JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

F. SARRUS

Essai sur la résolution des équations numériques, à une ou plusieurs inconnues et de forme quelconque

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 171-190.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__171_0>

ESSAI

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES,

A UNE OU PLUSIEURS INCONNUES ET DE FORME QUELCONQUE;

PAR F. SARRUS,

Doyen de la Faculté des Sciences de Strasbourg.

La résolution des équations à plusieurs inconnues a reposé jusqu'à ce jour sur différents procédés d'élimination. Mais d'un côté ces procédés conduisent à des calculs d'une longueur presque toujours rebutante; d'un autre côté ils cessent d'être applicables même en théorie lorsque les équations à résoudre renferment des fonctions transcendantes. Frappé de ces inconvénients, je me suis proposé de résoudre sans élimination, sans recherche de plus grand commun diviseur, cette question générale :

Étant donné une ou plusieurs équations à un nombre quelconque d'inconnues, trouver toutes les solutions de ces équations qui peuvent être comprises entre des limites données quelconques. Trouver en outre le degré de multiplicité de chacune de ces solutions.

Après de longues tentatives, que des succès partiels venaient encourager, je suis enfin parvenu à trouver les moyens d'*approcher indéfiniment du but que je m'étais proposé*. C'est-à-dire que je donne des moyens faciles d'exclure tous les nombres qui, pris pour valeurs de x, y, z,..., *ne satisferaient point aux équations proposées avec un degré donné d'approximation*. Les nombres restants contiendront toutes les solutions effectives des équations données; malheureusement ils pourront contenir aussi des valeurs étrangères qui satisferaient à très peu près à ces mêmes équations. Quoi qu'il en soit, mon travail actuel me paraît un pas considérable vers la résolution complète des équations numériques.

Je terminerai ce court préambule en ajoutant que les principes développés dans les deux premiers chapitres de ce Mémoire, peuvent servir encore à trouver la limite des erreurs que l'on peut commettre par l'emploi de la formule de Maclaurin, de celle de Taylor, des méthodes d'interpolation appliquées à la recherche des quadratures; et qu'enfin ils peuvent servir aussi à résoudre, dans le plus grand nombre de cas, les équations différentielles d'un ordre et d'un degré quelconques à une ou plusieurs inconnues. Cette application formera le sujet d'un autre Mémoire.

CHAPITRE PREMIER.

Préliminaires.

I.

1. Nous désignerons par L, M, N,..., des fonctions quelconques de x, y, z,...; par x', y', z',..., des valeurs quelconques respectivement moindres que x, y, z,...; et par x'', y'', z'',..., d'autres quantités respectivement plus grandes.

2. Nous supposerons que dans toute l'étendue des limites x', y', z',..., et x'', y'', z'',..., les valeurs de L, M, N,..., restent finies et continues. Nous ferons abstraction des autres valeurs de ces fonctions.

3. Nous désignerons par L′ et L″ deux nouvelles quantités auxiliaires qui soient telles que,

Dans toute l'étendue des limites x', y', z',..., x'', y'', z'',..., les valeurs de L soient plus grandes que L′ et moindres que L″; et que de plus,

En faisant varier les limites x', y', z',..., x'', y'', z'',..., de manière que les différences positives $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$,..., $x''-x$, $y''-y$, $z''-z$,..., décroissent indéfiniment, les différences également positives

$L - L'$, $L'' - L$, finissent par devenir moindres que toute quantité donnée.

4. Nous désignerons de même par M', N',..., M'', N'',..., des quantités qui soient par rapport aux valeurs de M, N,..., ce que L' et L'' sont par rapport à celles de L.

5. Nous donnerons aux quantités auxiliaires L', M', N',... le nom de *limites inférieures* des valeurs de L, M, N,..., et aux quantités L'', M'', N'',... celui de *limites supérieures* des mêmes valeurs.

6. Avant d'indiquer les moyens de trouver les valeurs de ces limites inférieures et supérieures, nous croyons devoir exposer celles de leurs propriétés dont nous nous servirons pour la résolution des équations.

II.

7. Lorsque la limite inférieure des valeurs d'une fonction sera positive, ces valeurs seront aussi, et à plus forte raison, positives, et par conséquent aucune d'elles ne pourra être nulle.

8. Lorsque la limite supérieure des valeurs d'une fonction sera négative, ces différentes valeurs seront aussi, et à plus forte raison, négatives, et par conséquent aucune d'elles ne sera nulle.

9. Réciproquement, si les limites x', y', z',..., et x'', y'', z'',.... sont suffisamment rapprochées, et si néanmoins aucune des valeurs d'une fonction calculées dans l'étendue de ces limites n'est égale à zéro, il arrivera :

Ou que la limite inférieure des valeurs de cette fonction sera positive, ou bien que la limite supérieure sera négative.

Pour le prouver, supposons que L se rapporte à un système de valeurs particulières et invariables de x, y, z,...; alors L sera une quantité fixe et différente de zéro.

Supposons en second lieu que les limites x', y', z',..., x'', y'', z'',..., se rapprochent indéfiniment des valeurs de x, y, z,..., dont nous venons de parler; alors les différences positives $L - L'$, $L'' - L$, finiront par devenir moindres que la valeur absolue de L (art. 3).

D'ailleurs nous avons identiquement

$$L' = L - (L - L'), \quad L'' = L + (L'' - L),$$

nous pouvons donc conclure que les valeurs de L' et de L'' finiront par devenir de même signe que L, et que par suite elles seront ou toutes les deux positives, ou bien toutes les deux négatives.

Si donc L' n'est pas positive, L'' sera négative.

10. Il résulte de ce qui précède que,

Si la limite inférieure des valeurs d'une fonction est négative, et si la limite supérieure est en même temps positive, il faut, ou que cette fonction devienne nulle, en prenant des valeurs convenables de x, y, z,..., comprises entre les limites x', y', z',... et x'', y'', z'',..., ou bien que ces limites soient trop écartées.

Ces préliminaires renfermant tout ce qui peut nous être utile pour la résolution des équations numériques, nous allons passer à la recherche des limites des valeurs des fonctions.

CHAPITRE DEUXIÈME.

Recherches des limites des valeurs des fonctions.

I.

11. Nous avons maintenant à résoudre cette question générale :

Étant donné une fonction quelconque $L = f(x, y, z, \ldots)$, trouver les limites inférieure et supérieure des valeurs qu'elle peut avoir quand on fait varier x, y, z,..., dans l'étendue de leurs limites x', y', z',..., et x'', y'', z'',....

Nous allons nous en occuper en commençant par les cas les plus simples.

12. Toutes les fois que l'on saura trouver la plus petite et la plus grande des valeurs de L qui peuvent avoir lieu dans l'étendue des limites des valeurs x, y, z,..., on pourra prendre la plus petite de ces valeurs comme la limite inférieure de toutes les autres, et la plus grande pour leur limite supérieure.

Et en effet, il est d'abord visible que toutes les valeurs de L seront plus grandes que la première et moindres que la seconde ; il suffit donc de prouver que ces valeurs extrêmes satisfont aux autres conditions des limites supérieure et inférieure.

Pour cela, en désignant par a, b, c,... le système particulier des valeurs de x, y, z,..., auquel répond la plus petite valeur de L, ces valeurs a, b, c, étant comprises, comme x, y, z,..., entre les limites données, les différences $x - a$, $y - b$, $z - c$,..., prises, abstraction faite de leurs signes, finiront par décroître indéfiniment à mesure qu'on rapprochera suffisamment les limites x', y', z',..., x'', y'', z'',..., des valeurs de x, y, z,..., et par suite il en sera de même de la différence positive $f(x, y, z,...) - f(a, b, c,...)$; nous voyons donc que cette valeur particulière $f(a, b, c,...)$ satisfait à toutes les conditions d'une limite inférieure.

Nous prouverions de la même manière que la plus grande des valeurs de L satisfait à toutes les conditions d'une limite supérieure.

13. Le cas que nous venons de considérer aura évidemment lieu toutes les fois que L sera une fonction d'une seule variable de l'une des formes suivantes

$$x^\alpha, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \operatorname{tang} x, \quad \log x, \ldots,$$

c'est-à-dire toutes les fois qu'elle sera une fonction que l'on pourra ramener à des tables connues.

14. Un cas particulier, de la plus haute importance, est celui où il s'agit d'un produit de la forme

$$kx^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots,$$

dans lequel k, α, β, γ,... expriment des nombres positifs quelconques, et que les limites x', y', z',..., x'', y'', z'',..., des valeurs de x, y, z,..., sont toutes positives.

Les deux limites de ce produit seront alors

$$kx'^\alpha y'^\beta z'^\gamma \ldots, \quad \text{et} \quad kx''^\alpha y''^\beta z''^\gamma \ldots$$

15. Il s'agit maintenant de montrer comment on peut ramener tous les autres cas qui peuvent se présenter à ceux que nous venons de considérer dans les articles précédents.

II.

16. Désignons par P, Q, R,..., T, U, V,..., des fonctions quelconques dont on sait trouver les limites inférieures et supérieures; de plus, désignons par L une fonction composée d'une manière quelconque au moyen des premières, et parcourons les cas principaux qui peuvent se présenter.

17. Nous supposerons d'abord que l'on ait

$$L = P + Q + R + \ldots\ldots - T - U - V - \ldots\ldots;$$

dans ce cas, pour avoir la limite inférieure des valeurs de L, il suffira de prendre

$$L' = P' + Q' + R' + \ldots\ldots - T'' - U'' - V'' - \ldots\ldots,$$

et pour avoir leur limite supérieure il suffira de prendre

$$L'' = P'' + Q'' + R'' + \ldots\ldots - T' - U' - V' - \ldots\ldots$$

En effet, deux simples soustractions nous donnent

$$\begin{aligned} L - L' &= (P - P') + (Q - Q') + (R - R') + \ldots\ldots \\ &\quad + (T'' - T) + (U'' - U) + (V'' - V) + \ldots\ldots, \\ L'' - L &= (P'' - P) + (Q'' - Q) + (R'' - R) + \ldots\ldots \\ &\quad + (T - T') + (U - U') + (V - V') + \ldots\ldots, \end{aligned}$$

dont les seconds membres se composent de parties qui, par hypothèse, sont toutes positives et qui finissent par devenir moindres que toute quantité donnée quand on resserre suffisamment les limites $x', y', z', \ldots$ et $x'', y'', z'', \ldots$.

18. En traduisant ces derniers résultats en langage ordinaire, on trouve que,

Pour obtenir la limite inférieure des valeurs d'une somme quel-

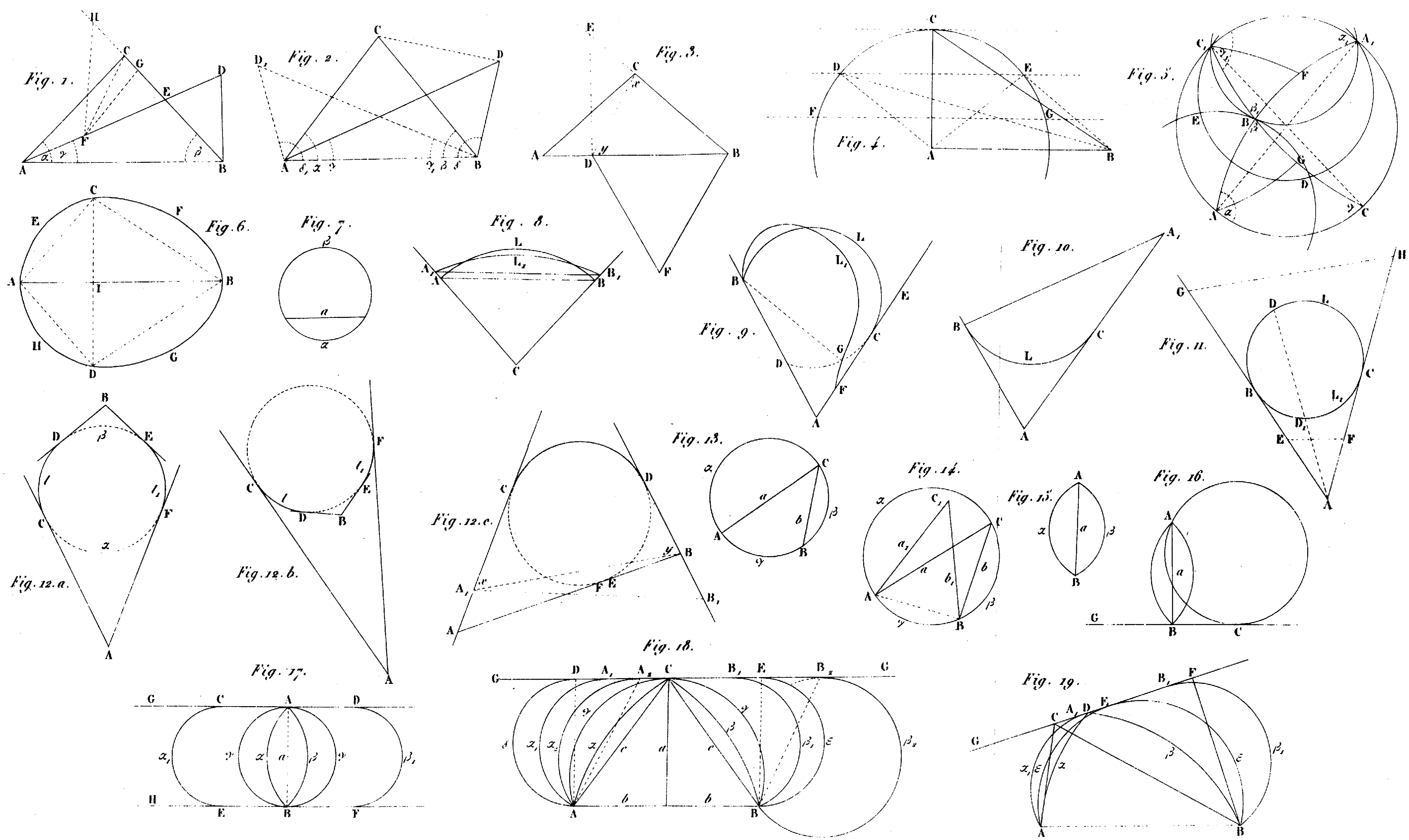
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12. a.
Fig. 12. b.
Fig. 12. c.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.

conque, il suffit de remplacer chaque partie positive par sa limite inférieure, et chaque partie négative par sa limite supérieure;

Pour obtenir la limite supérieure des valeurs d'une somme quelconque, il suffit de remplacer chaque partie positive par sa limite supérieure, et chaque partie négative par sa limite inférieure.

19. En rapprochant ce que nous venons de dire de l'observation de l'art. **14**, nous trouverons que,

Lorsqu'un polynome ne contient que des puissances positives des variables x, y, z,..., et que de plus les limites x', y', z',..., x'', y'', z'',..., de ces variables sont toutes positives,

On aura une limite inférieure des valeurs de ce polynome en remplaçant x, y, z,..., par leurs limites inférieures dans ceux des termes de ce polynome qui sont positifs, et par leurs limites supérieures dans ceux qui sont négatifs.

On aura une limite supérieure des mêmes valeurs en remplaçant x, y, z,... par leurs limites supérieures dans ceux des termes du polynome qui sont positifs, et par leurs limites inférieures dans ceux qui sont négatifs.

III.

20. Supposons en second lieu que l'on ait

$$\mathrm{L} = \mathrm{PQR}\ldots\ldots\quad \mathrm{TUV}\ldots\ldots$$

Supposons en outre que les limites, et par suite toutes les valeurs de P, Q, R,..., soient positives, mais que celles de T, U, V,..., soient négatives.

Dans ce cas, on pourra prendre le plus petit des deux produits

$$\mathrm{P'Q'R'}\ldots\ \mathrm{T''U''V''}\ldots,\quad \text{et}\quad \mathrm{P''Q''R''}\ldots\ \mathrm{T'U'V'}\ldots,$$

pour la limite inférieure L′, et le plus grand pour la limite supérieure L″.

En effet, la valeur absolue de chacun des facteurs du produit PQR... TUV..., est plus grande que celle du facteur correspondant du produit P′Q′R′... T″U″V″..., et moindre que celle du facteur correspondant du produit P″Q″R″... T′U′V′...: et comme d'ailleurs ces trois produits sont de même signe, il faut que la valeur du premier, prise en ayant égard au signe, soit comprise entre celles des deux autres. En outre, si l'on resserre indéfiniment les limites x', y', $z',\ldots$, x'', y'', $z'',\ldots$, des valeurs de x, y, $z,\ldots$, ces trois produits s'approcheront de plus en plus d'être égaux entre eux, et leurs différences finiront par devenir moindres que toute quantité donnée; on voit donc que toutes les conditions relatives aux limites des valeurs des fonctions se trouvent satisfaites.

Ce nouveau principe, combiné avec celui de l'art. **18**, et quelques préparations faciles à effectuer, suffit pour parvenir à la résolution des équations de forme quelconque. Cependant nous ajouterons encore quelques nouvelles règles qui peuvent être utiles, soit pour le même but, soit pour d'autres applications dont nous pourrons nous occuper dans une autre occasion.

IV.

21. Supposons maintenant que, dans la fonction donnée par l'égalité

$$L = PQR\ldots,$$

les facteurs P, Q, R,... soient quelconques. Dans ce cas nous ferons

$$P = P' + p, \quad Q = Q' + q, \quad R = R' + r, \ldots;$$

dès-lors p, q, $r,\ldots$, seront des fonctions de x, y, $z,\ldots$, dont les valeurs seront positives et comprises entre les limites

$$0 \text{ et } P'' - P', \quad 0 \text{ et } Q'' - Q', \quad 0 \text{ et } R'' - R', \ldots.$$

Au moyen de ces valeurs de P, Q, R,..., le produit PQR..., se changera en

$$(P' + p), \ (Q' + q), \ (R' + r), \ldots,$$

dont le développement conduira à une expression de la forme

$$\begin{aligned} P'Q'R' &+ Ap + A_1q + A_2r + \ldots, \\ &+ Bpq + B_1pr + B_2qr + \ldots, \\ &+ Cpqr + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

dans laquelle A, A_1, A_2, $A_3, \ldots$, B, B_1, $B_2, \ldots$, C, $C_1, \ldots$, seront des produits connus de quelques-uns des facteurs P', Q', $R', \ldots$ Cela posé, on aura une limite inférieure de valeurs de ce développement, c'est-à-dire de L, en remplaçant p, q, $r, \ldots$, par o, dans chacun des termes positifs du développement, et par $P''-P'$, $Q''-Q'$, $R''-R', \ldots$, dans les termes négatifs.

On aura la limite supérieure de L en remplaçant p, q, $r, \ldots$, par $P''-P'$, $Q''-Q'$, $R''-R', \ldots$, dans chaque terme positif du développement, et par o dans les termes négatifs.

En effet, en opérant de cette manière, on ne fait que mettre en pratique la règle de l'art. **18**.

V.

22. Nous terminerons ces sortes de recherches en traitant la fonction donnée par l'équation

$$L = f(P, Q, R, \ldots),$$

en supposant que f est le signe caractéristique d'une fonction telle, qu'on sache trouver les limites de $f(x, y, z, \ldots)$, quand on fait varier x, y, $z, \ldots$, entre des limites données quelconques.

Dans ces sortes de cas, il suffira de chercher les limites des valeurs de $f(x, y, z, \ldots)$, qui peuvent avoir lieu quand on fait varier x, y, $z, \ldots$, depuis $x = P'$ jusqu'à $x = P''$, depuis $y = Q'$ jusqu'à $y = Q''$, depuis $z = R'$ jusqu'à $z = R'', \ldots$; les limites trouvées de cette manière seront évidemment celles de L.

23. En opérant, soit comme nous venons de l'indiquer dans les différents articles de ce chapitre, soit par la répétition successive des mêmes procédés, on finira par trouver les deux limites d'une fonction quelconque. Nous allons donc passer à la résolution des équations.

CHAPITRE TROISIÈME.

Résolution des équations.

I.

24. Les principes développés dans les deux chapitres précédents, nous permettent maintenant de résoudre cette question remarquable par sa grande généralité :

Étant données une ou plusieurs équations de forme quelconque

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \ldots,$$

à une ou plusieurs inconnues, dont le nombre peut être différent de celui des équations; étant donné en outre un système de limites des valeurs des inconnues, trouver toutes les valeurs de ces inconnues qui peuvent être comprises entre les limites données, et satisfaire en même temps aux équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$.

24 *bis*. 1[re] *Méthode*. Nous commencerons par chercher les limites inférieures des valeurs que peuvent recevoir les fonctions L, M, N,..., quand on fait varier x, y, z,..., entre les limites données.

25. Il peut arriver que le calcul de ces limites inférieures conduise à en trouver une de positive. Dans ce cas, nous ne pousserons pas le calcul plus loin; la fonction qui aura donné lieu à cette limite positive ne peut pas devenir nulle tant que les valeurs de x, y, z,..., sont comprises entre les limites données (art. **7**), et par conséquent la question proposée n'a pas de solution proprement dite.

26. Mais lorsque toutes les limites inférieures calculées seront négatives, nous procéderons au calcul des limites supérieures des valeurs des mêmes fonctions L, M, N,....

27. Il peut arriver que ce calcul nous conduise à trouver une valeur négative pour une de ces limites supérieures. Dans ce cas, nous nous arrêterons encore; la fonction qui aura donné lieu à cette limite négative ne peut pas devenir nulle tant que les valeurs de x, y, z,..., sont comprises entre les limites données (art. **8**), et par conséquent la question proposée est comme dans le premier cas, elle n'a pas de solution proprement dite.

28. Lorsque toutes les limites inférieures des valeurs de L, M, N,..., seront négatives et leurs limites supérieures positives, nous en conclurons ou que les limites données renferment des solutions des équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$, ou bien que ces limites sont trop écartées (*voir* l'article **10**).

29. D'après cela, nous subdiviserons le système de limites données des valeurs de x, y, $z, \ldots$, en plusieurs autres systèmes de limites plus rapprochées, dont l'ensemble embrassera la même étendue que le système de limites primitives.

30. Nous recommencerons avec chacun de ces nouveaux systèmes de limites, comme nous avons déjà opéré avec le système primitif.

31. De cette manière, nous pourrons être conduits à exclure quelques-uns de ces nouveaux systèmes de limites comme ne pouvant pas renfermer de solution des équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$. Quant aux autres, nous les subdiviserons à leur tour en d'autres systèmes que nous traiterons de la même manière.

32. En opérant ainsi, nous finirons par exclure tous les nombres qui, étant compris entre les limites données pour les inconnues x, y, $z, \ldots$, ne peuvent pas satisfaire aux équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$

Les systèmes de limites qui n'auront pas été exclus nous feront connaître, avec tel degré d'approximation que l'on peut vouloir, toutes les solutions des équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$, qui peuvent être comprises entre les limites données.

33. 2me *Méthode.* Nous prendrons des nombres positifs quelconques α, β, γ, et faisant, pour abréger,

$$V = \alpha L^2 + \beta M^2 + \gamma N^2 + \ldots,$$

nous n'aurons plus qu'à résoudre l'équation unique $V = 0$. Alors nous traiterons cette dernière équation par les procédés de la première méthode, mais avec cette différence, qu'il est entièrement inutile de calculer les limites supérieures des valeurs de la fonction auxiliaire V.

En effet, d'après la composition de cette fonction, elle ne peut jamais devenir négative; par suite ses limites supérieures seront toujours positives, et c'est là tout ce qu'on a besoin de savoir.

34. 3^{me} *Méthode.* Il est facile de modifier la méthode de Newton, de telle manière qu'elle ne soit jamais en défaut, du moins tant que le nombre d'inconnues ne surpassera pas celui des équations.

35. Nous désignerons par a, b, c,..., et $a+h$, $b+k$, $c+l$,..., les limites approchées d'une solution, et nous ferons

$$x = a + t, \quad y = b + u, \quad z = c + v, \ldots;$$

de cette manière les valeurs cherchées de t, u, v,..., devront être comprises entre o et h, o et k, o et l,....

36. Si maintenant nous substituons ces valeurs de x, y, z,..., dans une fonction quelconque $\mathrm{F}(x, y, z,\ldots)$, nous en déduirons un résultat de la forme

$$\mathrm{F}(x, y, z,\ldots) = \mathrm{F}(a, b, c,\ldots) + \mathrm{A}t + \mathrm{B}u + \mathrm{C}v + \ldots + \omega,$$

dans laquelle ω exprimera une fonction de t, u, v,..., de l'ordre des carrés et produits de ces dernières quantités, et dont il sera facile de déterminer les limites de la manière que nous allons indiquer.

37. Lorsque $\mathrm{F}(x, y, z,\ldots)$ ne contiendra que des puissances entières et positives de x, y, z,..., on développera par les méthodes ordinaires de l'algèbre l'expression

$$\mathrm{F}(a+t, \quad b+u, \quad c+v,\ldots);$$

dès-lors la fonction ω sera entièrement connue, et ses limites faciles à déterminer par le procédé de l'art. **19**.

38. Lorsque $\mathrm{F}(x, y, z,\ldots)$ sera une fonction d'une forme plus compliquée, on parviendra au même but en ayant recours aux procédés du Calcul différentiel. Ainsi, en désignant les dérivées du second ordre

$$\frac{d^2\mathrm{F}(x, y, z,\ldots)}{dx^2}, \quad \frac{d^2\mathrm{F}(x, y, z,\ldots)}{dx\,dy}, \quad \frac{d^2\mathrm{F}(x, y, z,\ldots)}{dy^2}, \ldots,$$

respectivement par

$$\varphi(x, y, z, \ldots), \quad \chi(x, y, z,\ldots), \quad \psi(x, y, z,\ldots),$$

on aura

$$\omega = \frac{t^2}{1.2}\varphi(a+it, b+iu, c+iv,\ldots) + \frac{tu}{1.1}\chi(a+it, b+iu, c+iv,\ldots)$$
$$+ \frac{u^2}{1.2}\psi(a+it, b+iu, c+iv,\ldots)+\ldots.$$

dans laquelle i exprimera un certain nombre positif moindre que l'unité, mais de valeur inconnue.

Maintenant il sera facile de trouver les limites des valeurs que peut avoir la fonction ω, quand on fait varier t, u, v,..., et i, depuis 0 jusqu'à h, k, l,..., et 1.

39. En traitant les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$,..., par des considérations analogues aux précédentes, nous les mettrons sous la forme suivante :

$$\begin{array}{l}
A_1 t + B_1 u + C_1 v + \ldots + k_1 + \omega_1 = 0,\\
A_2 t + B_2 u + C_2 v + \ldots + k_2 + \omega_2 = 0,\\
A_3 t + B_3 u + C_3 v + \ldots + k_3 + \omega_3 = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

et de plus nous déterminerons les limites de chacune des fonctions ω_1, ω_2, ω_3,...

40. Après cela nous résoudrons ces nouvelles équations comme des équations du premier degré, dans lesquelles ω_1, ω_2, ω_3,..., exprimeraient des quantités littérales mais connues, et nous arriverons ainsi à des valeurs de la forme

$$t = a_1 + t_1,\quad u = b_1 + u_1,\quad v = c_1 + v_1,$$

dans lesquelles a_1, b_1, c_1,... seront précisément les valeurs que donnerait la méthode de Newton, tandis que t_1, u_1, v_1,... seront des parties affectées des valeurs de ω_1, ω_2, ω_3,....

41. Au moyen des limites connues de ω_1, ω_2, ω_3,..., nous chercherons celles de t_1, u_1, v_1,..., que, suivant nos conventions, nous désignerons par t_1' et t_1'', u_1' et u_1'', v_1' et v_1'',...; et alors les valeurs de

$t, u, v, \ldots$, seront respectivement comprises entre

$$a_1 + t'_1, \quad b_1 + u'_1, \quad c_1 + v'_1, \ldots,$$

et

$$a_1 + t''_1, \quad b_1 + u''_1, \quad c_1 + v''_1, \ldots;$$

par suite les valeurs de x, y, $z, \ldots$, seront respectivement comprises entre

$$a + a_1 + t'_1, \quad b + b_1 + u'_1, \quad c + c_1 + v'_1, \ldots,$$

et

$$a + a_1 + t''_1, \quad b + b_1 + u''_1, \quad c + c_1 + v''_1, \ldots.$$

42. Il est à peine utile de faire observer que les valeurs de t'_1, t''_1, u'_1, u'', v'_1, $v''_1, \ldots$, seront en général des quantités de l'ordre des carrés et produits h, k, $l, \ldots$, et que si, par cas, les limites trouvées pour les valeurs de x, y, $z, \ldots$, étaient en contradiction avec les limites primitives a, b, $c, \ldots$, et $a+h$, $b+k$, $c+l, \ldots$, on devrait en conclure que ces limites a, b, $c, \ldots$, $a+h$, $b+k$, $c+l, \ldots$, ne peuvent pas comprendre de solution des équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$.

II.

43. Dans les trois méthodes que nous venons de développer, on a supposé que les fonctions L, M, N,..., ne pouvaient pas devenir infinies tant que x, y, $z, \ldots$, restaient comprises entre les limites données. Cependant on peut avoir à résoudre des équations qui présentent cette circonstance exceptionnelle ; il faut donc trouver les moyens de tourner cette difficulté.

44. Supposons, pour fixer les idées, qu'une ou plusieurs des équations données $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$, se présentent sous la forme suivante :

$$PV^m + QV^{m-\alpha} + RV^{m-\beta} + \ldots + T = 0,$$

dans laquelle m, α, β, $\gamma, \ldots$, peuvent être des nombres positifs quelconques, et V une fonction qui devient infinie pour un système particulier a, b, $c, \ldots$, des valeurs de x, y, $z, \ldots$.

Dans ce cas nous prendrons des limites auxiliaires x', y', $z', \ldots$, et x'', y'', z'',..., qui comprennent a, b, c,..., et soient assez rapprochées de ces dernières valeurs pour que, tant qu'on reste entre ces limites, V ne puisse pas devenir nulle.

Après cela, nous chercherons les solutions qui peuvent être comprises entre ces limites auxiliaires, en remplaçant l'équation primitive

$$PV^m + QV^{m-\alpha} + RV^{m-\beta} + \ldots + T = 0,$$

par l'équation équivalente

$$P + \frac{Q}{V^\alpha} + \frac{R}{V^\beta} + \ldots + \frac{T}{V^m} = 0,$$

qui ne présente plus le même inconvénient que la première.

45. Nous traiterons d'une manière analogue toutes les équations qui pourront offrir une semblable difficulté.

III.

46. Nous terminerons ce chapitre en indiquant les moyens de déterminer le degré de multiplicité de chacune des solutions d'un système donné d'équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$,....

47. Pour cela, il nous suffira de faire observer que, dans les deux premières méthodes de résolution des équations que nous avons développées, le nombre de ces équations est tout-à-fait indépendant de celui des inconnues qu'elles renferment. Par conséquent,

48. Pour trouver le degré de multiplicité des différentes solutions des équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$,..., qui peuvent être comprises entre des limites données, il suffira de joindre à ces équations celles qui doivent être satisfaites par toute solution multiple, suivant le degré de multiplicité de cette solution. Ce degré sera connu d'après celles de ces équations de condition qui pourront être satisfaites.

CHAPITRE QUATRIÈME.

Simplifications à employer dans les cas particuliers.

I.

49. Nous ne connaissons pas de simplification qui soit possible dans le cas où les équations $L=0$, $M=0$, $N=0,\ldots$, ne contenant que des puissances entières des inconnues x, y, $z,\ldots$, on ne demande que les valeurs des inconnues qui peuvent être comprises entre des limites positives données. Dans ces sortes de cas, il sera facile de trouver les limites supérieures et inférieures des valeurs des fonctions L, M, N,..., au moyen des prescriptions de l'art. **19**, et par suite il sera facile d'appliquer nos méthodes de résolution.

50. Lorsque les fonctions L, M, N,..., ne renfermant, comme dans ce qui précède, que des puissances positives inconnues, on voudra trouver des solutions autres que celles dont on vient de parler, il vaudra mieux ramener la question au cas précédent, que de chercher à résoudre directement les équations $L=0$, $M=0$, $N=0,\ldots$: on peut parvenir à ce but de plusieurs manières; nous nous bornerons à en indiquer une.

51. Quelle que puisse être la valeur de x, il est facile d'observer qu'une des quatre quantités

$$x,\quad -x,\quad +\frac{1}{x},\quad -\frac{1}{x},$$

sera nécessairement positive et moindre que l'unité. Faisant donc

$$-x=+t,\quad +x=+\frac{1}{u},\quad -x=+\frac{1}{v},$$

ce qui donnera

$$x=-t,\quad x=-\frac{1}{u},\quad x=-\frac{1}{v},$$

il faudra que, dans tous les cas, la valeur de l'une des quatre quantités x, t, u, v, soit positive et moindre que l'unité. Par conséquent, tout se réduira à trouver celles des valeurs de ces quantités qui pourront être comprises entre 0 et 1.

II.

52. Il peut arriver que les équations $L=o$, $M=o$, $N=o,\ldots$ renferment des radicaux plus ou moins composés. Dans ces sortes de cas, il sera facile de ramener la question au cas que nous venons de considérer dans le dernier paragraphe.

53. Supposons, par exemple, que ces équations renferment l'expression radicale $\sqrt[m]{P}$.

Dans ce cas nous ferons

$$\sqrt[m]{P}=t,$$

et alors nos équations $L=o$, $M=o$, $N=o,\ldots$ ne renfermeront plus que t, à la place du radical primitif $\sqrt[m]{P}$; mais il faudra joindre l'équation auxiliaire

$$t^m-P=o$$

à celles que l'on avait d'ailleurs.

Après cela, au moyen des limites données des valeurs des inconnues x, y, $z,\ldots$, et de l'équation $\sqrt[m]{P}=t$, on déterminera les limites de la nouvelle inconnue t, et l'on se trouvera tout-à-fait rentré dans le cas du dernier paragraphe.

III.

54. Il peut arriver que les équations $L=o$, $M=o$, $N=o,\ldots$ renferment des expressions radicales superposées telles, par exemple, que l'expression

$$\sqrt[m]{P+Q\sqrt[n]{R}+S\sqrt[o]{T}};$$

dans ces sortes de cas nous ferons

$$\sqrt[o]{T}=t,\quad \sqrt[n]{R}=u,$$

et l'expression précédente se trouvera changée en $\sqrt[m]{P+Qu+St}$. Alors nous ferons

$$\sqrt[m]{P+Qu+St}=v,$$

et nous substituerons cette dernière valeur dans les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$, lesquelles se trouveront ainsi débarrassées du radical complexe primitif. Mais aussi il faudra joindre aux équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$, les équations auxiliaires

$$t^o - T = 0, \quad u^m - R = 0, \quad v^m - P - Qu - St = 0;$$

d'ailleurs, au moyen des limites données des valeurs de x, y, $z, \ldots$, et des équations

$$t = \sqrt[o]{T}, \quad u = \sqrt[n]{R}, \quad v = \sqrt[m]{P + Qu + St}, \ldots,$$

on déterminera les limites correspondantes des valeurs des nouvelles inconnues t, u, $v, \ldots$.

55. Quelle que puisse être la complication des radicaux qui se trouvent dans les fonctions L, M, $N, \ldots$, on pourra toujours s'en débarrasser par des procédés analogues aux précédents, répétés, s'il le faut, à différentes reprises. De cette manière, on pourra ramener au premier cas la résolution des équations de forme purement algébrique. Maintenant nous allons passer à la résolution des équations qui contiennent des transcendantes.

IV.

56. Lorsque les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$ seront composées d'une somme de produits formés par la multiplication d'un coefficient numérique par un ou plusieurs facteurs des formes suivantes :

$$x^\alpha, \ (\sin x)^\beta, \ (\cos y)^\gamma, \ (\tang y)^\delta, \ (\log z)^\theta, \ \varepsilon^{\lambda z}, \ldots,$$

la seule simplification possible consiste dans une subdivision convenable des limites données des valeurs des inconnues x, y, $z, \ldots$, et que nous allons indiquer.

57. En supposant que a et A soient les limites données des valeurs cherchées de l'inconnue x, nous chercherons toutes les valeurs particulières de x qui pourront rendre nulles ou infinies celles des fonctions simples,

$$x^\alpha, \ (\sin x)^\beta, \ (\cos x)^\gamma, \ (\tang x)^\delta, \ (\log x)^\theta, \ \varepsilon^{\iota x}, \ldots,$$

qui entrent dans les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$, et qui seront en même temps comprises entre les limites données a et A. Alors nous insérerons ces valeurs par ordre de grandeur entre les limites a et A, et nous aurons ainsi une suite croissante

$$a, \ a', \ a'', \ a''', \ldots\ldots, \ a'''\cdots', \ A,$$

qui sera telle, que

Tant que les valeurs de x, y, resteront comprises entre deux termes consécutifs de cette suite a, a', a'', $a''', \ldots$, $a'''\cdots'$, A, les valeurs correspondantes de chacune des fonctions simples de x, qui entrent dans les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$, resteront de même signe.

58. De même, en désignant par b et B les limites données pour les valeurs cherchées de y, nous formerons une suite b, b', b'', $b''', \ldots$, $b'''\cdots'$, B, analogue à la précédente, a, a', a'', $a''', \ldots$, $a'''\cdots'$, A ; et nous agirons de même pour chacune des inconnues qui se trouveront entrer dans les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$.

59. Après cela nous remplacerons le système de limites données a, b, $c, \ldots$, et A, B, $C, \ldots$, par d'autres systèmes partiels que nous formerons en combinant, de toutes les manières possibles,

deux termes consécutifs de la suite $a, a', a'', a''', \ldots, a'''\cdots', A$,
avec deux termes consécutifs de la suite $b, b', b'', b''', \ldots, b'''\cdots', B$,
avec deux termes consécutifs de la suite $c, c', c'', c''', \ldots, c'''\cdots', C$,
. . . .

60. Enfin, nous chercherons les solutions des équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$, qui peuvent être comprises dans l'étendue de chacun de ces nouveaux systèmes de limites, ce qui n'exigera que l'emploi de la règle de l'art. **20**.

V.

61. Lorsque les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$ renfermeront des expressions d'une forme plus compliquée que celles que nous venons de considérer, il sera facile de ramener leur résolution à celle d'autres équations qui rentreront dans le cas précédent : il suffira d'introduire une ou plusieurs inconnues auxiliaires convenablement choisies.

62. Supposons par exemple que les équations données renferment l'expression

$$\log\left[P^{\alpha} + Q^{\beta}(\sin R)^{\gamma} + S^{\delta}(\operatorname{tang} U)^{\varepsilon}\right];$$

dans ce cas nous ferons

$$t = P^{\alpha} + Q^{\beta}(\sin R)^{\gamma} + S^{\delta}(\operatorname{tang} U)^{\varepsilon},$$

et par là l'expression primitive se trouvera remplacée par $\log t$. Mais on devra joindre aux équations $L=0$, $M=0$, $N=0,\ldots$, transformées au moyen de cette substitution, l'équation auxiliaire

$$t - P^{\alpha} - Q^{\beta}(\sin R)^{\gamma} - S^{\delta}(\operatorname{tang} U)^{\varepsilon} = 0.$$

63. Si, par cas, les nouvelles équations renferment encore des expressions de forme trop compliquée, on devra recommencer de la même manière, en introduisant une ou plusieurs nouvelles inconnues auxiliaires, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à des équations qui aient le degré voulu de simplicité.

64. Quand on aura procédé au mode de simplification dont nous venons de parler, on devra s'élever successivement aux valeurs des limites des inconnues auxiliaires t, u, $v,\ldots$, qui correspondent aux limites a, b, $c,\ldots$, A, B, C,..., des inconnues primitives x, y, $z,\ldots$; et alors enfin on n'aura plus à résoudre qu'une question semblable à celle que nous avons traitée dans le troisième paragraphe.

65. Dans le travail qui précède, j'ai supposé tacitement qu'il n'était question que de la recherche des solutions *réelles* des équations; je n'ai point mentionné les solutions imaginaires, parce que leur recherche est facile à ramener à celle des premières.

Il est d'ailleurs à peine nécessaire de faire observer que puisqu'il suffit de connaître les signes des quantités que nous avons désignées par L', L'', M', $M'',\ldots$, il suffira de pousser les approximations assez loin pour que les signes de ces quantités ne soient pas douteux.