ldots\right) + x^{n-1} F_1\left(\alpha + \frac{\alpha'}{x} + \ldots\right) + \ldots,$$

et que de plus on a

$$F\left(\alpha + \frac{\alpha'}{x} + \ldots\right) = F(\alpha) + \frac{F'(\alpha)}{1}\left(\frac{\alpha'}{x} + \ldots\right) + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Par un calcul très-facile, on trouvera ainsi que le coefficient de x^{mn-1} dans X est

$$F(\alpha_1)\,F(\alpha_2)\ldots F(\alpha_m)\sum\frac{F'(\alpha)\,\alpha' + F_1(\alpha)}{F(\alpha)},$$

le signe $\sum$ étant relatif à toutes les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, dont une quelconque est ici représentée par α. On verra semblablement que le coefficient de x^{mn-2} est égal au produit de $F(\alpha_1)\,F(\alpha_2)\ldots F(\alpha_m)$ par

$$\sum\frac{F'(\alpha)\,\alpha'' + \frac{F''(\alpha)}{2}\alpha'^2 + F'_1(\alpha)\,\alpha' + F_2(\alpha)}{F(\alpha)} + \sum\frac{\varpi(\alpha_i)\,\varpi(\alpha_j)}{F(\alpha_i)\,F(\alpha_j)},$$

où l'on a fait $F'(\alpha)\,\alpha' + F_1(\alpha) = \varpi(\alpha)$; l'indice i dans la dernière somme prend toutes les valeurs depuis 2 jusqu'à m, et l'indice j toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à $(i-1)$. — Et ainsi de suite.

11. En résumé, X est un polynome de degré mn en général. Le premier terme de ce polynome est

$$F(\alpha_1)\,F(\alpha_2)\ldots F(\alpha_m)\,x^{mn},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ étant les m racines de $f(\alpha) = 0$. Les fonctions f_1, F_1, f_2, $F_2, \ldots$ n'influent pas sur ce terme : il dépend de f et F seulement.

Le rapport du coefficient du second terme à celui du premier terme est

$$\sum\frac{F'(\alpha)\,\alpha' + F_1(\alpha)}{F(\alpha)},$$

le signe $\sum$ se rapportant à toutes les racines α de l'équation $f(\alpha) = 0$, auxquelles répondent respectivement les valeurs de α' déterminées par

$$f'(\alpha)\,\alpha' + f_1(\alpha) = 0.$$

Ce rapport ne dépend pas des fonctions f_2, F_2; f_3, $F_3, \ldots$, mais bien de f, F, f_1, F_1.

Le rapport du coefficient du troisième terme à celui du premier terme dépend des six fonctions f, F, f_1, F_1, f_2, F_2 : il est exprimé par

$$\sum \frac{F'(\alpha)\,\alpha'' + \frac{F''(\alpha)}{2}\,\alpha'^2 + F_1'(\alpha)\,\alpha' + F_2(\alpha)}{F(\alpha)} + \sum \frac{\varpi(\alpha_i)\,\varpi(\alpha_j)}{F(\alpha_i)\,F(\alpha_j)},$$

où $\varpi(\alpha) = F'(\alpha)\,\alpha' + F_1(\alpha)$ et où l'on doit mettre pour α'' sa valeur fournie par l'équation

$$f'(\alpha)\,\alpha'' + \frac{f''(\alpha)}{2}\,\alpha'^2 + f_1'(\alpha)\,\alpha' + f_2(\alpha) = 0;$$

dans la dernière somme i varie de 2 à m, j de 1 à $(i-1)$. — Et ainsi de suite.

12. Mais au lieu d'employer le développement de y suivant les puissances descendantes de x, et de déterminer d'abord le terme de X du degré le plus élevé, puis celui du degré $mn-1$, etc., on pourrait se servir du développement de y suivant les puissances ascendantes de x donné n° **9**, et déterminer d'abord le terme indépendant de x, puis celui qui contient x au premier degré, etc. Après avoir mis les deux polynomes M, N sous la forme

$$\begin{aligned} M &= \mathrm{f}(y) + x\,\mathrm{f}_1(y) + x^2\,\mathrm{f}_2(y) + \ldots, \\ N &= \mathit{F}(y) + x\,\mathit{F}_1(y) + x^2\,\mathit{F}_2(y) + \ldots, \end{aligned}$$

on trouvera, par un calcul tout semblable à celui du n° **10** :

1°. Que le terme de X indépendant de x est

$$\mathit{F}(\gamma_1)\,\mathit{F}(\gamma_2)\ldots\mathit{F}(\gamma_m),$$

$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ étant les racines de $f(\gamma) = 0$; ce terme ne dépend que des fonctions f, F;

2°. Que le coefficient du terme où x entre à la première puissance est

$$F(\gamma_1)\,F(\gamma_2)\ldots F(\gamma_m)\sum \frac{F'(\gamma)\gamma' + F_1(\gamma)}{F(\gamma)},$$

le signe $\sum$ se rapportant aux racines γ de l'équation $f(\gamma) = 0$ et aux valeurs correspondantes de γ' fournies par $f'(\gamma)\gamma' + f_1(\gamma) = 0$: ce terme dépend des quatre fonctions f, F, f_1, F_1. — Et ainsi de suite.

13. La somme $\sum x$ des racines $x_1, x_2, \ldots, x_{mn}$ de l'équation finale $X = 0$, la somme inverse $\sum \frac{1}{x}$, le produit $x_1\, x_2 \ldots x_{mn}$, et en général toutes les fonctions symétriques et rationnelles des quantités x_1, $x_2, \ldots, x_{mn}$, sont faciles à calculer d'après ce qui précède. On a d'abord

$$\sum x = -\sum \frac{F'(\alpha)\alpha' + F_1(\alpha)}{F(\alpha)},$$

c'est-à-dire

$$\sum x = \sum \frac{F'(\alpha)f_1(\alpha)}{F(\alpha)f'(\alpha)} - \sum \frac{F_1(\alpha)}{F(\alpha)},$$

en mettant pour α' sa valeur tirée de l'équation $f'(\alpha)\alpha' + f_1(\alpha) = 0$.

On a de même

$$\sum \frac{1}{x} = -\sum \frac{F'(\gamma)\gamma' + F_1(\gamma)}{F(\gamma)},$$

c'est-à-dire

$$\sum \frac{1}{x} = \sum \frac{F'(\gamma)f_1(\gamma)}{F(\gamma)f'(\gamma)} - \sum \frac{F_1(\gamma)}{F(\gamma)}.$$

Enfin on a

$$x_1\, x_2 \ldots x_{mn} = (-1)^{mn} \cdot \frac{F(\gamma_1)F(\gamma_2)\ldots F(\gamma_m)}{F(\alpha_1)F(\alpha_2)\ldots F(\alpha_m)}.$$

Nous reviendrons plus tard sur ces diverses formules qui, par des changements convenables dans les axes coordonnés des x et des y, peuvent se déduire les unes des autres. Si nous n'avons pas transcrit celles qui fournissent les sommes des carrés, des cubes.... des racines x ou de leurs valeurs inverses, c'est qu'elles sont assez compliquées. Contentons-nous d'observer en général que la somme des puissances i s'exprime à l'aide des seules fonctions f, F,..., f_i, F_i dont l'indice ne surpasse pas i, et ne dépend nullement des fonctions suivantes f_{i+1}, F_{i+1},...; remarque qui a son analogue pour les sommes de puissances négatives, et qui s'étend du reste au cas général d'un nombre quelconque d'équations et d'inconnues.

14. Considérons maintenant trois équations algébriques des degrés respectifs m, n, p, entre trois inconnues x, y, z. Soient

$$M(x, y, z) = 0, \quad N(x, y, z) = 0, \quad P(x, y, z) = 0,$$

ces trois équations. Concevons qu'on ait résolu les deux premières par rapport à y et z, et représentons par (y_1, z_1), (y_2, z_2), ... les mn couples de racines ainsi obtenues en fonction de x, puis posons

$$X = P(x, y_1, z_1)\, P(x, y_2, z_2) \ldots :$$

X sera une fonction symétrique des quantités (x_1, y_1), (x_2, y_2), etc., et pourra par conséquent s'exprimer en fonction entière de x. D'ailleurs $X = 0$ sera l'équation finale en x, résultant de l'élimination des deux inconnues y et z. Pour former cette équation finale, il suffit donc de chercher le polynome X. Or on obtiendra ce polynome soit en développant les racines y, z, et la fonction $P(x, y, z)$, suivant les puissances descendantes de la quantité x supposée très-grande, soit en opérant au contraire un développement suivant les puissances ascendantes de la quantité x supposée très-petite.

15. Dans le premier cas il faudra grouper entre eux les termes de même dimension, et écrire les trois polynomes M, N, P sous la forme

$$x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \ldots,$$

$$x^n \mathrm{F}\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^{n-1} \mathrm{F}_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \ldots,$$

$$x^p \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^{p-1} \varphi_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \ldots.$$

Ensuite on déterminera les coefficients successifs α, α',..., β, β',... dans les séries

$$\frac{y}{x} = \alpha + \frac{\alpha'}{x} + \ldots, \quad \frac{z}{x} = \beta + \frac{\beta'}{x} + \ldots,$$

fournies par la résolution des équations

$$\mathrm{M} = 0, \quad \mathrm{N} = 0,$$

à l'aide des formules suivantes

$$f(\alpha, \beta) = 0, \quad \frac{df}{d\alpha}\alpha' + \frac{df}{d\beta}\beta' + f_1 = 0, \ldots,$$

$$\mathrm{F}(\alpha, \beta) = 0, \quad \frac{d\mathrm{F}}{d\alpha}\alpha' + \frac{d\mathrm{F}}{d\beta}\beta' + \mathrm{F}_1 = 0, \ldots;$$

et l'on trouvera :

1°. Que le premier terme de X est

$$\varphi(\alpha_1, \beta_1)\varphi(\alpha_2, \beta_2)\ldots \varphi(\alpha_{mn}, \beta_{mn})x^{mnp};$$

2°. Que le coefficient du second terme de X est égal au produit du coefficient du premier terme par

$$\sum \frac{\frac{d\varphi}{d\alpha}\alpha' + \frac{d\varphi}{d\beta}\beta' + \varphi_1}{\varphi}.$$

Et ainsi de suite. A peine avons-nous besoin d'avertir que f, f_1, ... sont en général des fonctions de degrés m, $m-1,\ldots$ respectivement, et que F, $F_1,\ldots$ sont de degrés n, $n-1,\ldots$ par rapport à α, β : $(\alpha_1, \beta_1),\ldots, (\alpha_{mn}, \beta_{mn})$ sont les mn couples formés par les racines (α, β) des équations simultanées $f(\alpha, \beta) = 0$, $F(\alpha, \beta) = 0$. Le signe $\sum$ s'étend à tous ces couples de racines.

16. Dans le développement ordonné suivant les puissances ascendantes de x, on écrira d'abord les polynomes M, N, P sous la forme

$$\begin{gathered} \mathrm{f}(y, z) + x\,\mathrm{f}_1(y, z) + \ldots, \\ F(y, z) + x\,F_1(y, z) + \ldots, \\ \Phi(y, z) + x\,\Phi_1(y, z) + \ldots, \end{gathered}$$

puis on déterminera les coefficients $\gamma, \gamma',\ldots, \delta, \delta',\ldots$ des divers termes des séries

$$y = \gamma + \gamma' x + \ldots, \quad z = \delta + \delta' x + \ldots,$$

fournies par les équations $\mathrm{M}=0$, $\mathrm{N}=0$, à l'aide des formules

$$\mathrm{f}(\gamma, \delta) = 0, \quad \frac{d\mathrm{f}}{d\gamma}\gamma' + \frac{d\mathrm{f}}{d\delta}\delta' + \mathrm{f}_1 = 0,\ldots,$$

$$F(\gamma, \delta) = 0, \quad \frac{dF}{d\gamma}\gamma' + \frac{dF}{d\delta}\delta' + F_1 = 0,\ldots;$$

et l'on trouvera :

1°. Que le dernier terme de X, c'est-à-dire le terme indépendant de x, est

$$\Phi(\gamma_1, \delta_1) \ldots\ldots \Phi(\gamma_{mn}, \delta_{mn});$$

2°. Que le coefficient de l'avant-dernier terme de X est égal au produit du dernier terme par la somme

$$\sum \frac{\frac{d\Phi}{d\gamma}\gamma' + \frac{d\Phi}{d\delta}\delta' + \Phi_1}{\Phi},$$

où le signe $\sum$ s'étend à tous les couples $(\gamma_1, \delta_1), \ldots, (\gamma_{mn}, \delta_{mn})$ fournis par les racines (γ, δ), etc.

17. De là résulte immédiatement que si l'on désigne par $\sum x$ la somme des racines

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{mnp},$$

de l'équation finale $X = 0$, résultant de l'élimination de y et de z entre les trois équations $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, on aura

$$\sum x = -\sum \frac{\frac{d\varphi}{d\alpha}\alpha' + \frac{d\varphi}{d\beta}\beta' + \varphi_1}{\varphi}:$$

on aura de même

$$\sum \frac{1}{x} = -\sum \frac{\frac{d\Phi}{d\gamma}\gamma' + \frac{d\Phi}{d\delta}\delta' + \Phi_1}{\Phi},$$

et

$$x_1 x_2 \ldots x_{mnp} = \pm \frac{\Phi(\gamma_1, \delta_1) \ldots \Phi(\gamma_{mn}, \delta_{mn})}{\varphi(\alpha_1, \beta_1) \ldots \varphi(\alpha_{mn}, \beta_{mn})}.$$

On obtiendra évidemment des formules semblables pour quatre équations à quatre inconnues, cinq équations à cinq inconnues, etc.

III.

18. Les théorèmes relatifs aux tangentes parallèles à une même droite et aux plans tangents parallèles à un même plan, à l'occasion desquels j'ai composé ce Mémoire, se démontrent aisément d'une manière directe à l'aide des formules posées plus haut.

Il faut, en premier lieu (n° **2**), faire voir que si entre les deux équations algébriques

$$M(x, y) = 0, \quad \frac{dM}{dx} + a\frac{dM}{dy} = 0,$$

on élimine une des deux inconnues, y par exemple, la somme $\sum x$ des racines de l'équation finale en x sera indépendante de a.

Or, si l'on pose

$$\frac{dM}{dx} + a\frac{dM}{dy} = N,$$

et si l'on regarde les polynomes M, N, comme étant ceux dont il a été question dans les n^os **6**, ..., **13**, on aura, en reprenant les notations de ces numéros,

$$\sum x = -\sum \frac{F'(\alpha)\alpha' + F_1(\alpha)}{F(\alpha)},$$

α étant en général une racine de $f(\alpha) = 0$, et α' satisfaisant à l'équation $f'(\alpha)\alpha' + f_1(\alpha) = 0$. Mais ici la fonction N dépend de M, et par suite F et F_1 dépendent de f et f_1. A cause de

$$M = x^m f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

on trouve immédiatement que les fonctions $F(u)$ et $F_1(u)$ sont de cette forme

$$F(u) = mf(u) + (a-u)f'(u),$$
$$F_1(u) = (m-1)f_1(u) + (a-u)f_1'(u),$$

d'où

$$F'(u) = (m-1)f'(u) + (a-u)f''(u).$$

En faisant $u = \alpha$, et se rappelant que $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha)\alpha' + f_1(\alpha) = 0$, il viendra donc

$$\frac{F'(\alpha)\alpha' + F_1(\alpha)}{F(\alpha)} = \frac{f''(\alpha)\alpha' + f_1'(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

quantité entièrement indépendante de a, d'où il suit que $\sum x$ est aussi une quantité indépendante de a; *C. Q. F. D.*

46..

19. Arrêtons-nous ici un moment pour indiquer quelques conséquences curieuses que M. Duhamel a tirées, comme il suit, du théorème précédent.

Soit ω l'angle que fait avec l'axe des x la droite parallèlement à laquelle on mène les tangentes : on vient de voir que $\sum x$ est une quantité indépendante de ω; en faisant varier ω d'une quantité infiniment petite $d\omega$, ce qui produira dans x la variation infiniment petite dx, on aura donc $\sum dx = 0$, et par suite (à cause de l'égale inclinaison des tangentes sur l'axe des x) $\sum ds = 0$, s étant l'arc de la courbe. L'équation $\sum ds = 0$ nous apprend déjà que la somme des variations des arcs s résultant d'un changement dans la direction de la droite à laquelle les tangentes sont parallèles, est égale à zéro, en sorte que si quelques-uns de ces arcs augmentent d'une certaine quantité, les autres devront diminuer d'une quantité équivalente. Mais on a un théorème plus élégant en divisant l'équation $\sum ds = 0$ par la constante $d\omega$ que l'on peut faire passer sous le signe $\sum$, et en observant que le rapport de ds à $d\omega$ est précisément le rayon de courbure ρ, On obtient ainsi l'équation $\sum \rho = 0$, en sorte que « si l'on mène à » une courbe géométrique plane toutes ses tangentes parallèles à une » même droite, la somme des rayons de courbure relatifs aux divers » points de contact de ces tangentes, sera généralement égale à zéro. » On conclut de là sans difficulté que le centre des moyennes distances des centres de courbure relatifs aux divers points de contact est précisément le même que celui de ces points, et par conséquent ne dépend pas de la valeur de l'angle ω. Ajoutons que l'équation $\sum \rho = 0$ peut être à son tour différenciée ou intégrée par rapport à ω un nombre quelconque de fois, ce qui fournit de nouveaux théorèmes. En nommant ρ', ρ'',... les rayons de courbure des développées successives et se rappelant que $\rho' d\omega = d\rho$, $\rho'' d\omega = d\rho'$,..., on en conclut, par exemple, $\sum \rho' = 0$, $\sum \rho'' = 0, \ldots$, ce qui est assez remarquable.

Dans un des numéros suivants, ces théorèmes se trouveront complétés par d'autres, d'un genre différent, qu'une analyse plus compliquée nous fournira. Nous démontrerons, en effet, qu'on a aussi

$$\sum \frac{1}{\rho} = 0 \text{ [*]},$$

d'où, en différentiant par rapport à ω, on pourra tirer

$$\sum \frac{\rho'}{\rho^2} = 0, \text{ etc.}$$

20. Occupons-nous maintenant des surfaces et proposons-nous de démontrer que « si l'on mène à une surface géométrique la série com» plète des plans tangents parallèles à un plan donné, le centre des » moyennes distances des points de contact ne dépendra en aucune » manière de la position du plan donné. » En d'autres termes, considérons les trois équations algébriques suivantes, à trois inconnues,

$$\mathrm{M}(x, y, z) = 0, \quad \frac{d\mathrm{M}}{dx} + a\,\frac{d\mathrm{M}}{dz} = 0, \quad \frac{d\mathrm{M}}{dy} + b\,\frac{d\mathrm{M}}{dz} = 0,$$

et prouvons que la somme $\sum x$ des racines de l'équation finale en x, résultant de l'élimination de deux des inconnues (y et z), sera indépendante de a et b.

Posons

$$\frac{d\mathrm{M}}{dy} + b\,\frac{d\mathrm{M}}{dz} = \mathrm{N}, \quad \frac{d\mathrm{M}}{dx} + a\,\frac{d\mathrm{M}}{dz} = \mathrm{P},$$

et considérons M, N, P comme étant les trois polynomes dont il a été question dans les nos **14**,..., **17**. D'après une formule du no **17**, nous aurons

$$\sum x = -\sum \frac{\frac{d\varphi}{d\alpha}\,\alpha' + \frac{d\varphi}{d\beta}\,\beta' + \varphi_1}{\varphi(\alpha, \beta)},$$

[*] C'est la communication que j'avais faite de ce dernier théorème à la Société philomatique, qui a donné lieu aux remarques de M. Duhamel.

et je vais montrer que la quantité placée sous le signe $\sum$ dans le second membre est par exemple indépendante de a. En effet les polynomes N et P se déduisent ici de M, et de cette dépendance on conclut sans difficulté la forme des fonctions F, φ, F_1, φ_1, par rapport à leurs variables; on trouve, quels que soient u et v,

$$F(u, v) = \frac{df(u, v)}{du} + b\frac{df(u, v)}{dv},$$

$$F_1(u, v) = \frac{df_1(u, v)}{du} + b\frac{df_1(u, v)}{dv},$$

$$\varphi(u, v) = mf(u, v) - u\frac{df(u, v)}{du} + (a - v)\frac{df(u, v)}{dv},$$

$$\varphi_1(u, v) = (m-1)f_1(u, v) - u\frac{df_1(u, v)}{du} + (a - v)\frac{df_1(u, v)}{dv}.$$

Les équations qui fournissent α, β, α', β' sont donc

$$f(\alpha, \beta) = 0, \quad \frac{df}{d\alpha} + b\frac{df}{d\beta} = 0,$$

$$\frac{df}{d\alpha}\alpha' + \frac{df}{d\beta}\beta' + f_1 = 0,$$

$$\left(\frac{d^2f}{d\alpha^2} + b\frac{d^2f}{d\alpha d\beta}\right)\alpha' + \left(\frac{d^2f}{d\alpha d\beta} + b\frac{d^2f}{d\beta^2}\right)\beta' + \frac{df_1}{d\alpha} + b\frac{df_1}{d\beta} = 0,$$

où l'on a, pour abréger, écrit f et f_1 au lieu de $f(\alpha, \beta)$ et $f_1(\alpha, \beta)$. Ces équations renferment le paramètre b, mais non le paramètre a. En vertu des deux premières, la valeur du dénominateur $\varphi(\alpha, \beta)$ peut être mise sous la forme

$$\varphi(\alpha, \beta) = (a - \beta + b\alpha)\frac{df}{d\beta}.$$

Quant au numérateur

$$\frac{d\varphi}{d\alpha}\alpha' + \frac{d\varphi}{d\beta}\beta' + \varphi_1,$$

on peut, dans son expression, supprimer d'abord la quantité

$$(m-1)\left(\frac{df}{d\alpha}\alpha' + \frac{df}{d\beta}\beta' + f_1\right)$$

qui est nulle, et cela fait, on reconnaît qu'il est la différence des deux termes suivants :

$$(a-\beta)\left(\frac{d^2f}{d\alpha d\beta}\alpha' + \frac{d^2f}{d\beta^2}\beta' + \frac{df_1}{d\beta}\right),$$

et

$$\alpha\left(\frac{d^2f}{d\alpha^2}\alpha' + \frac{d^2f}{d\alpha d\beta}\beta' + \frac{df_1}{d\alpha}\right),$$

dont le second (d'après la dernière des quatre équations de condition écrites plus haut) est égal et de signe contraire à

$$b\alpha\left(\frac{d^2f}{d\alpha d\beta}\alpha' + \frac{d^2f}{d\alpha^2}\beta' + \frac{df_1}{d\beta}\right),$$

en sorte que la valeur du numérateur cherché devient

$$\left(a-\beta+b\alpha\right)\left(\frac{d^2f}{d\alpha d\beta}\alpha' + \frac{d^2f}{d\alpha^2}\beta' + \frac{df_1}{d\alpha}\right).$$

On voit dès lors qu'en le divisant par

$$\varphi(\alpha,\beta) = \left(a-\beta+b\alpha\right)\frac{df}{d\beta},$$

le facteur $a - \beta + b\alpha$ disparaîtra, ce qui rendra le quotient indépendant de a, et par suite la valeur de $\sum x$ indépendante de a, conformément au théorème énoncé.

Nous n'avons pas besoin de dire qu'un théorème semblable a lieu et se démontre de la même manière pour un nombre quelconque d'équations et d'inconnues. Il est également inutile d'ajouter que nos formules fourniraient, si on le voulait, des démonstrations directes de plusieurs autres propositions analogues aux précédentes, et auxquelles les géomètres ont été conduits par des méthodes plus simples.

21. Il était intéressant de chercher si le théorème de M. Duhamel, relatif aux courbes planes, que l'on a démontré n° **19**, et qui est exprimé par l'équation $\sum \rho = 0$, a son analogue pour les surfaces. Voici les résultats que j'ai obtenus sur ce sujet.

Quels que soient les paramètres a, b, contenus dans l'équation

$$z = ax + by$$

d'un plan parallèlement auquel on mène une série de plans tangents à une surface géométrique donnée, les sommes $\sum x$, $\sum y$, $\sum z$ relatives aux coordonnées des points de contact sont constantes; si donc a et b éprouvent les variations infiniment petites da, db, et que par suite x, y, z reçoivent les accroissements dx, dy, dz, on aura

$$\sum dx = 0, \quad \sum dy = 0, \quad \sum dz = 0.$$

D'ailleurs, par la condition fondamentale du problème, les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ de l'ordonnée z de la surface doivent être, aux points de contact, égales à a et b : la différenciation par rapport à a et b donnera donc

$$\frac{d^2z}{dx^2}dx + \frac{d^2z}{dx\,dy}dy = da.$$

$$\frac{d^2z}{dxdy}dx + \frac{d^2z}{dy^2}dy = db,$$

équations que l'on écrira sous une forme plus simple si l'on désigne, conformément à l'usage ordinaire, par r, s, t les trois dérivées partielles du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$; on trouvera ainsi

$$dx = \frac{tda - sdb}{rt - s^2}, \quad dy = \frac{rdb - sda}{rt - s^2};$$

par suite, les équations

$$\sum dx = 0, \quad \sum dy = 0,$$

se décomposeront dans les trois suivantes

$$\sum \frac{t}{rt - s^2} = 0, \quad \sum \frac{s}{rt - s^2} = 0, \quad \sum \frac{r}{rt - s^2} = 0;$$

l'équation $\sum dz = 0$ se décomposerait aussi dans deux équations qu'il serait aisé de former, mais qui deviendront identiques et inutiles si l'on suppose $a = 0$, $b = 0$, c'est-à-dire si l'on prend le plan des xy parallèle aux plans tangents menés à la surface géométrique. Les trois équations précédentes en r, s, t seront dès-lors des équations de condition entre les deux rayons de courbure principaux et les directions des sections principales relatives aux divers points de contact. En effet, les dérivées de z du premier ordre étant nulles, les éléments de la courbure ne dépendront que des dérivées secondes r, s, t. En particulier l'on aura

$$\sum \frac{r + t}{rt - s^2} = 0,$$

et l'on en conclura, d'après les formules connues,

$$\sum (\rho + \rho') = 0,$$

ρ et ρ' étant les rayons de courbure principaux relatifs à chacun des points de contact.

Plus tard nous verrons qu'il existe entre les dérivées r, s, t, qui entrent dans les formules précédentes, beaucoup d'autres relations simples, et que, par exemple, on a

$$\sum \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) = 0, \quad \sum \left(\frac{\rho'}{\rho^2} + \frac{\rho}{\rho'^2}\right) = 0, \text{ etc.}$$

IV.

22. Reportons-nous maintenant aux formules du n° **13** et du n° **17**, d'abord à celles du n° **13**, pour les transformer ou les interpréter géométriquement et en déduire de nouveaux théorèmes. Ces formules du n° **13** sont, comme on l'a vu, relatives à deux courbes planes représentées par les deux équations $M(x, y) = 0$, $N(x, y) = 0$, dont les premiers membres peuvent être écrits à volonté sous l'une ou sous l'autre des deux formes suivantes :

$$M = x^m f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots\ldots,$$

$$N = x^n F\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} F_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots\ldots,$$

ou

$$M = \mathrm{f}(y) + x\,\mathrm{f}_1(y) + \ldots\ldots,$$

$$N = F(y) + xF_1(y) + \ldots\ldots :$$

la première de ces formes met en évidence les asymptotes des courbes, tandis que la seconde met en évidence leurs tangentes menées aux divers points où elles sont coupées par la transversale arbitraire que l'on a prise pour axe des y.

Cela posé, en tirant de la première équation la valeur de y pour la reporter dans la seconde, on a obtenu l'équation finale en x, et l'on a trouvé que la somme $\sum x$ des racines de cette équation finale est exprimée par la formule

$$\sum x = -\sum \frac{F'(\alpha)\alpha' + F_1(\alpha)}{F(\alpha)},$$

α et α' étant déterminées par les équations $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha)\alpha' + f_1(\alpha) = 0$. Or cette somme $\sum x$ ne dépend que des fonctions f, f_1, F et F_1 ; par conséquent elle restera constante si l'on conserve ces fonctions en changeant comme on voudra les fonctions suivantes f_2, F_2, etc., sans pourtant leur faire dépasser le degré maximum qu'elles peuvent atteindre. Il est évident qu'un pareil changement n'altérerait pas non plus la somme $\sum y$ relative aux racines y de l'équation finale obtenue par l'élimination de x, et que partant il n'altérerait pas davantage la position du centre des moyennes distances des points de rencontre des deux courbes.

Lorsque les fonctions f, f_1 restent les mêmes, les asymptotes de la première courbe, représentées généralement par l'équation $y = \alpha x + \alpha'$, restent aussi les mêmes. Réciproquement, si les mêmes asymptotes appartiennent à une autre courbe géométrique, il faudra que la fonction f relative à cette autre courbe fournisse les mêmes racines α quand on l'égalera à zéro, et par conséquent soit la même que la fonction primitive f, ou du moins n'en diffère que par un facteur constant qu'on peut à volonté introduire ou supprimer : l'identité établie entre les deux fonctions f, il faudra ensuite que la valeur de α' soit la même de part et d'autre ; il faudra donc que les deux quantités $f_1(\alpha)$ relatives aux deux courbes soient aussi égales pour les m racines α de $f(\alpha) = 0$; et comme les fonctions f_1 ne sont que de degré $(m - 1)$, il faudra par suite que ces fonctions soient identiques.

Ainsi, pour que deux courbes géométriques aient les mêmes asymptotes, il faut que les fonctions f, f_1, soient identiques dans les équations de ces deux courbes ou puissent être rendues identiques en multipliant une de ces équations par un facteur constant.

L'identité de la seule fonction f, à un facteur constant près, est la condition nécessaire et suffisante pour que les asymptotes de ces courbes soient parallèles chacune à chacune ; mais cette condition ne suffit pas pour que les asymptotes soient les mêmes de part et d'autre. Il faut y joindre, comme on vient de le voir, la condition nouvelle de l'identité des fonctions f_1 au même facteur constant près.

Si maintenant on se rappelle que le groupe total des asymptotes d'une courbe géométrique de l'ordre m forme aussi une ligne géométrique de l'ordre m que l'on peut regarder comme ayant les mêmes asymptotes que la première, on verra que le théorème donné tout à l'heure peut s'énoncer ainsi : « Le centre des moyennes distances des points » de rencontre de deux courbes géométriques est aussi le centre des » moyennes distances des points de rencontre des asymptotes de l'une » de ces deux courbes avec l'autre ou avec ses asymptotes. »

Ainsi en particulier : « Quand les asymptotes de deux courbes » géométriques passent toutes par un même point, ce point est le

» centre des moyennes distances des points de rencontre des deux » courbes. »

23. L'expression

$$\sum x = -\sum \frac{F'(\alpha)\alpha' + F_1(\alpha)}{F(\alpha)},$$

de la somme des racines x de l'équation finale, devient

$$\sum x = \sum \frac{F'(\alpha) f_1(\alpha)}{F(\alpha) f'(\alpha)} - \sum \frac{F_1(\alpha)}{F(\alpha)},$$

lorsqu'on remplace α' par sa valeur. Elle est la somme de deux parties distinctes, dont l'une dépend de la fonction f_1 et varie proportionnellement à cette fonction f_1, de manière qu'elle augmente dans le rapport de g à l'unité lorsqu'on substitue à la fonction f_1 son produit gf_1 par une constante arbitraire g : la seconde dépend de F_1 et non plus de f_1. Ces deux parties ne s'offrent pas ici sous une forme semblable, et la cause en est que pour opérer l'élimination, on a résolu d'abord l'équation $M = 0$ par rapport à y, puis porté les racines y dans N, opérations dans lesquelles les deux polynomes M et N n'ont pas joué le même rôle. Mais on aurait pu effectuer l'élimination dans un ordre inverse, résoudre d'abord l'équation $N = 0$, puis substituer dans le polynome M les racines obtenues. De cette manière, en déterminant λ et λ' par les équations

$$F(\lambda) = 0, \quad F'(\lambda)\lambda' + F_1(\lambda) = 0,$$

on aurait évidemment trouvé

$$\sum x = \sum \frac{f'(\lambda) F_1(\lambda)}{f(\lambda) F'(\lambda)} - \sum \frac{f_1(\lambda)}{f(\lambda)},$$

le signe $\sum$ s'étendant dans le second membre à toutes les racines λ.

Cette expression nouvelle de $\sum x$ doit être égale à l'ancienne. Comparant donc entre elles les parties qui dépendent des fonctions f_1 ou F_1

et qui varient proportionnellement à ces fonctions, on aura

$$\sum \frac{F'(\alpha) f_1(\alpha)}{F(\alpha) f'(\alpha)} = -\sum \frac{f_1(\lambda)}{f(\lambda)},$$

$$\sum \frac{f'(\lambda) F_1(\lambda)}{f(\lambda) F'(\lambda)} = -\sum \frac{F_1(\alpha)}{F(\alpha)},$$

et l'on en conclura cette forme symétrique de l'expression de $\sum x$, savoir,

$$\sum x = -\sum \frac{F_1(\alpha)}{F(\alpha)} - \sum \frac{f_1(\lambda)}{f(\lambda)},$$

où les deux $\sum$ du second membre sont relatifs, le premier aux racines de $f(\alpha) = 0$, le second aux racines de $F(\lambda) = 0$. Cette expression de $\sum x$ ne contient plus en dénominateur les dérivées f', F', et l'on peut observer en passant qu'elle ne serait pas, comme les précédentes, en défaut, quand même les équations

$$f(\alpha) = 0, \quad F(\lambda) = 0,$$

auraient des racines multiples, pourvu que ces équations n'aient aucune racine commune.

Remarquons aussi que les droites dont les équations sont $y = \alpha x$, ou $y = \lambda x$, c'est-à-dire les droites menées par l'origine parallèlement aux asymptotes de la première ou de la seconde courbe, coupent soit la seconde ou la première courbe, soit les asymptotes de la seconde ou de la première courbe, en des points dont les abscisses sont déterminées respectivement par des équations de la forme

$$x^m f(\lambda) + x^{m-1} f_1(\lambda) + \ldots = 0,$$

$$x^n F(\alpha) + x^{n-1} F_1(\alpha) + \ldots = 0:$$

la somme des abscisses des $2mn$ points de rencontre ainsi obtenus est donc précisément égale à

$$-\sum \frac{f_1(\lambda)}{f(\lambda)} - \sum \frac{F_1(\alpha)}{F(\alpha)},$$

ou à

$$\sum x;$$

l'abscisse de leur centre des moyennes distances est par suite

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\Sigma x}{mn},$$

c'est-à-dire qu'elle est égale à la moitié de l'abscisse du centre des moyennes distances des points où se coupent les deux courbes. L'origine des coordonnées et la direction de l'axe des abscisses sont d'ailleurs quelconques. On a donc ce théorème : « Deux courbes géométriques étant dans un même plan, si par un point O pris à volonté » dans ce plan, on mène des parallèles aux asymptotes de la première, puis aux asymptotes de la seconde courbe, et qu'on cherche » les points de rencontre de ces parallèles avec la seconde et la première courbe respectivement, ou avec leurs asymptotes, le centre » des moyennes distances de ces points de rencontre sera généralement au milieu de la droite OC qui joint le point O au centre C des » moyennes distances des points d'intersection des deux courbes. »

24. L'équation

$$\sum \frac{f'(\lambda) F_1(\lambda)}{f(\lambda) F'(\lambda)} = -\sum \frac{F_1(\alpha)}{F(\alpha)},$$

que nous avons obtenue tout à l'heure d'une manière si simple, savoir, en égalant entre elles deux expressions différentes d'une même quantité $\sum x$, mérite d'être remarquée, non pas précisément en elle-même, mais à cause de la facilité avec laquelle elle s'étend aux fonctions de plusieurs variables et conduit ainsi à un beau théorème de M. Jacobi. En supposant la fonction F identique avec f', on voit que le premier membre s'évanouit de lui-même puisque le $\sum$ qui s'y trouve est relatif aux racines de $F(\lambda) = f'(\lambda) = 0$. On a donc

$$\sum \frac{F_1(\alpha)}{f'(\alpha)} = 0,$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les racines α de l'équation $f(\alpha) = 0$. On suppose que l'équation $f = 0$ n'a pas de racines égales, mais f est d'ailleurs un polynome quelconque de degré m : quant au polynome F_1, il est aussi quelconque, mais de degré inférieur à F ou f', c'est-à-dire de degré $(m - 2)$ au plus.

Cette équation

$$\sum \frac{F_1(\alpha)}{f'(\alpha)} = 0$$

est connue au moins depuis Euler, mais c'est M. Jacobi qui, le premier, l'a étendue aux fonctions de plusieurs variables dans le Mémoire cité (n° **3**). Appliquée au cas où la fonction $f(\alpha)$ est de la forme

$$(\alpha - t)\, \varpi(\alpha),$$

elle fournit, comme on sait, la formule

$$\frac{F_1(t)}{\varpi(t)} = \sum \frac{F_1(t_i)}{(t - t_i)\varpi'(t_i)},$$

où t_i représente successivement toutes les racines de l'équation

$$\varpi(t_i) = 0.$$

Elle renferme donc implicitement toute la théorie de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. Jusqu'ici nous admettons, il est vrai, que l'équation

$$\varpi(t_i) = 0$$

n'a que des racines inégales; mais on descend très-facilement de ce cas général au cas particulier des racines égales, en remplaçant d'abord les racines égales par des racines inégales, infiniment peu différentes, puis passant à la limite après avoir convenablement préparé les expressions qu'on veut traiter. C'est précisément à cause de cette facilité bien connue avec laquelle on fait dépendre du cas général chacun des cas particuliers où les formules ordinaires paraissent en défaut, que nous nous sommes de préférence, dans ce Mémoire, attaché au cas général, laissant de côté les cas particuliers, dans le détail desquels il aurait été très-long et peu utile d'entrer.

25. La formule du n° **13**,

$$\sum \frac{1}{x} = - \sum \frac{F'(\gamma)\gamma' + F_1(\gamma)}{F(\gamma)},$$

donne lieu à des remarques semblables à celles que nous venons de présenter en nous occupant de $\sum x$; seulement les équations $M = 0$, $N = 0$, doivent alors être mises sous la forme

$$\mathrm{f}(y) + x\,\mathrm{f}_1(y) + \ldots\ldots = 0,$$

$$F(y) + x\,F_1(y) + \ldots\ldots = 0:$$

les tangentes menées aux divers points des courbes situées sur la transversale prise pour axe des y, remplaceront, comme on l'a déjà dit (n° **9**), les asymptotes qui figuraient dans les énoncés précédents; les sommes d'abscisses se changeront en sommes des inverses des abscisses, et le centre des moyennes distances en centre des moyennes harmoniques. Nous nous bornerons naturellement à cette remarque générale que l'on développera sans peine.

26. L'équation

$$x_1 x_2 \ldots\ldots x_{mn} = (-1)^{mn} \cdot \frac{F(\gamma_1)F(\gamma_2)\ldots F(\gamma_m)}{\mathrm{F}(\alpha_1)\mathrm{F}(\alpha_2)\ldots \mathrm{F}(\alpha_m)}$$

donne lieu aussi à des remarques utiles. Son second membre dépend des fonctions f, f, F, F, c'est-à-dire des directions des asymptotes de nos deux courbes, et des points où ces deux courbes rencontrent l'axe des y. Cela étant on voit sans peine que le produit $x_1 x_2 \ldots x_{mn}$ des abscisses des points d'intersection sera le même pour nos deux courbes (M), (N), ou pour deux autres lignes géométriques quelconques de même degré ayant chacune à chacune des asymptotes de même direction que (M), (N), et de plus coupant chacune à chacune l'axe des y dans les mêmes points. On pourra dès-lors substituer à la première courbe (M) un groupe de m droites respectivement parallèles à ses m asymptotes et partant des m points où cette courbe coupe l'axe Oy; on pourra substituer à la seconde courbe (N) un groupe analogue : ces deux groupes, en effet, peuvent être regardés comme formant deux lignes géométriques, l'une du degré m, l'autre du degré n, et remplissant les conditions voulues. De là ce théorème : « Deux courbes géo-
» métriques de degrés m et n étant rapportées à deux axes coordonnés,
» le produit des abscisses de leurs points d'intersection est égal au pro-
» duit des abscisses des points d'intersection de deux groupes de droites,
» composés l'un de m parallèles aux m asymptotes de la première courbe
» menées par les m points où elle rencontre l'axe des y, l'autre de n
» parallèles aux n asymptotes de la seconde courbe menées de même
» par les points où elle coupe l'axe des y. »

27. Les deux produits $F(\gamma_1) F(\gamma_2) \ldots F(\gamma_m)$, $\mathrm{F}(\alpha_1) \mathrm{F}(\alpha_2) \ldots \mathrm{F}(\alpha_m)$, dont la valeur de $x_1 x_2 \ldots x_{mn}$ dépend, peuvent recevoir une interprétation géométrique assez élégante. Admettons, ce qui est permis, qu'on ait préparé l'équation $\mathrm{N} = 0$ de manière à rendre égal à l'unité le coefficient de y^n dans N : les coefficients de u^n et y^n dans les polynomes $\mathrm{F}(u)$, $F(y)$ seront par suite égaux aussi à l'unité. En désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les racines de l'équation $\mathrm{F}(\lambda) = 0$, et par $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ les racines de l'équation $F(\nu) = 0$, puis décomposant $\mathrm{F}(u)$ et $F(y)$ en facteurs, on aura donc

$$\mathrm{F}(u) = (u - \lambda_1)(u - \lambda_2) \ldots (u - \lambda_n),$$

$$F(y) = (y - \nu_1)(y - \nu_2) \ldots (y - \nu_n),$$

d'où résulte immédiatement

$$F(\alpha_1)\,F(\alpha_2)\ldots F(\alpha_m) = (-1)^{mn}.(\lambda_1-\alpha_1)(\lambda_1-\alpha_2)\ldots(\lambda_i-\alpha_j)\ldots,$$

$$F(\gamma_1)\,F(\gamma_2)\ldots F(\gamma_m) = (-1)^{mn}.(\nu_1-\gamma_1)(\nu_1-\gamma_2)\ldots(\nu_i-\gamma_j)\ldots,$$

l'indice i pouvant croître jusqu'à n et l'indice j jusqu'à m. Or $(\nu_1-\gamma_1), \ldots (\nu_i-\gamma_j), \ldots$ ne sont autre chose que les mn segments compris entre chacun des m points où la première courbe coupe l'axe des y et chacun des n points où la seconde courbe coupe ce même axe; quant aux facteurs $(\lambda_1-\alpha_1), \ldots, (\lambda_i-\alpha_j), \ldots$, prenons sur la partie négative de l'axe des x, à une distance de l'origine O des coordonnées égale à l'unité, un point fixe A, et nous verrons que ces facteurs représentent les mn segments compris entre chacun des m points où les parallèles aux asymptotes de la première courbe menées par le point A coupent l'axe des y et chacun des n points où les parallèles aux asymptotes de la seconde courbe, menées aussi par le point A, coupent ce même axe.

Soient $h_1, h_2, \ldots, h_{mn}$ les premiers segments, et $l_1, l_2, \ldots, l_{mn}$ les derniers : on aura

$$F(\gamma_1)\,F(\gamma_2)\ldots F(\gamma_m) = (-1)^{mn}.h_1\,h_2\ldots h_{mn},$$

$$F(\alpha_1)\,F(\alpha_2)\ldots F(\alpha_m) = (-1)^{mn}.\,l_1\,l_2\,\ldots l_{mn}.$$

Et, puisque

$$x_1\,x_2\ldots x_{mn} = (-1)^{mn}.\frac{F(\gamma_1)F(\gamma_2)\ldots F(\gamma_m)}{F(\alpha_1)F(\alpha_2)\ldots F(\alpha_m)},$$

on en conclura

$$x_1\,x_2\ldots x_{mn} = (-1)^{mn}.\frac{h_1\,h_2\ldots h_{mn}}{l_1\,l_2\ldots l_{mn}},$$

équation qui exprime une propriété très-générale des courbes géométriques. Les axes coordonnés que l'on emploie ici sont quelconques ainsi que l'origine des coordonnées.

28. Déplaçons cette origine sur l'axe des x sans changer la direction de l'axe des y, en sorte que l'abscisse de chacun des points d'intersection de nos deux courbes diminue d'une constante g sans que l'ordonnée change : au point auxiliaire A relatif à l'ancienne origine O et situé à une distance AO $= 1$ de cette origine, correspondra un autre point auxiliaire A' situé aussi à une distance A'O' $= 1$ de la nouvelle origine O'; les segments $h_1, h_2, \ldots, h_{mn}$ deviendront $H_1, H_2, \ldots, H_{mn}$, tandis que les segments $l_1, l_2, \ldots, l_{mn}$ conserveront leurs valeurs. On aura donc

$$(x_1 - g)(x_2 - g) \ldots (x_{mn} - g) = (-1)^{mn} \cdot \frac{H_1 H_2 \ldots H_{mn}}{l_1 l_2 \ldots l_{mn}}.$$

De là résulte

$$\frac{(x_1 - g)(x_2 - g) \ldots (x_{mn} - g)}{x_1 x_2 \ldots \ldots x_{mn}} = \frac{H_1 H_2 \ldots H_{mn}}{h_1 h_2 \ldots h_{mn}}.$$

En donnant à g un nombre suffisamment grand de valeurs particulières, on pourra, par les formules d'interpolation, en conclure, quel que soit g, la fonction entière de g placée au premier membre de cette équation, et former tous les termes de l'équation en x dont les racines sont $x_1, x_2, \ldots, x_{mn}$.

Si l'on suppose la valeur de g infiniment petite, et si l'on représente par $dh_1, \ldots, dh_{mn}$ les accroissements infiniment petits $H_1 - h_1, \ldots, H_{mn} - h_{mn}$, on trouvera, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$-g\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{mn}}\right) \quad \text{ou} \quad -g\sum \frac{1}{x},$$

pour valeur du premier membre de l'équation

$$\frac{(x_1 - g)(x_2 - g) \ldots (x_{mn} - g)}{x_1 x_2 \ldots \ldots x_{mn}} = \frac{H_1 H_2 \ldots H_{mn}}{h_1 h_2 \ldots h_{mn}},$$

et

$$\frac{dh_1}{h_1} + \ldots + \frac{dh_{mn}}{h_{mn}} \quad \text{ou} \quad \sum \frac{dh}{h},$$

pour valeur du second membre. Il s'ensuit

$$\sum \frac{1}{x} = -\sum \frac{dh}{g},$$

équation qui fournit la valeur de $\sum \frac{1}{x}$ et qui rentre au fond dans celle que nous avons déjà donnée pour exprimer cette quantité. Pour l'interpréter géométriquement, observons que dans le voisinage de l'axe des y, et pour une abscisse comprise entre 0 et g, on peut remplacer les éléments de nos deux courbes par ceux de leurs tangentes. Cela étant, considérons un quelconque des segments h ou (MN) compris sur l'axe des y entre un point (M) de la première courbe et un point (N) de la seconde, puis menons par le point auxiliaire A qui nous a servi tout à l'heure des parallèles aux tangentes des deux courbes en (M) et (N) : soit k le segment intercepté sur l'axe des y par ces deux parallèles. On aura évidemment la proportion

$$dh : g :: k : 1, \quad \text{d'où} \quad \frac{dh}{g} = k,$$

et par conséquent

$$\sum \frac{1}{x} = -\sum \frac{k}{h} = -\frac{\Sigma k}{\Sigma h}.$$

Ainsi la somme des valeurs inverses des abscisses des points de rencontre de nos deux courbes géométriques est égale à la somme prise négativement des rapports de chacun des segments k au segment correspondant h, ou (ce qui revient au même) est égale au rapport pris négativement de la somme des segments k à la somme des segments h [*].

---

[*] Quand on divise par $(x_1 - g)$ les deux membres de la formule

$$\frac{(x_1 - g)(x_2 - g)\ldots(x_{mn} - g)}{x_1 x_2 \ldots\ldots\ldots x_{mn}} = \frac{H_1 H_2 \ldots H_{mn}}{h_1 h_2 \ldots h_{mn}},$$

et qu'on pose ensuite $g = x_1$, le rapport de H_1 à g se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; mais en se laissant guider par des considérations semblables aux précédentes, il est aisé de trou-

Une interprétation géométrique du même genre pourait être aisément trouvée pour les sommes

$$\sum \frac{1}{x^2}, \quad \sum \frac{1}{x^3}, \ldots, \quad \sum x, \quad \sum x^2, \ldots :$$

pour $\sum \frac{1}{x^2}$, par exemple, on pourra recourir soit à la considération des rayons de courbure aux points (M), (N), soit à celle de nouveaux segments que l'on déduira des segments k, à peu près comme on a déduit ceux-ci des segments h; pour $\sum \frac{1}{x^3}, \ldots$ on introduira dans les théorèmes les éléments qui dépendent des différentielles d'ordre supérieur. On obtiendra, du reste, les valeurs de ces diverses sommes en développant suivant les puissances de g (dont $H_1, H_2, \ldots, H_{mn}$ sont fonctions) les deux membres de l'équation

$$\frac{(x_1 - g)(x_2 - g)\ldots(x_{mn} - g)}{x_1 x_2 \ldots\ldots x_{mn}} = \frac{H_1 H_2 \ldots H_{mn}}{h_1 h_2 \ldots h_{mn}},$$

et comparant les coefficients des puissances semblables, ou bien encore on les déduira de la formule

$$\sum \frac{1}{x} = -\sum \frac{k}{h},$$

---

ver la vraie valeur de ce rapport exprimée au signe près par un certain segment K_1. La formule

$$\frac{(x_2 - x_1)\ldots(x_{mn} - x_1)}{x_1 x_2 \ldots\ldots x_{mn}} = -\frac{K_1 H_2 \ldots H_{mn}}{h_1 h_2 \ldots h_{mn}},$$

lorsqu'on y permute entre elles les lettres $x_1, x_2, \ldots, x_{mn}$, en tenant compte bien entendu des changements que cela entraîne dans les valeurs de K_1, $H_2, \ldots, H_{mn}$, conduit à plusieurs autres formules du même genre, dont le produit fait connaître la valeur de $(x_2 - x_1)^2 \ldots (x_i - x_j)^2 \ldots$ A peine est-il nécessaire de dire qu'après avoir mené par le point (x_1, y_1) où les deux courbes (M) et (N) se coupent une droite parallèle à l'axe Oy, on obtient le segment K_1 en cherchant la partie de cette droite comprise entre deux autres droites menées par un point auxiliaire ayant une abscisse égale à $(x_1 - 1)$ parallèlement aux deux tangentes en (x_1, y_1) aux deux branches des courbes respectives (M) et (N) qui se coupent en ce point.

en déplaçant sur l'axe des x l'origine des coordonnées sans changer la direction de l'axe des y; en effet, si g désigne la diminution que chaque abscisse éprouve dans ce déplacement, et si K et H représentent les valeurs nouvelles des segments k et h, on aura

$$\sum \frac{1}{x-g} = -\sum \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}},$$

et pour en conclure les valeurs de $\sum \frac{1}{x^2}$, $\sum \frac{1}{x^3}, \ldots$, il suffira de développer les deux membres suivant les puissances croissantes de la quantité g supposée très-petite : enfin, pour $\sum x$, $\sum x^2, \ldots$, on supposera la valeur de g, non plus très-petite, mais très-grande, on développera les deux membres suivant les puissances descendantes de h, et l'on fera intervenir les asymptotes rectilignes, puis les asymptotes de tous les ordres.

29. Pour terminer, indiquons encore en peu de mots une autre manière d'exprimer géométriquement les produits

$$F(\gamma_1)\,F(\gamma_2)\ldots F(\gamma_m),\quad \mathrm{F}(\alpha_1)\,\mathrm{F}(\alpha_2)\ldots \mathrm{F}(\alpha_m).$$

Désignons toujours par γ une quelconque des racines $\gamma_1, \ldots \gamma_m$ de $\mathrm{f}(\gamma) = 0$, c'est-à-dire une quelconque des abscisses des points (M) de rencontre de la première de nos deux courbes avec l'axe des y : l'équation d'une droite menée par le point (M) parallèlement à l'axe des x sera $y=\gamma$: les abscisses des points où cette parallèle coupe la seconde courbe seront fournies par l'équation

$$F(\gamma) + x F_1(\gamma) + \ldots + x^n F_n = 0,$$

dans le premier membre de laquelle le coefficient F_n de x^n est une simple constante; et par conséquent le produit de ces abscisses sera égal à

$$(-1)^n \cdot \frac{F(\gamma)}{F_n}:$$

donc le produit total $x_1 x_2 \ldots x_{mn}$ des abscisses des points de rencontre de la seconde courbe avec les diverses parallèles menées à l'axe des x par les points où la première courbe rencontre l'axe des y sera lui-même égal à

$$(-1)^{mn} \cdot \frac{F(\gamma_1) F(\gamma_2) \ldots F(\gamma_m)}{F_n^m},$$

et l'on aura

$$F(\gamma_1) F(\gamma_2) \ldots F(\gamma_m) = (-1)^{mn} \cdot F_n^m \cdot x_1 x_2 \ldots x_{mn}.$$

Soit de même α une quelconque des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ de $f(\alpha) = 0$, et $y = \alpha x$ l'équation d'une parallèle menée par l'origine à l'asymptote de la première courbe dont l'équation est $y = \alpha x + \alpha'$: les abscisses des points de rencontre de cette parallèle avec la seconde courbe seront déterminées par l'équation

$$x^n F(\alpha) + x^{n-1} F_1(\alpha) + \ldots + F_n = 0,$$

dans le premier membre de laquelle F_n est une simple constante; et par conséquent le produit de ces abscisses sera égal à

$$(-1)^n \cdot \frac{F_n}{F(\alpha)}:$$

donc le produit total $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{mn}$ des abscisses des points de rencontre de la seconde courbe avec les parallèles menées aux asymptotes de la première courbe par l'origine des coordonnées sera lui-même égal à

$$(-1)^{mn} \cdot \frac{F_n^m}{F(\alpha_1) F(\alpha_2) \ldots F(\alpha_m)},$$

et l'on aura

$$F(\alpha_1) F(\alpha_2) \ldots F(\alpha_m) = (-1)^{mn} \cdot \frac{F_n^m}{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{mn}}.$$

F_n est le terme de N indépendant à la fois de x et y; c'est par suite le terme de $F(y)$ indépendant de y : en supposant donc, comme ci-dessus, le coefficient de y^n dans N réduit à l'unité, on trouvera

$$\mathrm{F}_n = (-1)^n . \nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n,$$

$\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_2$, étant les racines de l'équation $F(\nu) = 0$, ou les ordonnées des points d'intersection de la courbe (N) avec l'axe des y. D'un autre côté, si l'on désigne par $c_1, c_2, \ldots, c_n$ les abscisses des points d'intersection de cette courbe (N) avec l'axe des x, on voit sans peine que

$$c_1 c_2 \ldots c_n = (-1)^n . \frac{\mathrm{F}_n}{F_n},$$

ce qui détermine F_n. Substituant pour F_n et F_n leurs valeurs ainsi obtenues dans les expressions des produits $\mathrm{F}(\alpha_1)\mathrm{F}(\alpha_2) \ldots \mathrm{F}(\alpha_m)$, $F(\gamma_1) F(\gamma_2) \ldots F(\gamma_m)$, on en conclut

$$\mathrm{F}(\alpha_1) \mathrm{F}(\alpha_2) \ldots \mathrm{F}(\alpha_m) = \frac{(\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n)^m}{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{mn}},$$

$$F(\gamma_1) F(\gamma_2) \ldots F(\gamma_m) = (-1)^{mn} . \frac{(\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n)^m . \mathrm{X}_1 \mathrm{X}_2 \ldots \mathrm{X}_{mn}}{(c_1 c_2 \ldots c_n)^m};$$

ces formules sont moins simples et moins élégantes que celles du n° **27** ; ici les seconds membres ne se présentent plus sous une forme symétrique par rapport aux deux courbes (M), (N); il en est de même du second membre de la formule

$$x_1 x_2 \ldots x_{mn} = \frac{\mathrm{X}_1 \mathrm{X}_2 \ldots \mathrm{X}_{mn} . \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{mn}}{(c_1 c_2 \ldots c_n)^m},$$

qui résulte immédiatement des précédentes. On pourrait examiner ce que donnent ces diverses équations, et en particulier la dernière, lorsqu'on remplace les deux courbes (M), (N) l'une par l'autre, ou lorsqu'on change la direction ou l'origine des coordonnées. On obtiendrait ainsi de nouveaux théorèmes. Mais en voilà bien assez sur ce sujet.

V.

30. Considérons actuellement les formules du n° **17**, qui sont relatives à trois équations à trois inconnues

$$M(x, y, z) = 0, \quad N(x, y, z) = 0, \quad P(x, y, z) = 0,$$

dont les premiers membres peuvent être mis à volonté sous l'une ou sous l'autre des deux formes suivantes

$$\begin{aligned} M &= x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \ldots, \\ N &= x^n F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^{n-1} F_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \ldots, \\ P &= x^p \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^{p-1} \varphi_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \ldots, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} M &= \mathrm{f}(y, z) + x\, \mathrm{f}_1(y, z) + \ldots, \\ N &= \mathrm{F}(y, z) + x\, \mathrm{F}_1(y, z) + \ldots, \\ P &= \Phi(y, z) + x\, \Phi_1(y, z) + \ldots. \end{aligned}$$

En tirant des deux premières équations $M = 0$, $N = 0$, les valeurs de y et z, on a obtenu l'équation finale en x, et l'on a trouvé que le produit des racines de cette équation finale est exprimé par la formule

$$x_1 x_2 \ldots x_{mnp} = (-1)^{mnp} \cdot \frac{\Phi(\gamma_1, \delta_1) \ldots \Phi(\gamma_{mn}, \delta_{mn})}{\varphi(\alpha_1, \beta_1) \ldots \varphi(\alpha_{mn}, \beta_{mn})},$$

où $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_{mn}, \beta_{mn}), (\gamma_1, \delta_1), \ldots, (\gamma_{mn}, \delta_{mn})$ représentent les couples (α, β) et (γ, δ) de racines des équations simultanées $f(\alpha, \beta) = 0$, $F(\alpha, \beta) = 0$, et $\mathrm{f}(\gamma, \delta) = 0$, $\mathit{F}(\gamma, \delta) = 0$.

Mais on aurait pu former l'équation finale en x et le produit $x_1 x_2 \ldots x_{mnp}$ d'une autre manière, savoir, en tirant des deux dernières équations $N = 0$, $P = 0$ les valeurs de y et z pour les reporter dans la première, ou bien encore en résolvant la première et la dernière équation ($M = o$, $P = o$), puis portant les racines dans la seconde. En opérant ainsi l'on aurait trouvé par exemple,

$$x_1 x_2 \ldots x_{mnp} = (-1)^{mnp} \cdot \frac{\mathrm{f}(\eta_1, \theta_1) \ldots \mathrm{f}(\eta_{np}, \theta_{np})}{f(\lambda_1, \mu_1) \ldots f(\lambda_{np}, \mu_{np})},$$

(η, θ) représentant en général un couple de racines des équations simultanées $\boldsymbol{F}(\eta, \theta) = o$, $\Phi(\eta, \theta) = o$, et (λ, μ) un couple de racines des équations simultanées $\mathrm{F}(\lambda, \mu) = o$, $\varphi(\lambda, \mu) = o$.

On doit conclure de là que les deux fractions

$$\frac{\Phi(\gamma_1, \delta_1) \ldots \Phi(\gamma_{mn}, \delta_{mn})}{\varphi(\alpha_1, \beta_1) \ldots \varphi(\alpha_{mn}, \beta_{mn})},$$

$$\frac{\mathrm{f}(\eta_1, \theta_1) \ldots \mathrm{f}(\eta_{np}, \theta_{np})}{f(\lambda_1, \mu_1) \ldots f(\lambda_{np}, \theta_{np})},$$

sont égales entre elles; de plus il faut ajouter qu'elles sont aussi égales à une troisième fraction de même forme dans laquelle entreraient, sous les signes F, $\boldsymbol{F}$, les racines des équations simultanées $f(x, y) = o$, $\varphi(x, y) = o$, et $\mathrm{f}(x, y) = o$, $\Phi(x, y) = o$. Ce théorème s'étend sans difficulté aux fonctions de plusieurs lettres.

31. On peut regarder chacune des équations $M = o$, $N = o$, $P = o$ comme représentant une surface. L'équation

$$x_1 x_2 \ldots x_{mnp} = (-1)^{mnp} \cdot \frac{\Phi(\gamma_1, \delta_1) \ldots \Phi(\gamma_{mn}, \delta_{mn})}{\varphi(\alpha_1, \beta_1) \ldots \varphi(\alpha_{mn}, \beta_{mn})}$$

fournit ainsi le produit des abscisses des points d'intersection de trois surfaces géométriques quelconques. La fraction qui exprime ce produit est susceptible d'une interprétation assez simple. Continuant à désigner par (α, β) un couple quelconque de racines des équations simultanées $f(\alpha, \beta) = o$, $\mathrm{F}(\alpha, \beta) = o$, déterminons α' et β' en fonction de α et β par les équations du n° **15**,

$$\frac{df}{d\alpha}\alpha' + \frac{df}{d\beta}\beta' + f_1 = o, \quad \frac{d\mathrm{F}}{d\alpha}\alpha' + \frac{d\mathrm{F}}{d\beta}\beta' + \mathrm{F}_1 = o;$$

les deux équations $y = \alpha x + \alpha'$, $z = \beta x + \beta'$ représenteront successivement les mn asymptotes rectilignes communes aux deux surfaces (M), (N); par suite $y = \alpha x$, $z = \beta x$ seront les équations d'une parallèle menée par l'origine des coordonnées à l'une de ces asymptotes. Les abscisses des points où cette parallèle coupe la surface (P) seront déterminées par l'équation

$$x^p \varphi(\alpha, \beta) + x^{p-1} \varphi_1(\alpha, \beta) + \ldots + \varphi_p = 0,$$

dans le premier membre de laquelle le dernier terme φ_p est une simple constante, et le produit de ces abscisses sera

$$(-1)^p \cdot \frac{\varphi_p}{\varphi(\alpha, \beta)}.$$

Donc le produit total $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{mnp}$ des abscisses des points où la surface (P) est rencontrée par les mn parallèles menées par l'origine des coordonnées aux asymptotes communes des deux autres surfaces (M), (N), sera exprimé par

$$(-1)^{mnp} \cdot \frac{\varphi_p{}^{mn}}{\varphi(\alpha_1, \beta_1) \ldots\ldots \varphi(\alpha_{mn}, \beta_{mn})},$$

et l'on aura

$$\varphi(\alpha_1, \beta_1) \ldots \varphi(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) = (-1)^{mnp} \cdot \frac{\varphi_p{}^{mn}}{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{mnp}}.$$

De même, si l'on continue à représenter par (γ, δ) un couple quelconque de racines des équations simultanées $f(\gamma, \delta) = 0$, $F(\gamma, \delta) = 0$, on verra que les équations $y = \gamma$, $z = \delta$ représentent successivement les mn parallèles à l'axe des x que l'on peut mener par les mn points du plan des yz qui appartiennent à la fois aux deux surfaces (M) et (N). On reconnaîtra en outre que le produit $\mathrm{x}_1 \mathrm{x}_2 \ldots \mathrm{x}_{mnp}$ des abscisses des points où ces parallèles coupent la troisième surface (P) est égal à la fraction

$$(-1)^{mnp} \cdot \frac{\Phi(\gamma_1, \delta_1) \ldots\ldots \Phi(\gamma_{mn}, \delta_{mn})}{\Phi_p{}^{mn}},$$

fraction dont le dénominateur est une simple constante, et l'on en conclura que

$$\Phi(\gamma_1, \delta_1) \ldots \Phi(\gamma_{mn}, \delta_{mn}) = (-1)^{mnp} . \Phi_p^{mn} . \mathrm{x}_1 \mathrm{x}_2 \ldots \mathrm{x}_{mnp}.$$

Par suite, on aura

$$x_1 x_2 \ldots x_{mnp} = \pm \left(\frac{\Phi_p}{\varphi_p}\right)^{mn} . \mathrm{x}_1 \mathrm{x}_2 \ldots \mathrm{x}_{mnp} . \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{mnp}.$$

D'un autre côté si l'on désigne par $c_1, c_2, \ldots, c_n$ les abscisses des points où l'axe des x coupe la surface (P), on trouve sans difficulté

$$\frac{\varphi_p}{\Phi_p} = (-1)^p . c_1 c_2 \ldots c_p.$$

De là résulte la formule

$$x_1 x_2 \ldots x_{mn} = \frac{\mathrm{x}_1 \mathrm{x}_2 \ldots \mathrm{x}_{mnp} . \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{mnp}}{(c_1 c_2 \ldots c_p)^{mn}},$$

qui est une généralisation de celle du n° **29**.

32. On peut aussi, comme au n° **27**, faire usage d'un point auxiliaire A, situé sur la partie négative de l'axe des x, à une distance $\mathrm{AO} = 1$ de l'origine des coordonnées. Il est facile de voir que si par ce point auxiliaire on mène des parallèles à toutes les asymptotes rectilignes de la surface (P), ces parallèles formeront un cône dont l'équation sera

$$\varphi\left(\frac{y}{x+1}, \frac{z}{x+1}\right) = 0.$$

Ce cône est coupé par le plan des yz suivant une courbe que l'on peut regarder comme sa base et dont l'équation est $\varphi(y, z) = 0$. D'un autre côté, une parallèle à l'une quelconque des asymptotes communes aux deux surfaces (M), (N) aura pour équations

$$y = \alpha(x+1), \quad z = \beta(x+1),$$

et percera le plan des yz en un point B dont les coordonnées seront $y=\alpha$, $z=\beta$. Menons par le point B une parallèle à l'axe Oz; les valeurs de z relatives aux points de rencontre de cette parallèle avec la base du cône seront fournies par l'équation $\varphi(\alpha, z) = 0$. Posons $z = \beta + l$, et admettons (ce qui est permis) qu'on ait réduit à l'unité le coefficient de z^p dans le polynome P, ce qui rendra aussi égaux à l'unité les coefficients de z^p dans $\varphi(y, z)$ et $\Phi(y, z)$: nous aurons

$$\varphi(\alpha, z) = \varphi(\alpha, \beta + l) = \varphi(\alpha, \beta) + \frac{l}{1}\frac{d\varphi(\alpha, \beta)}{d\beta} + \ldots + l^p;$$

l'équation dont l dépend deviendra

$$l^p + \ldots + \varphi(\alpha, \beta) = 0:$$

le produit $l_1 l_2 \ldots l_p$ de ses racines, c'est-à-dire le produit des segments compris entre le point B et les points où la parallèle à l'axe des z rencontre la base du cône, est donc égal à $(-1)^p . \varphi(\alpha, \beta)$. Donc le produit total $l_1 l_2 \ldots l_{mnp}$ des segments l qui répondent aux mn couples (α, β) est égal à

$$(-1)^{mnp} . \varphi(\alpha_1, \beta_1) \ldots \varphi(\alpha_{mn}, \beta_{mn}),$$

et réciproquement on a

$$\varphi(\alpha_1, \beta_1) \ldots \varphi(\alpha_{mn}, \beta_{mn}) = (-1)^{mnp} . l_1 l_2 \ldots l_{mnp}.$$

D'un autre côté, l'on a vu plus haut que les couples (γ, δ) représentent les coordonnées (y, z) des points du plan des yz qui appartiennent en même temps aux deux surfaces (M) et (N). Si par ces divers points on mène des parallèles à l'axe des z, le produit $h_1 h_2 \ldots h_{mnp}$ des segments compris entre chacun d'eux et les points où la parallèle correspondante rencontre la surface (P), aura pour valeur

$$(-1)^{mnp} . \Phi(\gamma_1, \delta_1) \ldots \Phi(\gamma_{mn}, \delta_{mn}),$$

et réciproquement on aura

$$\Phi(\gamma_1, \delta_1) \ldots \Phi(\gamma_{mn}, \delta_{mn}) = (-1)^{mnp} h_1 h_2 \ldots h_{mnp}.$$

De tout ce qui précède on déduit la formule

$$x_1 x_2 \ldots x_{mnp} = (-1)^{mnp} . \frac{h_1 h_2 \ldots h_{mnp}}{l_1 l_2 \ldots l_{mnp}},$$

qui, si l'on déplace l'origine des coordonnées d'une quantité g sur l'axe des x, ce qui ne change rien aux segments $l_1, l_2, \ldots, l_{mnp}$, en fournit une seconde

$$(x_1 - g)(x_2 - g) \ldots (x_{mnp} - g) = (-1)^{mnp} \frac{H_1 H_2 \ldots H_{mnp}}{l_1 l_2 \ldots l_{mnp}}:$$

cette dernière, combinée avec la formule primitive, nous donne

$$\frac{(x_1 - g)(x_2 - g) \ldots (x_{mnp} - g)}{x_1 x_2 \ldots\ldots x_{mnp}} = \frac{H_1 H_2 \ldots H_{mnp}}{h_1 h_2 \ldots h_{mnp}}.$$

Ces diverses équations et celles du numéro précédent sont assez simples pour mériter qu'on les remarque : on pourra, si l'on veut, les comparer entre elles, et aussi les discuter en examinant ce qu'elles fournissent lorsqu'on remplace l'une par l'autre deux de nos trois surfaces ou lorsqu'on change les axes coordonnés.

33. Nous ne dirons rien de la formule du n° **17**, où entre la somme des valeurs inverses des racines $x_1, x_2, \ldots, x_{mnp}$. Mais les diverses remarques que nous allons présenter sur la formule qui contient $\sum x$ s'appliqueront d'elles-mêmes, *mutatis mutandis*, à celle qui contient $\sum \frac{1}{x}$.

On a trouvé

$$\sum x = - \sum \frac{\frac{d\varphi}{d\alpha}\alpha' + \frac{d\varphi}{d\beta}\beta' + \varphi_1}{\varphi(\alpha, \beta)},$$

le $\sum$ du second membre étant toujours relatif aux racines (α, β) des équations simultanées $f(\alpha, \beta) = 0$, $F(\alpha, \beta) = 0$, dont α' et β' se déduisent par les formules du n° **15**,

$$\frac{df}{d\alpha}\alpha' + \frac{df}{d\beta}\beta' + f_1 = 0, \quad \frac{dF}{d\alpha}\alpha' + \frac{dF}{d\beta}\beta' + F_1 = 0.$$

Or une quelconque des asymptotes communes aux deux surfaces (M), (N) étant généralement représentée par les équations $y = \alpha x + \alpha'$, $z = \beta x + \beta'$, coupe la surface (P) en p points dont les abscisses sont déterminées par l'équation

$$x^p \varphi(\alpha, \beta) + x^{p-1}\left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\alpha' + \frac{d\varphi}{d\beta}\beta' + \varphi_1\right) + \ldots = 0;$$

la somme des abscisses dont nous parlons est donc égale à

$$-\frac{\frac{d\varphi}{d\alpha}\alpha' + \frac{d\varphi}{d\beta}\beta' + \varphi_1}{\varphi(\alpha, \beta)},$$

et pour toutes les asymptotes considérées ensemble, elle devient

$$-\sum \frac{\frac{d\varphi}{d\alpha}\alpha' + \frac{d\varphi}{d\beta}\beta' + \varphi_1}{\varphi(\alpha, \beta)} \quad \text{ou} \quad \sum x.$$

Il faut en conclure que « le centre des moyennes distances des points
» d'intersection de trois surfaces géométriques coïncide avec le centre
» des moyennes distances des points où l'une de ces surfaces prise à
» volonté est rencontrée par les asymptotes rectilignes communes aux
» deux autres. »

34. Résolvons les équations

$$\frac{df}{d\alpha}\alpha' + \frac{df}{d\beta}\beta' + f_1 = 0,$$
$$\frac{dF}{d\alpha}\alpha' + \frac{dF}{d\beta}\beta' + F_1 = 0,$$

par rapport à α' et β'. En posant

$$A(\alpha, \beta) = \frac{dF}{d\alpha}\frac{d\varphi}{d\beta} - \frac{dF}{d\beta}\frac{d\varphi}{d\alpha},$$

$$B(\alpha, \beta) = \frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{df}{d\beta} - \frac{d\varphi}{d\beta}\frac{df}{d\alpha},$$

$$C(\alpha, \beta) = \frac{df}{d\alpha}\frac{dF}{d\beta} - \frac{df}{d\beta}\frac{dF}{d\alpha},$$

il nous viendra

$$\alpha' = \frac{F_1 \frac{df}{d\beta} - f_1 \frac{dF}{d\beta}}{C(\alpha, \beta)},$$

$$\beta' = \frac{f_1 \frac{dF}{dx} - F_1 \frac{df}{d\alpha}}{C(\alpha, \beta)},$$

puis

$$\sum x = -\sum \frac{f_1(\alpha, \beta)\,A(\alpha, \beta) + F_1(\alpha, \beta)\,B(\alpha, \beta) + \varphi_1(\alpha, \beta)\,C(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha, \beta)\,C(\alpha, \beta)}.$$

Mais pour obtenir cette expression de $\sum x$, on a opéré l'élimination en résolvant d'abord les équations $M = 0$, $N = 0$ par rapport à y et z, c'est-à-dire en prenant pour point de départ les racines (α, β) des équations $f(\alpha, \beta) = 0$, $F(\alpha, \beta) = 0$. Si l'on opérait l'élimination dans un autre ordre en résolvant d'abord les équations $N = 0$, $P = 0$, c'est-à-dire en prenant pour point de départ les racines (λ, μ) des équations $F(\lambda, \mu) = 0$, $\varphi(\lambda, \mu) = 0$, on trouverait évidemment

$$\sum x = -\sum \frac{f_1(\lambda, \mu)\,A(\lambda, \mu) + F_1(\lambda, \mu)\,B(\lambda, \mu) + \varphi_1(\lambda, \mu)\,C(\lambda, \mu)}{f(\lambda, \mu)\,A(\lambda, \mu)};$$

le signe $\sum$ se rapporte ici aux racines (λ, μ).

Égalant cette valeur de $\sum x$ à la précédente, et supposant, pour plus de simplicité, les deux fonctions f_1, F_1 réduites à zéro, on aura donc

$$\sum \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha, \beta)} = \sum \frac{\varphi_1(\lambda, \mu)\,C(\lambda, \mu)}{\varphi(\lambda, \mu)\,A(\lambda, \mu)},$$

le signe $\sum$ du second membre étant, comme on l'a déjà expliqué, relatif aux couples (λ, μ) de racines des équations simultanées $F(\lambda, \mu) = 0$, $\varphi(\lambda, \mu) = 0$, et celui du premier membre aux couples (α, β) de racines des équations $f(\alpha, \beta) = 0$, $F(\alpha, \beta) = 0$.

Il est évident qu'on trouverait de même

$$\sum \frac{F_1(\sigma, \tau)}{F(\sigma, \tau)} = \sum \frac{F_1(\lambda, \mu) B(\lambda, \mu)}{f(\lambda, \mu) A(\lambda, \mu)},$$

(σ, τ) représentant les couples de racines des équations simultanées $f(\sigma, \tau) = 0$, $\varphi(\sigma, \tau) = 0$.

Il suit de tout cela que la valeur de $\sum x$ peut être mise sous cette forme symétrique

$$\sum x = - \sum \frac{f_1(\lambda, \mu)}{f(\lambda, \mu)} - \sum \frac{F_1(\sigma, \tau)}{F(\sigma, \tau)} - \sum \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha, \beta)}.$$

Ajoutons que la formule que nous venons d'écrire se traduit immédiatement par ce théorème. « Trois surfaces géométriques étant données, cherchez le centre des moyennes distances de tous les points » d'intersection de chacune de ces surfaces prises successivement avec » les parallèles menées par un point fixe O aux asymptotes communes » des deux autres : ce centre D sera situé sur la droite OC qui joint le » point O au centre C des moyennes distances des points d'intersection » des trois surfaces : de plus, la distance OD sera le tiers de OC. »

35. L'équation

$$\sum \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha, \beta)} = \sum \frac{\varphi_1(\lambda, \mu) C(\lambda, \mu)}{f(\lambda, \mu) A(\lambda, \mu)}$$

répond, autant que la nature des fonctions de deux variables le permet, à la décomposition (en fractions simples) des fractions rationnelles dépendantes d'une seule variable. Les fonctions f, F, φ sont des fonctions entières de degrés quelconques, mais φ_1 est une fonction entière de degré inférieur au moins d'une unité au degré de φ. En supposant

$\varphi(u, v) = C(u, v)$, le second membre s'évanouit de lui-même à cause de $C(\lambda, \mu) = F(\lambda, \mu) = 0$. Il vient par suite

$$\sum \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{C(\alpha, \beta)} = 0,$$

formule où le degré de $\varphi_1(\alpha, \beta)$ doit être inférieur au moins d'une unité au degré de $C(\alpha, \beta)$, c'est-à-dire inférieur au moins de trois unités à la somme des degrés des deux polynomes $f(\alpha, \beta)$, $F(\alpha, \beta)$, formant les premiers membres des équations simultanées aux racines desquelles le signe $\sum$ se rapporte. Cette dernière équation

$$\sum \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{C(\alpha, \beta)} = 0$$

renferme le théorème déjà cité de M. Jacobi.

36. Ce théorème est relatif aux fonctions de deux variables, et nous y sommes arrivés en considérant d'abord des équations à trois inconnues; c'est-à-dire qu'en géométrie nous avons obtenu un théorème relatif à des courbes planes en nous servant de surfaces auxiliaires et restituant à l'espace ses trois dimensions, comme les géomètres modernes l'ont souvent pratiqué avec succès. On obtiendra un théorème semblable pour les fonctions de trois variables, en passant par les équations à quatre inconnues, et ainsi de suite.

Considérons en général des équations $M = 0$, $N = 0, \ldots$, $P = 0$, $Q = 0$, en nombre quelconque et contenant un nombre égal d'inconnues $x, y, \ldots, z$; groupons entre eux les termes homogènes de même degré, et donnons aux premiers membres de ces équations la forme

$$\begin{aligned}
M &= x^m f\left(\frac{y}{x}, \ldots, \frac{z}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}, \ldots, \frac{z}{x}\right) + \ldots,\\
N &= x^n F\left(\frac{y}{x}, \ldots, \frac{z}{x}\right) + x^{n-1} F_1\left(\frac{y}{x}, \ldots, \frac{z}{x}\right) + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
P &= x^p \varphi\left(\frac{y}{x}, \ldots, \frac{z}{x}\right) + x^{p-1} \varphi_1\left(\frac{y}{x}, \ldots, \frac{z}{x}\right) + \ldots,\\
Q &= x^q \psi\left(\frac{y}{x}, \ldots, \frac{z}{x}\right) + x^{q-1} \psi_1\left(\frac{y}{x}, \ldots, \frac{z}{x}\right) + \ldots,
\end{aligned}$$

$f(u, \ldots, w)$, $F(u, \ldots, w)$, etc., étant généralement des polynomes de degrés m, n, etc., et $f_i(u, \ldots, w)$, $F_i(u, \ldots, w)$, etc., des polynomes de degrés $m-i$, $n-i$, etc. tout au plus. Pour obtenir, d'après la méthode du § II, la somme des racines de l'équation finale en x, résultant de l'élimination de $y, \ldots, z$, il suffira de chercher d'abord les couples $(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$ de racines des équations simultanées

$$f(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = 0, \quad F(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = 0, \ldots, \quad \varphi(\alpha, \beta, \ldots, \gamma) = 0,$$

puis de déterminer α', β', ..., γ' par les équations suivantes

$$\begin{aligned}
&\frac{df}{d\alpha}\alpha' + \frac{df}{d\beta}\beta' + \ldots + \frac{df}{d\gamma}\gamma' + f_1 = 0,\\
&\frac{dF}{d\alpha}\alpha' + \frac{dF}{d\beta}\beta' + \ldots + \frac{dF}{d\gamma}\gamma' + F_1 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{d\varphi}{d\alpha}\alpha' + \frac{d\varphi}{d\beta}\beta' + \ldots + \frac{d\varphi}{d\gamma}\gamma' + \varphi_1 = 0,
\end{aligned}$$

où, pour abréger, l'on a écrit f, f_1, etc., au lieu de $f(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$, $f_1(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$, etc. Cela fait, on aura

$$\sum x = -\sum \frac{\frac{d\psi}{d\alpha}\alpha' + \frac{d\psi}{d\beta}\beta' + \ldots + \frac{d\psi}{d\gamma}\gamma' + \psi_1}{\psi},$$

formule qui se simplifiera beaucoup et nous donnera

$$\sum x = -\sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \ldots \gamma)}{\psi(\alpha, \beta, \ldots \gamma)},$$

dans le cas particulier où les fonctions f_1, $F_1, \ldots, \varphi_1$ sont supposées identiquement nulles.

Mais pour obtenir ces diverses formules, on a résolu d'abord les premières équations $M = 0$, $N = 0, \ldots, P = 0$, par rapport à $y, \ldots z$, et l'on a substitué les racines dans le polynome Q. On arrivera à d'autres résultats si l'on résout les dernières équations $N=0, \ldots, P=0, Q=0$, pour substituer ensuite leurs racines dans le polynome M.

En désignant alors par $(\lambda, \mu, \ldots, \nu)$ un couple quelconque de racines des équations simultanées

$$F(\lambda, \mu, \ldots, \nu) = 0, \ldots, \quad \varphi(\lambda, \mu, \ldots, \nu) = 0, \quad \psi(\lambda, \mu, \ldots, \nu) = 0,$$

puis déterminant $\lambda', \mu' \ldots, \nu'$ par les équations

$$\begin{gathered}
\frac{dF}{d\lambda}\lambda' + \frac{dF}{d\mu}\mu' + \ldots + \frac{dF}{d\nu}\nu' + F_1 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{d\varphi}{d\lambda}\lambda' + \frac{d\varphi}{d\mu}\mu' + \ldots + \frac{d\varphi}{d\nu}\nu' + \varphi_1 = 0, \\
\frac{d\psi}{d\lambda}\lambda' + \frac{d\psi}{d\mu}\mu' + \ldots + \frac{d\psi}{d\nu}\nu' + \psi_1 = 0,
\end{gathered}$$

où l'on a écrit pour abréger F, etc., au lieu de $F(\lambda, \mu, \ldots, \nu)$, etc., on aura

$$\sum x = -\sum \frac{\frac{df}{d\lambda}\lambda' + \frac{df}{d\mu}\mu' + \ldots + \frac{df}{d\nu}\nu' + f_1}{f}:$$

quand on suppose $f_1 = 0$, $F_1 = 0, \ldots$, $\varphi_1 = 0$, comme ci-dessus, on doit d'abord supprimer le dernier terme du numérateur de la fraction placée sous le signe $\sum$: d'ailleurs, pour former les valeurs de $\lambda', \mu' \ldots, \nu'$, il faut, d'après la règle connue pour la résolution des équations du premier degré, chercher d'abord ce que Laplace nomme la *résultante* du système

$$\begin{gathered}
\frac{dF}{d\lambda}, \quad \frac{dF}{d\mu}, \ldots, \frac{dF}{d\nu}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{d\varphi}{d\lambda}, \quad \frac{d\varphi}{d\mu}, \ldots, \frac{d\varphi}{d\nu}, \\
\frac{d\psi}{d\lambda}, \quad \frac{d\psi}{d\mu}, \ldots, \frac{d\psi}{d\nu}:
\end{gathered}$$

soit $A(\lambda, \mu \ldots, \nu)$ cette résultante, où l'on mettra, si l'on veut, les dérivées de ψ en évidence en désignant par (λ), (μ), ... (ν) des coefficients indépendants de ψ, puis écrivant

$$A(\lambda, \mu, \ldots, \nu) = (\lambda)\frac{d\psi}{d\lambda} + (\mu)\frac{d\psi}{d\mu} + \ldots + (\nu)\frac{d\psi}{d\nu},$$

$A(\lambda, \mu, \ldots, \nu)$ sera le dénominateur commun des fractions qui représentent les racines $\lambda', \mu', \ldots, \nu'$: le numérateur de λ', par exemple, s'en déduira en remplaçant

$$\frac{dF}{d\lambda} \text{ par } -F_1 \text{ ou par zéro},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} \text{ par } -\varphi_1 \text{ ou par zéro},$$

$$\frac{d\psi}{d\lambda} \text{ enfin par } -\psi_1 :$$

vu la composition connue des coefficients $(\lambda), (\mu), \ldots, (\nu)$, cela ne changera rien à (λ) qui ne renferme aucune dérivée relative à λ, et au contraire annullera $(\mu), \ldots, (\nu)$: on aura ainsi

$$\lambda' = -\frac{(\lambda)\psi_1(\lambda, \mu, \ldots, \nu)}{A(\lambda, \mu, \ldots, \nu)},$$

et de même

$$\mu' = -\frac{(\mu)\psi_1(\lambda, \mu, \ldots, \nu)}{A(\lambda, \mu, \ldots, \nu)}, \ldots, \nu' = -\frac{(\nu)\psi_1(\lambda, \mu, \ldots, \nu)}{A(\lambda, \mu, \ldots, \nu)}.$$

En posant donc

$$(\lambda)\frac{df}{d\lambda} + (\mu)\frac{df}{d\mu} + \ldots + (\nu)\frac{df}{d\nu} = -D(\lambda, \mu, \ldots, \nu),$$

il viendra

$$\sum x = -\sum \frac{\psi_1(\lambda, \mu, \ldots, \nu) D(\lambda, \mu, \ldots, \nu)}{f(\lambda, \mu, \ldots, \nu) A(\lambda, \mu, \ldots, \nu)}.$$

Comparant cette nouvelle expression à l'ancienne, on en conclura la formule générale annoncée n° 4 :

$$\sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)}{\psi(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)} = \sum \frac{\psi_1(\lambda, \mu, \ldots, \nu)\, D(\lambda, \mu, \ldots, \nu)}{f(\lambda, \mu, \ldots, \nu)\, A(\lambda, \mu, \ldots, \nu)};$$

d'où, pour le cas de $\psi(u, v, \ldots, w) = D(u, v, \ldots, w)$, il résulte en particulier

$$\sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)}{D(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)} = 0.$$

Dans cette dernière formule le degré de ψ_1 doit être inférieur au degré de D; dans la formule générale il doit être inférieur au degré de ψ. On passe de l'expression de $A(\lambda, \mu, \ldots, \nu)$ à celle de $D(\lambda, \mu, \ldots, \nu)$ en y remplaçant ψ par $-f$: réciproquement $A(\lambda, \mu, \ldots, \nu)$ se déduirait de $D(\lambda, \mu, \ldots, \nu)$ en y changeant f en $-\psi$; il ne servirait à rien d'ajouter que $D(\lambda, \mu, \ldots, \nu)$ est la *résultante* du système

$$\begin{array}{l}
\frac{df}{d\lambda}, \quad \frac{df}{d\mu}, \ldots, \frac{df}{d\nu}, \\[1ex]
\frac{dF}{d\lambda}, \quad \frac{dF}{d\mu}, \ldots, \frac{dF}{d\nu}, \\[1ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\[1ex]
\frac{d\varphi}{d\lambda}, \quad \frac{d\varphi}{d\mu}, \ldots, \frac{d\varphi}{d\nu}.
\end{array}$$

37. Comme le cas des fonctions de trois variables nous sera utile par la suite, nous en ferons ici mention expresse. Soient donc $f(x, y, z)$, $F(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ quatre fonctions entières de x, y, z; désignons par (α, β, γ) un couple quelconque de racines des trois équations simultanées

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad F(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

et par (λ, μ, ν) un couple quelconque de racines des équations

$$F(\lambda, \mu, \nu) = 0, \quad \varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0, \quad \psi(\lambda, \mu, \nu) = 0;$$

représentons de plus par $D(x, y, z)$ la somme des trois quantités

$$\frac{df}{dx}\left(\frac{dF}{dy}\frac{d\varphi}{dz} - \frac{dF}{dz}\frac{d\varphi}{dy}\right),$$

$$\frac{df}{dy}\left(\frac{dF}{dz}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{dF}{dx}\frac{d\varphi}{dz}\right),$$

$$\frac{df}{dz}\left(\frac{dF}{dx}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{dF}{dy}\frac{d\varphi}{dx}\right),$$

et par $A(x, y, z)$ ce que devient l'expression de $D(x, y, z)$ lorsqu'on y remplace f par $-\psi$; soit enfin $\psi_1(x, y, z)$ une fonction entière de degré inférieur à ψ : on aura en général

$$\sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \gamma)}{\psi(\alpha, \beta, \gamma)} = \sum \frac{\psi_1(\lambda, \mu, \nu)\, D(\lambda, \mu, \nu)}{f(\lambda, \mu, \nu)\, A(\lambda, \mu, \nu)};$$

et si $\psi(x, y, z) = D(x, y, z)$, il viendra en particulier

$$\sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \gamma)}{D(\alpha, \beta, \gamma)} = 0,$$

le degré de ψ_1 étant bien entendu inférieur alors au degré de D.

VI.

38. Les formules que nous venons de démontrer fournissent un grand nombre de théorèmes de géométrie. Donnons-en ici quelques-uns.

Au nº **35** on a trouvé

$$\sum \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{C(\alpha, \beta)} = 0,$$

le signe $\sum$ étant relatif aux racines des équations simultanées $f(\alpha, \beta) = 0$, $F(\alpha, \beta) = 0$, et $C(\alpha, \beta)$ représentant la quantité

$$\frac{df}{d\alpha}\frac{dF}{d\beta} - \frac{df}{d\beta}\frac{dF}{d\alpha}.$$

En appliquant cette belle formule de M. Jacobi aux rayons de courbure relatifs aux divers points de contact des tangentes que l'on peut mener à une courbe géométrique parallèlement à une droite donnée, on obtient d'abord l'équation

$$\sum \frac{1}{\rho} = 0,$$

que j'ai annoncée à la fin du n° **19**.

Rapportons, en effet, la courbe géométrique à deux axes rectangulaires Ox, Oy, et supposons l'axe Ox parallèle à la direction commune des tangentes. Si $f(x, y) = 0$ est l'équation de la courbe proposée, les coordonnées (α, β) des points de contact dont nous nous occupons seront fournies par les deux équations

$$f(\alpha, \beta) = 0, \quad \frac{df(\alpha, \beta)}{d\alpha} = 0,$$

et l'expression algébrique de la valeur inverse du rayon de courbure ρ, qui devient ici très-simple à cause de l'équation

$$\frac{df(\alpha, \beta)}{d\alpha} = 0,$$

sera

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\left(\frac{d^2 f}{d\alpha^2}\right)}{\left(\frac{df}{d\beta}\right)}.$$

Cela étant, il suffit de prendre

$$F(x, y) = \frac{df(x, y)}{dx}, \quad \varphi_1(x, y) = \left[\frac{d^2 f(x, y)}{dx^2}\right]^2,$$

puis d'appliquer la formule de M. Jacobi, pour arriver à l'équation

$$\sum \frac{1}{\rho} = 0,$$

qu'on veut démontrer. De cette équation convenablement différentiée se déduisent d'autres équations dont j'ai dit un mot à la fin du n° **19**.

39. La formule de M. Jacobi, appliquée aux fonctions de trois variables, c'est-à-dire la formule

$$\sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \gamma)}{D(\alpha, \beta, \gamma)} = 0$$

du n° **37**, fournit des théorèmes analogues pour les surfaces. Considérons, en effet, une surface géométrique et la série complète des points de contact des plans tangents que l'on peut mener à cette surface parallèlement à un plan donné. Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires, et supposons le plan des xy parallèle à chacun des plans tangents. Les coordonnées (α, β, γ) des points de contact dont nous parlons seront fournies par trois équations de la forme

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad \frac{df(\alpha, \beta, \gamma)}{d\alpha} = 0, \quad \frac{df(\alpha, \beta, \gamma)}{d\beta} = 0.$$

Cela posé, dans la formule

$$\sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \gamma)}{D(\alpha, \beta, \gamma)} = 0,$$

prenons

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{df(\alpha, \beta, \gamma)}{d\alpha}, \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{df(\alpha, \beta, \gamma)}{d\beta};$$

et, en supprimant les termes de $D(\alpha, \beta, \gamma)$ où se trouvent en facteurs les dérivées $\frac{df}{d\alpha}$, $\frac{df}{d\beta}$, qui sont égales à zéro, il nous viendra

$$\sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \gamma)}{\frac{df}{d\gamma}\left[\frac{d^2f}{d\alpha^2}\frac{d^2f}{d\beta^2} - \left(\frac{d^2f}{d\alpha\, d\beta}\right)^2\right]} = 0.$$

Le degré du numérateur $\psi_1(\alpha, \beta, \gamma)$ doit être inférieur au degré du dénominateur. Or cette condition sera remplie si l'on choisit, par exemple, pour ψ_1 une fonction homogène et du troisième degré des trois dérivées partielles

$$\frac{d^2f}{d\alpha^2}, \ \frac{d^2f}{d\alpha d\beta}, \ \frac{d^2f}{d\beta^2},$$

c'est-à-dire si l'on fait

$$\psi_1(\alpha, \beta, \gamma) = g\left(\frac{d^2 f}{d\alpha^2}\right)^3 + h\left(\frac{d^2 f}{d\alpha^2}\right)^2\left(\frac{d^2 f}{d\alpha d\beta}\right) + \ldots,$$

g, h, etc. étant des constantes. D'un autre côté, si l'on désigne, conformément à l'usage ordinaire, par r, s, t les dérivées partielles de l'ordonnée z ou γ de la surface géométrique dont $f(x, y, z) = 0$ est l'équation, et si l'on observe que les dérivées premières sont nulles ici en vertu des équations $\frac{df}{d\alpha} = 0$, $\frac{df}{d\beta} = 0$, on trouvera

$$\frac{d^2 f}{d\alpha^2} = -\frac{df}{d\gamma} r, \quad \frac{d^2 f}{d\alpha d\beta} = -\frac{df}{d\gamma} s, \quad \frac{d^2 f}{d\beta^2} = -\frac{df}{d\gamma} t.$$

En substituant donc ces valeurs dans la somme $\sum$, on aura cette équation générale

$$\sum \frac{gr^3 + hr^2 s + \ldots}{rt - s^2} = 0,$$

qui, vu l'indétermination des constantes g, h, etc., se décomposera dans dix autres équations particulières, entre les quantités r, s, t, dont dépendent pour chacun des points de contact (α, β, γ) les rayons de courbure principaux ρ, ρ' et la direction des lignes de courbure ou, ce qui revient au même, l'angle que la tangente à l'une de ces lignes de courbure fait avec l'axe des x.

Parmi ces dix équations, on peut remarquer les deux suivantes :

$$\sum \frac{(r+t)(rt - s^2)}{rt - s^2} = \sum (r+t) = 0,$$

$$\sum \frac{(r+t)^3 - 3(r+t)(rt - s^2)}{rt - s^2} = 0,$$

qui, d'après les formules

$$r + t = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}, \quad rt - s^2 = \frac{1}{\rho\rho'},$$

auxquelles se réduisent les formules connues quand les dérivées du premier ordre sont nulles, donnent immédiatement

$$\sum\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right)=0,\quad \sum\left(\frac{\rho'}{\rho^2}+\frac{\rho}{\rho'^2}\right)=0.$$

40. Revenons aux fonctions de deux variables et à la formule

$$\sum\frac{\varphi_1(\alpha,\beta)}{C(\alpha,\beta)}=0.$$

Conservons au polynome $f(x, y)$ toute sa généralité, mais prenons

$$F(x,y)=x^2+y^2-a^2,\quad \varphi_1(x,y)=\frac{df(x,y)}{dy}.$$

Admettons de plus que les coordonnées soient rectangulaires. Les équations

$$F(x,y)=0,\quad f(x,y)=0,$$

représenteront respectivement un cercle et une courbe géométrique quelconque. En nous rappelant que la tangente trigonométrique de l'angle ω qu'une touchante à cette dernière courbe fait avec l'axe des x, est exprimée au signe près par le rapport des deux dérivées de f, nous tirerons de la formule de M. Jacobi l'équation

$$\sum\frac{\cos\omega}{\alpha\cos\omega+\beta\sin\omega}=0,$$

où le signe $\sum$ s'étend à tous les points d'intersection du cercle avec la courbe, et qui prend une forme plus élégante, savoir,

$$\sum\frac{\cos\omega}{a\cos(\omega-\theta)}=0,$$

lorsqu'on remplace les coordonnées rectangulaires α, β par leurs valeurs $a\cos\theta$, $a\sin\theta$, en coordonnées polaires. On en conclut aisément ce théorème de géométrie plane : « Si par les points d'intersection d'un

» cercle donné et d'une courbe géométrique on mène des normales à » la courbe et qu'on les prolonge jusqu'à leur rencontre avec une » transversale quelconque passant par le centre du cercle, la somme » des valeurs inverses des segments compris entre ce centre et les pieds » des normales sera égale à zéro [*]. »

On obtiendra une foule de théorèmes du même genre en prenant pour l'équation $F(x, y) = 0$, non plus celle d'un cercle, mais d'une hyperbole, d'une ellipse, et généralement d'une courbe géométrique simple. Il y a aussi des théorèmes analogues pour les surfaces.

VII.

41. Occupons-nous maintenant de la formule

$$\sum \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha, \beta)} = \sum \frac{\varphi_1(\lambda, \mu)\, C(\lambda, \mu)}{f(\lambda, \mu)\, A(\lambda, \mu)},$$

que nous avons démontrée n° **34** et dont celle de M. Jacobi est un cas particulier. On se rappelle que la somme du premier membre est relative aux racines des équations simultanées $f(\alpha, \beta) = 0$, $F(\alpha, \beta) = 0$, et celle du second membre aux racines des équations $F(\lambda, \mu) = 0$, $\varphi(\lambda, \mu) = 0$: de plus on a

$$C(\lambda, \mu) = \frac{df}{d\lambda}\frac{dF}{d\mu} - \frac{df}{d\mu}\frac{dF}{d\lambda},$$
$$A(\lambda, \mu) = \frac{dF}{d\lambda}\frac{d\varphi}{d\mu} - \frac{dF}{d\mu}\frac{d\varphi}{d\lambda}.$$

Mais au lieu de $\varphi_1(x, y)$ il nous sera plus commode d'écrire $\varpi(x, y)$.

---

[*] J'ajouterai qu'en nommant ρ le rayon de courbure de la courbe géométrique en un quelconque des points (α, β), et N la longueur de la normale correspondante, on a

$$\sum \frac{(N + \rho)\cos\omega}{\rho\cos^3(\omega - \theta)} = 0.$$

On démontre cette formule en différenciant par rapport à a celle qui résulte du théorème énoncé dans le texte. La différenciation dont je parle s'effectue bien facilement à l'aide d'une figure. On obtient d'autres relations entre les rayons de courbure ρ et les angles ω, θ, quand on déplace le centre du cercle au lieu de faire varier le rayon a.

La formule que nous allons considérer sera donc

$$\sum \frac{\varpi(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha, \beta)} = \sum \frac{\varpi(\lambda, \mu) C(\lambda, \mu)}{f(\lambda, \mu) A(\lambda, \mu)},$$

le degré de ϖ étant inférieur au degré de φ, puisque le degré de φ_1 remplissait cette condition.

Désignons par t un paramètre que nous ferons plus tard infini; admettons que ce paramètre entre dans l'expression de la fonction φ et que cette fonction soit de la forme

$$\varphi(x, y) = (t - x)\,\theta(x, y).$$

A cause des deux facteurs de φ, les racines (λ, μ) se décomposeront en deux groupes distincts : les unes que nous continuerons à désigner par (λ, μ) seront fournies par les équations simultanées

$$F(\lambda, \mu) = 0, \quad \theta(\lambda, \mu) = 0;$$

les autres devront être représentées par (t, ζ), ζ satisfaisant à l'équation

$$F(t, \zeta) = 0.$$

En posant d'ailleurs

$$\frac{dF(x, y)}{dx}\frac{d\theta(x, y)}{dy} - \frac{dF(x, y)}{dy}\frac{d\theta(x, y)}{dx} = H(x, y),$$

on s'assure aisément que

$$A(\lambda, \mu) = (t - \lambda)\,H(\lambda, \mu), \quad A(t, \zeta) = \theta(t, \zeta)\,\frac{dF(t, \zeta)}{d\zeta}.$$

Par suite il viendra

$$\sum \frac{\varpi(\alpha, \beta)}{(t-\alpha)\,\theta(\alpha, \beta)} = \sum \frac{\varpi(\lambda, \mu) C(\lambda, \mu)}{(t-\lambda) f(\lambda, \mu) H(\lambda, \mu)} + \sum \frac{\varpi(t, \zeta) C(t, \zeta)}{f(t, \zeta)\,\theta(t, \zeta)\,\frac{dF(t, \zeta)}{d\zeta}}.$$

La fonction $\varpi(x, y)$ est assujettie à cette seule condition d'être de degré inférieur à $\varphi(x, y)$. Nous pouvons donc admettre et nous admettrons désormais que $\varpi(x,y)$ et $\theta(x,y)$ sont du même degré p. Nous désignerons de plus par m, n les degrés respectifs de $f(x,y)$, $F(x,y)$, et groupant entre eux, comme au n° 7, les termes homogènes de nos fonctions, nous écrirons

$$f(x,\ y) = x^m f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

$$F(x,\ y) = x^n F\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} F_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

$$\varpi(x,\ y) = x^p \varpi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{p-1} \varpi_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

$$\theta(x,\ y) = x^p\ \theta\left(\frac{y}{x}\right) + x^{p-1}\ \theta_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots :$$

on pourra écrire aussi

$$C(x,y) = x^{m+n-2}\, C\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

$$H(x,y) = x^{n+p-2}\, H\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

les fonctions $C(u)$, $H(u)$,... étant bien faciles à calculer, puisque l'on a

$$C(u) = mf(u)\,F'(u) - nf'(u)\,F(u),$$

$$H(u) = n\,F(u)\,\theta'(u) - p\,F'(u)\,\theta(u),$$

. . . .

Cela étant, multiplions par t les deux membres de la formule obtenue tout à l'heure, et voyons ce qu'ils deviennent pour $t = \infty$.

Il n'y a d'abord aucune difficulté pour les deux sommes

$$\sum \frac{t\,\varpi(\alpha,\beta)}{(t-\lambda)\,\theta(\alpha,\beta)}, \quad \sum \frac{t\,\varpi(\lambda,\mu)\,C(\lambda,\mu)}{(t-\lambda)\,f(\lambda,\mu)\,H(\lambda,\mu)},$$

lesquelles, pour $t = \infty$, se réduisent respectivement à

$$\sum \frac{\varpi(\alpha,\beta)}{\theta(\alpha,\beta)}, \quad \sum \frac{\varpi(\lambda,\mu)\,C(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu)\,H(\lambda,\mu)}.$$

C'est donc la troisième somme

$$\sum \frac{t\varpi(t,\zeta)\,C(t,\zeta)}{f(t,\zeta)\,\theta(t,\zeta)\,\frac{dF(t,\zeta)}{d\zeta}}$$

qui doit seule nous occuper. Or pour des valeurs de t très-grandes le rapport de ζ à t, fourni par l'équation

$$F(t,\zeta) = t^n F\left(\frac{\zeta}{t}\right) + t^{n-1} F_1\left(\frac{\zeta}{t}\right) + \ldots = 0,$$

est sensiblement constant et égal à une des racines l de l'équation

$$F(l) = 0.$$

Dans les mêmes circonstances, les diverses fonctions contenues sous le signe $\sum$ peuvent, comme on le voit aisément, être remplacées par leurs premiers termes. Ainsi pour $t = \infty$, la somme proposée devient en général

$$\sum \frac{\varpi(l)\,C(l)}{f(l)\,\theta(l)\,F'(l)},$$

ce qui fournit l'équation remarquable

$$\sum \frac{\varpi(\alpha,\beta)}{\theta(\alpha,\beta)} = \sum \frac{\varpi(\lambda,\mu)\,C(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu)\,H(\lambda,\mu)} + \sum \frac{\varpi(l)\,C(l)}{f(l)\,\theta(l)\,F'(l)},$$

où le degré de $\varpi(x,y)$ est égal à celui de $\theta(x,y)$. Cette analyse montre comment la quantité

$$\sum \frac{\varpi(\alpha,\beta)}{\varphi(a,\beta)},$$

que la formule du n° **34** fournissait pour le cas seulement d'une fonction $\varpi(x,y)$ de degré inférieur à $\varphi(x,y)$, peut être calculée quand $\varpi(x,y)$ est de degré égal à $\varphi(x,y)$. En continuant à peu près de la même manière, on s'élèvera au cas où le degré de $\varpi(x,y)$ surpasse celui de $\varphi(x,y)$ d'une ou de plusieurs unités. Je n'insiste pas sur ce point, et je me contente aussi de dire en passant que des considérations analogues s'appliquent à la formule du n° **36**, relative aux fonctions de plusieurs lettres.

42. Quand on prend

$$\theta(x, y) = \mathrm{C}(x, y), \quad \text{d'où} \quad \theta(l) = \mathrm{C}(l),$$

on trouve en particulier

$$\sum \frac{\varpi(\alpha, \beta)}{\mathrm{C}(\alpha, \beta)} = \sum \frac{\varpi(l)}{f(l)\ \mathrm{F}'(l)}.$$

Le second membre dépend uniquement des fonctions $f(l)$, $\mathrm{F}(l)$, $\varpi(l)$, c'est-à-dire de la direction des asymptotes des trois courbes représentées par les trois équations $f(x, y) = 0$, $\mathrm{F}(x, y) = 0$, $\varpi(x, y) = 0$. Le degré de $\varpi(x, y)$ est ici égal à celui de $\mathrm{C}(x, y)$. Si le degré de cette dernière fonction était inférieur d'une unité à celui de $\varpi(x, y)$, la valeur de

$$\sum \frac{\varpi(\alpha, \beta)}{\mathrm{C}(\alpha, \beta)}$$

dépendrait en outre des fonctions $f_1(l)$, $\mathrm{F}_1(l)$, $\varpi_1(l)$, c'est-à-dire de la position des asymptotes citées. En général, on peut démontrer que si le degré de $\varpi(\alpha, \beta)$ surpasse de i unités celui de $\mathrm{C}(\alpha, \beta)$, la valeur de

$$\sum \frac{\varpi(\alpha, \beta)}{\mathrm{C}(\alpha, \beta)}$$

dépend des seules fonctions $f(l)$, $\mathrm{F}(l)$, $\varpi(l)$, $\ldots$, $f_i(l)$, $\mathrm{F}_i(l)$, $\varpi_i(l)$, dont l'indice ne surpasse pas i.

43. Que l'on prenne

$$\varpi(x, y) = \frac{df(x, y)}{dx} \frac{d\mathrm{F}(x, y)}{dx},$$

ou

$$\varpi(x, y) = \frac{df(x, y)}{dx} \frac{d\mathrm{F}(x, y)}{dy},$$

ou enfin

$$\varpi(x, y) = \frac{df(x, y)}{dy}\frac{dF(x, y)}{dy},$$

le degré de $\varpi(x, y)$ sera dans chacun de ces trois cas égal à celui de $C(x, y)$: de plus la direction des asymptotes de la courbe (ϖ) sera évidemment déterminée par celle des asymptotes des deux autres courbes (f), (F). Donc, d'après ce qui précède, les trois valeurs correspondantes de la somme

$$\sum \frac{\varpi(\alpha, \beta)}{C(\alpha, \beta)},$$

où le signe $\sum$ s'applique à tous les points (α, β) d'intersection des deux courbes (f), (F), dépendront uniquement de la direction des asymptotes de ces deux courbes. En supposant les coordonnées x, y rectangulaires, et désignant par ω et Ω les angles que font avec l'axe des x les tangentes menées par le point (α, β) aux deux branches de courbe qui s'y coupent, les sommes dont nous parlons prennent (au signe près) la forme

$$\sum \frac{\sin\Omega \sin\omega}{\sin(\Omega - \omega)}, \quad \sum \frac{\cos\Omega \sin\omega}{\sin(\Omega - \omega)}, \quad \sum \frac{\cos\Omega \cos\omega}{\sin(\Omega - \omega)};$$

elles sont relatives aux angles que font avec une transversale fixe (prise ici pour axe des x) les tangentes menées successivement à chaque point d'intersection de nos deux courbes. De là trois théorèmes de géométrie consistant en ce que les sommes indiquées conserveraient les mêmes valeurs si les angles ω et Ω se rapportaient non plus aux deux courbes primitives, mais à deux autres courbes de même degré ayant chacune à chacune des asymptotes parallèles, ou bien encore si ces angles étaient respectivement ceux d'une asymptote de la première courbe et d'une asymptote de la seconde courbe avec la transversale fixe [*].

En ajoutant la première somme à la troisième, on obtient la somme

[*] Si l'on multipliait par une fonction linéaire des coordonnées α, β, les termes placés sous le signe sommatoire, on obtiendrait de nouveaux théorèmes, car les sommes ainsi formées ne dépendraient que de la position des asymptotes de nos deux courbes.

nouvelle $\sum \cot(\Omega - \omega)$, et l'on en conclut que : « la somme des co-
» tangentes des angles sous lesquels se coupent deux courbes géo-
» métriques situées dans un même plan, est égale à la somme des
» cotangentes des angles sous lesquels se coupent leurs asymp-
» totes [*]. »

Des théorèmes que nous venons de démontrer on déduira de nombreuses conséquences si l'on fait varier par degrés insensibles la forme ou la position des deux courbes (f), (F) [**]. Un seul exemple nous suffira.

Déplaçons la courbe (f) parallèlement à l'axe des x, en augmentant d'une quantité constante et infiniment petite g les ordonnées de tous ses points, sans changer leurs abscisses. Les directions des asymptotes resteront les mêmes; par suite la variation de $\sum \cot(\Omega - \omega)$ devra être nulle, et l'on aura

$$\sum \frac{\delta\Omega - \delta\omega}{\sin^2(\Omega - \omega)} \quad \text{ou} \quad \sum (\delta\Omega - \delta\omega)\,\text{coséc}^2(\Omega - \omega) = 0.$$

Soient M le point où les courbes (f), (F) se coupaient d'abord, M′ leur point d'intersection actuel, et I le point qui, dans la nouvelle position de (f), répond au point primitif M, c'est-à-dire à la même abscisse. A cause de $\text{MI} = g$, le triangle infinitésimal MIM′ nous donnera

$$\text{MM}' = \frac{g\cos\omega}{\sin(\Omega - \omega)}, \quad \text{IM}' = \frac{g\cos\Omega}{\sin(\Omega - \omega)},$$

---

[*] A ces théorèmes répondent d'autres théorèmes corrélatifs élégants que fournit le principe de réciprocité ou de dualité des géomètres modernes. Ainsi M. Chasles, à qui j'avais communiqué le théorème concernant $\sum \cot(\Omega - \omega)$, m'a donné en réponse l'énoncé suivant : « Deux courbes géométriques étant dans un même plan, si l'on mène
» toutes leurs tangentes communes, que d'un point fixe pris arbitrairement on tire deux
» rayons aboutissant aux deux points de contact de chacune de ces tangentes, et qu'on
» prenne l'angle des deux rayons, la somme des cotangentes de ces angles sera égale à la
» somme des cotangentes des angles que les tangentes menées par le point fixe à la pre-
» mière courbe feront avec les tangentes menées par le même point à la deuxième courbe. »

[**] Cette remarque s'applique à toutes les formules que nous avons données dans ce Mémoire et en particulier à celles qui fournissent les produits ou les sommes tant directes qu'inverses des abscisses des points d'intersection de deux courbes ou de trois surfaces géométriques.

de sorte qu'en nommant r, R les rayons de courbure des deux courbes (f), (F) au point d'intersection M, et observant que la tangente menée en M à la courbe (f) s'est transportée en I parallèlement à elle-même, on aura, par une propriété connue de l'angle de contingence,

$$\delta\Omega = \frac{g \cos \omega}{\mathrm{R} \sin (\Omega - \omega)}, \quad \delta\omega = \frac{g \cos \Omega}{r \sin (\Omega - \omega)}:$$

de là résulte la formule

$$\sum \left(\frac{\cos \omega}{\mathrm{R}} - \frac{\cos \Omega}{r} \right) \operatorname{coséc}^3 (\Omega - \omega) = 0.$$

L'axe à partir duquel on compte les angles ω et θ étant quelconque, cette formule doit subsister quand on augmente à la fois ces deux angles d'une même quantité, de $\frac{\pi}{2}$ par exemple; il s'ensuit qu'on a aussi

$$\sum \left(\frac{\sin \omega}{\mathrm{R}} - \frac{\sin \Omega}{r} \right) \operatorname{coséc}^3 (\Omega - \omega) = 0.$$

44. En terminant ce long Mémoire, je répéterai encore qu'il ne renferme aucun principe nouveau. La méthode d'élimination que j'ai employée et qui m'a conduit à diverses formules plus ou moins utiles, se trouve, par exemple, indiquée en peu de mots à la page 55 de l'ouvrage que Waring a publié en 1762, sous ce titre : *Miscellanea analytica de æquationibus algebraïcis et curvarum proprietatibus*. Observons, du reste, qu'on aurait pu substituer aux développements en série, dont j'ai fait usage dans les premiers numéros, des différenciations équivalentes. En effet, les coefficients des polynomes que j'ai désignés par X, se déduisent des dérivées successives de X relatives à la valeur particulière $x = 0$, et ces dérivées sont faciles à obtenir en regardant les autres lettres y, etc., comme exprimant des fonctions implicites de x, en vertu des équations dont elles sont racines.