JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 1-13.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__1_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

JOURNAL

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

REMARQUES NOUVELLES

SUR

L'ÉQUATION DE RICCATI;

PAR J. LIOUVILLE.

[Présentées à l'Académie le 9 novembre 1840.]

L'équation différentielle du premier ordre, connue sous le nom d'équation de Riccati, a été l'objet des recherches d'un grand nombre de géomètres. Cette équation renferme dans son premier membre la somme de deux termes, l'un égal à la dérivée de la fonction principale Y prise par rapport à la variable indépendante X, l'autre égal au produit du carré de Y par une constante : dans le second membre, il entre un seul terme proportionnel à une puissance de la variable indépendante : l'exposant m de cette puissance peut être nommé *module* de l'équation.

Pour toutes les valeurs du module, on a trouvé la valeur complète de la fonction Y exprimée sous forme finie à l'aide de quadratures définies. Mais lorsqu'on se borne à admettre dans le calcul les signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, les cas d'intégrabilité deviennent très rares. Ceux que l'on a indiqués répondent à une certaine forme des valeurs du module m, savoir

$$m = -\frac{4i}{2i \pm 1};$$

on les a obtenus par des artifices particuliers, et les méthodes qui les ont fait connaître ne prouvent pas qu'ils soient les seuls possibles. On ignore complétement s'il y a d'autres valeurs du module m pour lesquelles la fonction Y pourrait s'exprimer en X à l'aide d'un nombre limité de signes algébriques, exponentiels et logarithmiques. A la vérité les efforts réitérés des analystes pour découvrir quelque nouveau cas d'intégrabilité n'ayant produit aucun résultat, on est naturellement porté à croire qu'il n'en existe aucun différent de ceux que nous venons de citer. On conçoit pourtant que cela est loin de constituer une démonstration rigoureuse. J'ai donc pensé qu'il pouvait être bon de soumettre la question à une analyse exacte, et je suis parvenu à démontrer que les cas d'intégrabilité indiqués plus haut sont en effet les seuls admissibles. J'ajoute qu'il en serait encore ainsi lors même qu'aux signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, on joindrait le signe $\int$ d'intégration indéfinie relative à la variable X.

1. On sait que l'équation de Riccati, savoir

$$\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} + a\mathrm{Y}^2 = b\mathrm{X}^m, \tag{1}$$

se ramène immédiatement à la forme

$$\frac{dv}{dz} + v^2 = z^m;$$

et qu'en posant

$$v = \frac{d.\log u}{dz} = \frac{1}{u}.\frac{du}{dz},$$

elle devient

$$\frac{d^2u}{dz^2} = z^m.u. \tag{2}$$

Maintenant faisons

$$u = z^p.y,$$

ce qui nous donnera

$$z^p.\frac{d^2y}{dz^2} + 2pz^{p-1}.\frac{dy}{dz} + p(p-1)z^{p-2}.y = z^{m+p}.y,$$

puis substituons à la variable indépendante z une autre variable indépendante x, liée avec elle par la relation $z = x^r$. L'équation nouvelle entre y et x à laquelle nous serons conduits sera assez compliquée; mais on la simplifiera beaucoup en disposant convenablement des exposants indéterminés r et p. Nous prendrons

$$r = \frac{2}{m+2}, \quad p = \frac{r-1}{2r} = -\frac{m}{4}.$$

De cette manière on aura

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{2}{m+2}\right)^2.\left[1 - \frac{m}{4}\left(\frac{m}{4}+1\right).\frac{1}{x^2}\right]y,$$

équation comprise dans la formule générale

$$(4) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(A + \frac{B}{x^2}\right)y,$$

dont elle se déduit en posant

$$A = \left(\frac{2}{m+2}\right)^2, \quad B = -\left(\frac{2}{m+2}\right)^2.\frac{m}{4}\left(\frac{m}{4}+1\right).$$

A la vérité notre transformation devient impossible lorsque l'on a

$$m = -2,$$

mais alors l'équation (2) s'intègre immédiatement, et l'on trouve

$$u = Cz^q + C'z^{q'},$$

q et q' étant les deux racines de l'équation $q(q-1) = 1$, tandis que C et C' sont des constantes arbitraires. Nous mettrons de côté ce cas particulier : nous supposerons aussi que l'on n'a ni $m = 0$, ni $m = -4$, et que par suite B n'est pas zéro. Pour $m = 0$, l'équation (2) fournirait

$$u = Ce^z + C'e^{-z};$$

pour $m = -4$, l'équation (3) se réduisant à

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y,$$

s'intégrerait sans difficulté.

Si la valeur de Y peut s'exprimer en fonction de X à l'aide d'un nombre limité de signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, et de signes d'intégrations indéfinies relatives à la variable indépendante X, il est visible que y devra s'exprimer de la même manière en fonction de x, et *vice versâ*. Au lieu de discuter en elle-même et directement l'équation de Riccati, il reviendra donc au même de discuter l'équation (4) à laquelle elle est intimement liée; c'est ce que nous allons faire. Pour plus de généralité, nous supposerons, dans nos premiers calculs, que les coefficients A et B ont des valeurs quelconques différentes de zéro, nous réservant de donner plus tard à ces coefficients les valeurs particulières qui conviennent à l'équation de Riccati.

2. Prouvons d'abord que l'équation (4) n'est vérifiée par aucune intégrale de la forme $y =$ *une fonction algébrique de* x, l'intégrale insignifiante $y = 0$ étant, bien entendu, mise de côté. Faisons

$$A + \frac{B}{x^2} = P,$$

en sorte que notre équation (4) devienne

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Py. \tag{5}$$

Dès lors tous les raisonnements contenus dans les nos 4 et 5 de mon *Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites* [*], s'appliqueront à l'équation (5) sans qu'on ait besoin d'y changer un seul mot. Pour prouver

---

[*] Tome IV de ce Journal, page 423.

que l'équation (5) n'a pas d'intégrale algébrique, il suffit donc de prouver que le système d'équations suivant

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= u', \\
\frac{du'}{dx} &= \mu \mathrm{P}u + u'', \\
\frac{du''}{dx} &= 2(\mu - 1)\mathrm{P}u' + u''', \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{du^{(i+1)}}{dx} &= (i+1)(\mu - i)\mathrm{P}u^{(i)} + u^{(i+2)}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{du^{(\mu)}}{dx} &= \mu \mathrm{P}u^{(\mu-1)},
\end{aligned}\right.$$

ne peut jamais avoir lieu en prenant pour u une valeur rationnelle différente de zéro.

Si la valeur de u était rationnelle en x, celles de u', u'', etc., le seraient également. Imaginons que dans toutes ces fonctions et dans les produits $\mathrm{P}u$, $\mathrm{P}u'$, etc., on ait séparé la partie entière de la partie fractionnaire, puis décomposé celle-ci en fractions simples par le procédé connu. Je dis qu'il n'entrera dans u aucune fraction dont le dénominateur soit de la forme $(x - x_1)^\gamma$, γ étant un nombre entier égal ou supérieur à l'unité, et x_1 une quantité différente de zéro; en effet, parmi toutes les fractions simples de la forme citée qu'on voudrait admettre dans la valeur de u, considérons spécialement celle pour laquelle l'exposant γ est le plus grand possible; à l'inspection des équations (6), nous voyons que le facteur $x - x_1$ devrait entrer dans les dénominateurs de u', u'', ..., $u^{(\mu-1)}$, $u^{(\mu)}$, avec les exposants respectifs $\gamma + 1$, $\gamma + 2$, ..., $\gamma + \mu - 1$, $\gamma + \mu$, ce qui est impossible puisque l'on a

$$\frac{du^{(\mu)}}{dx} = \mu \mathrm{P}u^{(\mu-1)}.$$

Ce raisonnement cesserait d'être exact si l'on avait $x_1 = 0$, puisque P contient x en diviseur; nous voyons donc que le dénominateur de u

doit se réduire à une simple puissance de x, et que par suite il en est de même des dénominateurs de u', u'',... Toutes les quantités u, u', u'',..., peuvent donc s'exprimer par une suite de monomes formés chacun du produit d'une constante par une puissance de x égale à un nombre entier positif, nul ou négatif. Nous supposerons ces monomes ordonnés par rapport aux puissances descendantes de x, et pour mettre en évidence leurs premiers termes, nous écrirons

$$u = hx^{n} + \text{etc.}, \quad u' = h_1 x^{n_1} + \text{etc.}, \quad u'' = h_2 x^{n_2} + \text{etc.}$$

En même temps nous remplacerons la dernière des équations (6) par les deux équations équivalentes

$$\frac{du^{(\mu)}}{dx} = \mu \mathrm{P} u^{(\mu-1)} + u^{(\mu+1)}, \quad u^{(\mu-1)} = 0.$$

et nous chercherons les valeurs de h_1, h_2,..., $h_{\mu+1}$: il faudra que l'on ait $h_{\mu+1} = 0$ pour que l'équation $u_{\mu+1} = 0$ soit satisfaite, et par conséquent pour que les équations (6) aient lieu avec une valeur rationnelle de u.

L'équation

$$u' = \frac{du}{dx}$$

donne d'abord

$$u' = nhx^{n-1} + \text{etc.};$$

d'où

$$n_1 = n - 1, \quad h_1 = nh.$$

L'équation

$$u'' = \frac{du'}{dx} - \mu \mathrm{P} u,$$

en observant que P est de la forme

$$\mathrm{P} = \mathrm{A} + \text{etc.},$$

donne ensuite

$$u'' = -\mu \mathrm{A} h x^{n} + \text{etc.};$$

d'où

$$n_2 = n, \quad h_2 = -\mu A h.$$

Ces premières valeurs sont comprises dans les formules générales

$$u^{(2q)} = (-1)^q . h . A^q . C_{2q} . x^n + \text{etc.},$$
$$u^{(2q+1)} = (-1)^q . h . A^q . C_{2q+1} . x^{n-1} + \text{etc.},$$

où C_{2q}, C_{2q+1}, sont des coefficients numériques essentiellement > 0. On s'assurera que ces formules sont exactes, en recourant à l'équation

$$u^{(i+2)} = \frac{du^{(i+1)}}{dx} - (i+1)(\mu - i)\, Pu^{(i)}.$$

Pour $i = 2q$, cette équation donne

$$u^{(2q+2)} = (-1)^{q+1} . h . A^{q+1} C_{2q} . (2q+1)(\mu - 2q) . x^n + \text{etc.};$$

d'où résulte

$$C_{2q+2} = (2q+1)(\mu - 2q)\, C_{2q}.$$

Pour $i = 2q + 1$, elle fournit

$$u^{(2q+3)} = (-1)^{q+1} . h . A^{q+1} . (nC_{2q+2} + (2q+2)(\mu - 2q - 1)\, C_{2q+1}) . x^{n-1} + \text{etc.};$$

d'où

$$C_{2q+3} = nC_{2q+2} + (2q+2)(\mu - 2q - 1)\, C_{2q+1}.$$

Les valeurs obtenues ainsi pour C_{2q+2} et C_{2q+3} sont positives puisque l'indice $2q + 2$ ou $2q + 3$ ne surpasse jamais $(\mu + 1)$. La loi énoncée tout-à-l'heure est donc vérifiée : il s'ensuit évidemment que l'on ne peut avoir ni $h_{\mu+1} = 0$ ni $u^{(\mu+1)} = 0$. Donc l'équation (5) n'a jamais d'intégrale algébrique.

3. Maintenant appliquons à l'équation (5) tous les raisonnements contenus dans les nos **9**, **10** et **11** du Mémoire sur l'intégration des équations, déjà cité, et nous verrons que si l'équation (5) possède une intégrale de la forme $y =$ *une fonction finie explicite de* x, il faudra nécessairement que l'équation

$$\frac{dt}{dx} + t^2 = P \tag{7}$$

puisse être satisfaite par une valeur de la forme $t =$ *fonction algébrique de* x. D'après la remarque faite au dernier numéro du même Mémoire, ce théorème subsisterait, et une valeur de t algébrique en x devrait encore satisfaire à l'équation (7), lors même qu'aux signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, qui déjà sont supposés pouvoir entrer dans les fonctions finies explicites, on joindrait le signe $\int$ d'intégration indéfinie relative à la variable x. La recherche des cas où l'équation de Riccati peut s'intégrer sous forme finie en exprimant explicitement la fonction qui s'y trouve à l'aide de signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, et de signes $\int$ d'intégrations relatives à la variable indépendante, se réduit donc à la recherche des cas où l'on peut trouverpour l'équation (7) une intégrale algébrique.

Mais on peut aller plus loin, car à l'aide des raisonnements contenus dans le nº **12** et dans la Note jointe au nº **13** du Mémoire sur l'intégration des équations [*], on prouve sans peine qu'une intégrale t de l'équation (7) ne peut pas être algébrique sans être en même temps rationnelle. C'est donc la détermination des intégrales rationnelles que l'équation (7) peut avoir qui doit à présent nous occuper.

4. La valeur de t que l'on cherche étant rationnelle, se composera naturellement d'une partie entière Q et d'une partie fractionnaire réductible en une série de fractions simples de la forme

$$\frac{G}{(x-p)^\alpha},$$

de sorte que l'on peut écrire

$$t = Q + \sum \frac{G}{(x-p)^\alpha}.$$

De là résulte

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dQ}{dx} - \sum \frac{\alpha G}{(x-p)^{\alpha+1}},$$

---

[*] Tome IV de ce Journal, page 446.

et il faut qu'en portant ces valeurs dans l'équation

$$\frac{dt}{dx} + t^2 - P = 0,$$

celle-ci soit satisfaite. Mais comme son premier membre se composera, après la substitution, d'une partie entière et d'une partie fractionnaire, il sera nécessaire que ces deux parties s'annullent séparément. Or la partie entière de t^2 contient, outre Q^2, un terme Q_1 provenant du double produit de Q par la partie fractionnaire de t : la partie entière de P est d'ailleurs A. On doit donc poser

$$\frac{dQ}{dx} + Q^2 + Q_1 - A = 0.$$

Le degré de la fonction Q_1, et par suite de $\frac{dQ}{dx} + Q_1$, est inférieur au moins d'une unité à celui de Q. L'équation précédente exige donc que Q^2 et A soient de même degré : ainsi Q ne peut être qu'une simple constante; dès lors $\frac{dQ}{dx}$ et Q_1 doivent se réduire à zéro. Par suite on a nécessairement

$$Q^2 = A, \quad Q = \pm \sqrt{A}.$$

Maintenant occupons-nous de la partie fractionnaire de t. Parmi les fractions simples qui la composent, considérons spécialement celle qui répond au diviseur $x - p$, p étant différent de zéro, et, s'il y en a plusieurs de la forme

$$\frac{G}{(x-p)^\alpha},$$

attachons-nous de préférence à celle où l'exposant α est le plus grand. Dès lors les valeurs de $\frac{dt}{dx}$ et de t^2 pourront s'écrire ainsi

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{\alpha G}{(x-p)^{\alpha+1}} + \frac{M_1}{N_1(x-p)^\alpha},$$
$$t^2 = \frac{G^2}{(x-p)^{2\alpha}} + \frac{M_2}{N_2(x-p)^{2\alpha-1}},$$

M_1, M_2, N_1, N_2, étant des polynomes dont les deux derniers ne sont pas divisibles par $x - p$. En les substituant dans l'équation (7), on aura

$$\frac{G^2}{(x-p)^{2\alpha}} - \frac{\alpha G}{(x-p)^{\alpha+1}} + \frac{M_2}{N_2(x-p)^{2\alpha-1}} + \frac{M_1}{N_1(x-p)^{\alpha}} - P = 0.$$

Or 2α est au moins égal à $\alpha + 1$, et il y aurait absurdité à le supposer plus grand puisque alors la première fraction ne pourrait plus se réduire avec aucune autre; il faut donc poser $2\alpha = \alpha + 1$, c'est-à-dire $\alpha = 1$. Pour que les deux premiers termes se détruisent, G n'étant pas zéro, il faut ensuite que $G = 1$. Ainsi, abstraction faite des fractions simples dont le diviseur est monome, la quantité

$$\sum \frac{G}{(x-p)^{\alpha}}$$

est de la forme

$$\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} + \ldots\ldots + \frac{1}{x-r},$$

le nombre des fractions que nous venons d'écrire pouvant, bien entendu, se réduire à zéro.

Quant aux fractions dont le diviseur est un monome, on les mettra en évidence si l'on pose dans les calculs précédents $p = 0$, et si de plus on remplace P par sa valeur

$$A + \frac{B}{x^2}.$$

La dernière des équations obtenues plus haut devient alors

$$\frac{G^2}{x^{2\alpha}} - \frac{\alpha G}{x^{\alpha+1}} + \frac{M_2}{N_2 x^{2\alpha-1}} + \frac{M_1}{N_1 x^{\alpha}} - A - \frac{B}{x^2} = 0.$$

En prenant $\alpha > 1$, d'où $2\alpha > \alpha + 1 > 2$, on arriverait à une absurdité, puisque la première fraction ne se réduirait avec aucune autre. On doit donc poser $\alpha = 1$, et ensuite $G^2 - G = B$, pour que les termes qui ont le diviseur x^2 se détruisent. Il entre donc dans t une seule fraction de la forme $\frac{G}{x^{\alpha}}$; l'exposant α s'y trouve égal à 1, et le numérateur G est une des racines de l'équation $G^2 - G = B$; nous désignerons cette racine par $-\beta$, ce qui suppose

$$\beta(\beta + 1) = B.$$

On voit donc finalement que la valeur rationnelle de t, qui peut satisfaire à l'équation (7), doit être de la forme

$$t = \pm\sqrt{A} - \frac{\beta}{x} + \frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} + \ldots + \frac{1}{x-r},$$

β satisfaisant, comme on l'a dit, à l'équation

$$\beta(\beta + 1) = B.$$

Puisque l'équation

$$(4) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(A + \frac{B}{x^2}\right)y$$

est satisfaite par

$$y = e^{\int t dx},$$

nous devons en conclure que l'existence d'une telle valeur de t entraîne celle d'une valeur de y de la forme

$$y = e^{\pm x\sqrt{A}} . x^{-\beta} . Y,$$

Y étant un polynome entier

$$(x-p)(x-q)\ldots\ldots(x-r).$$

Ce polynome doit satisfaire à l'équation

$$(8) \qquad x\frac{d^2Y}{dx^2} - 2(\beta \mp x\sqrt{A})\frac{dY}{dx} \mp 2\beta\sqrt{A}.Y = 0,$$

que l'on déduit de l'équation (4) en y mettant pour y sa valeur et en remplaçant B par $\beta(\beta + 1)$.

5. Désignons par n le degré du polynome Y, et posons

$$Y = x^n + h_1 x^{n-1} + \ldots + h_i x^{n-i} + \ldots + h_n.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (8), puis égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x, on trouve d'abord $n = \beta$: cette équation, qui provient de l'égalité à zéro du coefficient de x^n, ne peut avoir lieu que si β est un nombre entier nul ou positif. La condition dont il s'agit étant supposée remplie et l'exposant n ayant été pris égal à β, on trouve ensuite généralement

$$h_{i+1} = \mp \frac{(\beta - i)(\beta + i + 1) h_i}{2\sqrt{A}.(i+1)},$$

formule à l'aide de laquelle on déterminera les coefficients successifs $h_1, h_2, \ldots, h_n$, en partant de $h_0 = 1$, et qui fournit, comme cela doit être, une valeur nulle de $h_{\beta+1}$ ou h_{n+1}. La condition que β soit un entier nul ou positif est donc la seule nécessaire; dès qu'elle est remplie, l'équation (8) est satisfaite par le polynome

$$Y = x^n + h_1 x^{n-1} + \ldots + h_n,$$

où $n = \beta$ et dont les coefficients sont déterminés par la formule que je viens d'indiquer.

Cela fournit en général pour Y une valeur double à cause du signe $\pm$ qui affecte le radical $\sqrt{A}$. En continuant à désigner par Y le polynome qui répond au signe +, et désignant par Z celui qui répond au signe −, on aura donc cette valeur complète de y,

$$y = Ce^{x\sqrt{A}}.x^{-\beta}.Y + C'e^{-x\sqrt{A}}.x^{-\beta}.Z,$$

où C et C′ sont des constantes arbitraires. Le cas où $\beta = 0$ fait exception, mais on peut ne pas s'en occuper puisqu'on a supposé d'avance que B n'est pas nul. Dans ce cas d'ailleurs l'équation (8) se réduisant à

$$x\frac{d^2Y}{dx^2} \pm 2x\sqrt{A}\frac{dY}{dx} = 0,$$

s'intègre immédiatement.

6. En résumé, pour que l'équation

$$(4) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(A + \frac{B}{x^2}\right)y,$$

où la constante A est supposée essentiellement différente de zéro, puisse être satisfaite en prenant pour y une fonction de x exprimable par un nombre limité de signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, et de signes $\int$ indiquant des intégrations indéfinies relatives à la variable x, il est nécessaire et suffisant que B soit de la forme $\beta(\beta+1)$, β étant un entier nul ou positif. Cette condition étant remplie, on pourra exprimer à l'aide des signes indiqués et même à l'aide des seuls signes algébriques et exponentiels l'intégrale complète de l'équation (4).

Voyons ce que devient la condition précédente pour l'équation de Riccati. On a alors

$$B = -\left(\frac{2}{m+2}\right)^2 \cdot \frac{m}{4}\left(\frac{m}{4}+1\right).$$

En remplaçant B par $\beta(\beta+1)$, ou $n(n+1)$, il vient

$$(2n+1)^2(m^2+4m) + 16n^2 + 16n = 0,$$

d'où l'on tire pour m ces deux valeurs

$$m = -\frac{4n}{2n+1}, \quad m = -\frac{4(n+1)}{2n+1},$$

dont la seconde peut être écrite ainsi

$$m = -\frac{4(n+1)}{2(n+1)-1},$$

et qui par conséquent peuvent être remplacées par la formule double si connue

$$m = -\frac{4i}{2i \pm 1},$$

où i désigne un nombre entier nul ou positif.