JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LE VERRIER

Sur les inclinaisons respectives des orbites de Jupiter, Saturne et Uranus ; sur les mouvements des intersections de ces orbites

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 95-109.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__95_0>

SUR LES INCLINAISONS RESPECTIVES

DES

ORBITES DE JUPITER, SATURNE ET URANUS,

ET SUR LES MOUVEMENTS DES INTERSECTIONS DE CES ORBITES.

PAR M. LE VERRIER.

1. Les planètes principales circulent autour du Soleil dans des orbites actuellement peu inclinées, les unes par rapport aux autres, et fort peu excentriques. En sera-t-il toujours ainsi dans les siècles à venir? Les travaux des plus illustres géomètres ont résolu cette question affirmativement. *Les grands axes sont invariables; les excentricités et les inclinaisons ne peuvent qu'osciller entre d'étroites limites*. Les deux parties de cette proposition ne sont pas toutefois démontrées avec la même généralité.

L'invariabilité des grands axes suppose seulement que les masses de Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus, sont très petites par rapport à celle du Soleil, et que leurs moyennes distances ne sont pas entre elles dans des rapports simples; de sorte que sous ce point de vue, la stabilité est démontrée géométriquement pour tous les systèmes dans lesquels les masses des planètes seraient très petites, quels que soient d'ailleurs les rapports de ces masses.

L'éternelle petitesse des excentricités et des inclinaisons serait prouvée avec la même généralité, si toutes les masses étaient sensiblement égales entre elles. Mais comme tel n'est point le cas de notre système planétaire, on est forcé, pour s'assurer que les excentricités et les inclinaisons ne peuvent pas grandir considérablement pour les planètes dou les masses sont les plus petites, d'avoir recours à un calcul numérique dans lequel entrent les rapports des masses; et ainsi la stabilité, à l'égard des excentricités et des inclinaisons, n'est prouvée que pour ces rapports, tels que nous les admettons. Il ne paraît point facile de traiter plus directement cette partie de la question dans toute son étendue. Mais on peut la résoudre dans un cas particulier pour les inclinaisons : c'est ce que nous allons développer.

2. Considérons le système composé des planètes Jupiter, Saturne et Uranus. Désignons par m, m', m'' leurs masses respectives; par φ, φ', φ'' leurs inclinaisons sur l'écliptique à une même époque; et par θ, θ', θ'' les longitudes correspondantes de leurs nœuds ascendants. Posons d'ailleurs

$$\begin{aligned} p &= \operatorname{tang}\varphi \sin\theta, \quad p' = \operatorname{tang}\varphi' \sin\theta', \quad p'' = \operatorname{tang}\varphi'' \sin\theta'', \\ q &= \operatorname{tang}\varphi \cos\theta, \quad q' = \operatorname{tang}\varphi' \cos\theta', \quad q'' = \operatorname{tang}\varphi'' \cos\theta''. \end{aligned}$$

Lorsqu'on connaîtra p, q,....., on calculera φ, θ,..... par les formules

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{p}{q}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \sqrt{p^2 + q^2}.$$

Les valeurs de p, q, p', q', p'', q'' seront données à une époque quelconque par les formules suivantes (*Mécanique céleste*, livre II, § 59) :

$$\left.\begin{aligned} p &= \mathrm{N} \sin(gt+\beta) + \mathrm{N}_1 \sin(g_1 t+\beta_1) + \mathrm{N}_2 \sin\beta_2, \\ q &= \mathrm{N} \cos(gt+\beta) + \mathrm{N}_1 \cos(g_1 t+\beta_1) + \mathrm{N}_2 \cos\beta_2, \\ p' &= \mathrm{N}' \sin(gt+\beta) + \mathrm{N}'_1 \sin(g_1 t+\beta_1) + \mathrm{N}_2 \sin\beta_2, \\ q' &= \mathrm{N}' \cos(gt+\beta) + \mathrm{N}'_1 \cos(g_1 t+\beta_1) + \mathrm{N}_2 \cos\beta_2, \\ p'' &= \mathrm{N}'' \sin(gt+\beta) + \mathrm{N}''_1 \sin(g_1 t+\beta_1) + \mathrm{N}_2 \sin\beta_2, \\ q'' &= \mathrm{N}'' \cos(gt+\beta) + \mathrm{N}''_1 \cos(g_1 t+\beta_1) + \mathrm{N}_2 \cos\beta_2. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

t sera le temps compté en années juliennes. Les coefficients qui entrent dans ces équations sont fournis par les relations

$$\left.\begin{aligned} &[g + (0,1) + (0,2)]\, \mathrm{N} - (0,1)\mathrm{N}' - (0,2)\mathrm{N}'' = 0, \\ &[g + (1,0) + (1,2)]\, \mathrm{N}' - (1,0)\mathrm{N} - (1,2)\mathrm{N}'' = 0, \\ &[g + (2,0) + (2,1)]\, \mathrm{N}'' - (2,0)\mathrm{N} - (2,1)\mathrm{N}' = 0, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$
\left.\begin{aligned}
p_0 &= \mathrm{N}\sin\varepsilon + \mathrm{N}_1\sin\varepsilon_1 + \mathrm{N}_2\sin\varepsilon_2\\
q_0 &= \mathrm{N}\cos\varepsilon + \mathrm{N}_1\cos\varepsilon_1 + \mathrm{N}_2\cos\varepsilon_2,\\
p_0' &= \mathrm{N}'\sin\varepsilon + \mathrm{N}_1'\sin\varepsilon_1 + \mathrm{N}_2\sin\varepsilon_1,\\
q_0' &= \mathrm{N}'\cos\varepsilon + \mathrm{N}_1'\cos\varepsilon_1 + \mathrm{N}_2\cos\varepsilon_2,\\
p_0'' &= \mathrm{N}''\sin\varepsilon + \mathrm{N}_1''\sin\varepsilon_1 + \mathrm{N}_2\sin\varepsilon_2,\\
q_0'' &= \mathrm{N}''\cos\varepsilon + \mathrm{N}_1''\cos\varepsilon_1 + \mathrm{N}_2\cos\varepsilon_2.
\end{aligned}\right\} \quad (3)
$$

Les trois premières de ces relations donnent deux valeurs de g, et des rapports $\frac{\mathrm{N}'}{\mathrm{N}}$ et $\frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{N}}$. Les six autres, dans lesquelles $p_0, p_0', p_0'', q_0, q_0', q_0''$ sont les valeurs initiales de p, p',..... expriment que les formules satisfont à l'état initial du système.

3. Cela posé, occupons-nous spécialement des inclinaisons de deux des orbites sur la troisième; des inclinaisons des orbites de Saturne et d'Uranus à l'égard de celle de Jupiter, et désignons-les par Φ' et Φ''. Écrivons, pour abréger,

$$
\begin{aligned}
p' - p &= \mathrm{P}', & p'' - p &= \mathrm{P}'',\\
q' - q &= \mathrm{Q}', & q'' - q &= \mathrm{Q}'',
\end{aligned}
$$

et nous aurons, à cause de la petitesse des inclinaisons,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tang}\Phi' &= \sqrt{\mathrm{P}'^2 + \mathrm{Q}'^2},\\
\operatorname{tang}\Phi'' &= \sqrt{\mathrm{P}''^2 + \mathrm{Q}''^2}.
\end{aligned}
$$

Φ' et Φ'' seront donc connues à une époque quelconque si l'on connaît P' et Q', P'' et Q''. Or pour calculer ces quantités on déduit des équations (1), retranchées membre à membre, deux à deux, les formules

$$
\left.\begin{aligned}
\mathrm{P}' &= (\mathrm{N}' - \mathrm{N})\sin(gt+\varepsilon) + (\mathrm{N}_1' - \mathrm{N}_1)\sin(g_1t+\varepsilon_1),\\
\mathrm{Q}' &= (\mathrm{N}' - \mathrm{N})\cos(gt+\varepsilon) + (\mathrm{N}_1' - \mathrm{N}_1)\cos(g_1t+\varepsilon_1),
\end{aligned}\right\} \quad (4)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\mathrm{P}'' &= (\mathrm{N}'' - \mathrm{N})\sin(gt+\varepsilon) + (\mathrm{N}_1'' - \mathrm{N}_1)\sin(g_1t+\varepsilon_1),\\
\mathrm{Q}'' &= (\mathrm{N}'' - \mathrm{N})\cos(gt+\varepsilon) + (\mathrm{N}_1'' - \mathrm{N}_1)\cos(g_1t+\varepsilon_1),
\end{aligned}\right\} \quad (5)
$$

Lorsque les coefficients N, N', etc.,... sont calculés pour les masses admises, on en déduit immédiatement des limites supérieures de Φ' et de Φ'', Φ' ne peut jamais dépasser la somme des valeurs absolues des coefficients des sinus qui entrent dans l'expression de P'; Φ'' ne peut jamais dépasser la somme des valeurs absolues des coefficients des sinus qui entrent dans l'expression de P''. Nous nous proposons ici de chercher une expression algébrique de ces limites, indépendamment de tout calcul numérique.

4. Posons

$$\begin{aligned} N' - N &= x, \\ N'' - N &= y; \end{aligned}$$

puis entre ces deux relations et les relations (4) et (5), éliminons N'', N' et N; nous obtiendrons les deux équations

$$\left.\begin{aligned} &[g+(1,0)+(1,2)+(0,1)]\,x + [(0,2)-(1,2)]\,y = 0, \\ &[g+(2,0)+(2,1)+(0,2)]\,y + [(0,1)-(2,1)]\,x = 0. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Entre ces deux dernières éliminons g qui, étant une quantité réelle, ne peut influer que sur la durée des périodes; et si nous écrivons

$$\begin{aligned} (0,1) - (2,1) &= K', \\ (1,2) - (0,2) &= K'', \\ (2,0) - (1,0) &= K, \end{aligned}$$

nous arriverons à la relation

$$K'x^2 + K''y^2 - (-K + K' + K'')\,xy = 0, \quad (7)$$

qui fournira deux valeurs du rapport $\frac{y}{x}$.

Il restera à exprimer que les formules (4) et (5) satisfont à l'état initial du système, ce qui fournira les relations

$$\left.\begin{aligned} P'_0 &= x \sin\mathfrak{G} + x_1 \sin\mathfrak{G}_1, \\ Q'_0 &= x \cos\mathfrak{G} + x_1 \cos\mathfrak{G}_1, \\ P''_0 &= y \sin\mathfrak{G} + y_1 \sin\mathfrak{G}_1, \\ Q''_0 &= y \cos\mathfrak{G} + y_1 \cos\mathfrak{G}_1. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

On connaît $\frac{y}{x}$, $\frac{y_1}{x_1}$. Ces relations ne renferment donc que les quatre inconnues x, x_1, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ qu'elles détermineront complétement; mais cette détermination doit être évitée.

5. Nous remarquerons à cet effet que l'élimination des inconnues $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$, y, y_1 et x_1 entre les équations (8), l'équation (7) et son analogue en x_1 et y_1, conduirait à une équation en x *qui serait du second degré, si elle était débarrassée de tout facteur étranger*. Cette élimination pourrait sans doute s'effectuer; mais nous la simplifierons beaucoup, si nous supposons qu'à l'origine du temps les intersections respectives des trois orbites coïncidaient : hypothèse bien légitime, puisque ce phénomène a eu lieu en l'année 1722, et qu'ainsi les astronomes du commencement du siècle dernier en auraient été les témoins s'ils avaient connu Uranus.

Or, on sait que la coïncidence des trois intersections dont il s'agit entraîne l'égalité des angles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$, pourvu qu'on dispose convenablement des signes de x, x_1, y et y_1. Et ainsi les conditions (8) deviennent

$$\left.\begin{aligned} P'_0 &= (x+x_1)\sin\mathcal{C}, & P''_0 &= (y+y_1)\sin\mathcal{C}, \\ Q'_0 &= (x+x_1)\cos\mathcal{C}, & Q''_0 &= (y+y_1)\cos\mathcal{C}, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

et l'on en déduit

$$\left.\begin{aligned} x+x_1 &= \pm\sqrt{P'^2_0+Q'^2_0} = \pm\,\text{tang}\,\Phi'_0, \\ y+y_1 &= \pm\sqrt{P''^2_0+Q''^2_0} = \pm\,\text{tang}\,\Phi''_0. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Il sera facile de distinguer le signe qu'on devra attribuer au second membre de chacune de ces relations. Si ce sont les nœuds *ascendants* des deux orbites qui coïncident, P'_0 et P''_0 devront être de même signe : il en sera de même de $(x+x_1)$ et $(y+y_1)$, et ainsi il faudra attribuer le même signe à tang Φ'_0 et à tang Φ''_0. Il faudra prendre ces deux tangentes avec des signes contraires si c'est le nœud *ascendant* de l'une des orbites qui coïncide avec le nœud *descendant* de l'autre. C'est ce dernier cas qui se présente actuellement pour les nœuds de Saturne et d'Uranus sur l'orbite de Jupiter. Nous allons toutefois, pour la symétrie des calculs, conserver le signe $+$ aux deux tangentes, et nous changerons le signe de l'une d'elles dans les résultats définitifs seulement.

6. Il résulte des relations (10) que les coefficients des seconds termes des équations finales en x et en y nous sont connus, et que ces équations sont de la forme

$$x^2 - x \operatorname{tang} \Phi'_0 + V = 0, \qquad (11)$$

$$y^2 - y \operatorname{tang} \Phi''_0 + Z = 0. \qquad (12)$$

Les derniers termes V, Z restent seuls à déterminer de manière que les rapports des racines de la première de ces équations à celles de la seconde satisfassent à l'équation (7); et ils devront être donnés par des relations du premier degré, puisque le problème n'est susceptible que d'une seule solution.

Pour obtenir la première de ces relations, on peut éliminer y entre les équations (12) et (7), par l'un des procédés connus. Mais en faisant cette élimination, chaque fois qu'un terme en x^2 se présentera, ayons le soin de le remplacer par sa valeur ($x \operatorname{tang} \Phi'_0 - Z$) prise dans l'équation (11); nous tomberons ainsi sur une équation du premier degré en x, qui devra être identique. Remarquons toutefois qu'il pourrait s'introduire ainsi des solutions étrangères à la question; et effectivement, tandis que le terme en x ne contiendra qu'un coefficient du premier degré en Z et V, le terme indépendant de x sera du second degré par rapport à ces quantités. Nous nous bornerons à la relation qu'on obtient en égalant à zéro le coefficient de x, relation qui est

$$\left.\begin{array}{l} \{[(-K+K'+K'')^2 - 2K'K''] \operatorname{tang} \Phi'_0 - (-K+K'+K'')K'' \operatorname{tang} \Phi''_0\} Z \\ \quad + [(-K+K'+K'')K' \operatorname{tang} \Phi''_0 - 2K'^2 \operatorname{tang} \Phi'_0] V + K'^2 \operatorname{tang}^3 \Phi'_0 \\ \quad - (-K+K'+K'')K' \operatorname{tang}^2 \Phi'_0 \operatorname{tang} \Phi''_0 + K'K'' \operatorname{tang} \Phi'_0 \operatorname{tang}^2 \Phi''_0 \end{array}\right\} = 0.$$

Pour en avoir une seconde, il suffira d'éliminer x comme nous venons de l'indiquer pour y; mais pour écrire le résultat, il n'est pas besoin d'effectuer les calculs. Il suffira de changer dans la relation précédente K', Φ'_0 et V en K'', Φ''_0 et Z, et réciproquement. On obtient ainsi l'équation

$$\left.\begin{array}{l} \{[(-K+K'+K'')^2 - 2K'K''] \operatorname{tang} \Phi''_0 - (-K+K'+K'')K' \operatorname{tang} \Phi'_0\} V \\ \quad + [(-K+K'+K'')K'' \operatorname{tang} \Phi'_0 - 2K''^2 \operatorname{tang} \Phi''_0] Z + K''^2 \operatorname{tang}^3 \Phi''_0 \\ \quad - (-K+K'+K'')K'' \operatorname{tang}^2 \Phi''_0 \operatorname{tang} \Phi'_0 + K'K'' \operatorname{tang} \Phi''_0 \operatorname{tang}^2 \Phi'_0 \end{array}\right\} = 0.$$

On déduit Z et V de ces deux équations avec la plus grande simplicité; car si l'on pose

$$Z = K'H,$$

$$V = K''H,$$

on voit immédiatement que les deux relations précédentes s'accordent à donner pour H la même valeur

$$H = -\frac{K' \tang^2 \Phi'_0 + K'' \tang^2 \Phi''_0 - (-K+K'+K'') \tang \Phi''_0 \tang \Phi'_0}{(-K+K'+K'')^2 - 4K'K''}.$$

D'après ces valeurs de Z et de V, et ce que nous avons dit au n° **3** des limites des inclinaisons, on formera aisément les expressions suivantes :

$$\lim.\tang^2 \Phi' = \tang^2 \Phi'_0 + \frac{4K''[K' \tang^2 \Phi'_0 + K'' \tang^2 \Phi''_0 + (-K+K'+K'') \tang \Phi'_0 \tang \Phi''_0]}{(-K+K'+K'')^2 - 4K'K''},$$

$$\lim.\tang^2 \Phi'' = \tang^2 \Phi''_0 + \frac{4K'[K' \tang^2 \Phi'_0 + K'' \tang^2 \Phi''_0 + (-K+K'+K'') \tang \Phi'_0 \tang \Phi''_0]}{(-K+K'+K'')^2 - 4K'K''},$$

formules dans lesquelles nous avons changé le signe de tang Φ''_0, conformément à ce qui a été dit au n° **5**. Et enfin, en extrayant les racines carrées des deux membres, on trouvera

$$\lim.\tang \Phi' = \frac{(K'+K''-K) \tang \Phi'_0 + 2K'' \tang \Phi''_0}{\sqrt{(K'+K''-K)^2 - 4K'K''}},$$

$$\lim.\tang \Phi'' = \frac{(K'+K''-K) \tang \Phi''_0 + 2K' \tang \Phi'}{\sqrt{(K'+K''-K)^2 - 4K'K''}}.$$

On se convaincra aisément que le dénominateur de ces expressions ne peut jamais être nul.

7. Appliquons ces formules à la détermination des limites des inclinaisons des orbites de Saturne et d'Uranus sur l'orbite de Jupiter.

En adoptant les grands axes de la *Mécanique céleste*, et les masses les plus généralement reçues, nous aurons

$$a = 5{,}201\,166\,36, \quad m = \frac{1}{1050},$$

$$a' = 9{,}537\,870\,90, \quad m' = \frac{1}{3512},$$

$$a'' = 19{,}183\,305\,00, \quad m'' = \frac{1}{17918},$$

et l'on en déduit

$$K' = 5'',976\,289,$$
$$K'' = 0'',285\,788,$$
$$K = -17'',262\,094.$$

Les observations et les calculs les plus exacts fixent d'ailleurs la coïncidence des intersections des trois orbites en l'année 1722. Les formules (9) montrent qu'à l'instant de cette coïncidence, on doit avoir la relation $\frac{P'_0}{P''_0} = \frac{Q'_0}{Q''_0}$, ce qui donne un moyen simple de la reconnaître. Les inclinaisons des trois orbites sur le plan de l'écliptique de 1800 étaient, en 1722, les suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi &= 1^\circ\, 18'\, 57'',09, \\ \varphi' &= 2^\circ\, 29'\, 28'',12, \\ \varphi'' &= 46'\, 31'',68. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} P_0 &= \quad 0,017\,570\,357, & P''_0 &= -0,009\,790\,478, \\ Q'_0 &= -0,013\,077\,251, & Q''_0 &= +0,007\,286\,848, \end{aligned}$$

expressions qui satisfont bien au rapport énoncé. Enfin on en déduit, pour les inclinaisons relatives des orbites, toujours à la même époque,

$$\begin{aligned} \Phi'_0 &= 1^\circ 15'\, 17'',05, \\ \Phi''_0 &= 41'\, 57'',25, \end{aligned}$$

Au moyen de ces données, les limites de Φ' et de Φ'' s'obtiennent en quelques instants, et l'on trouve

$$\begin{aligned} \text{lim. } \Phi' &= 1^\circ\, 16'\, 46'',7, \\ \text{lim. } \Phi'' &= 1^\circ\, 20'\, 42''. \end{aligned}$$

En tenant compte simultanément de toutes les planètes, nous avons trouvé ailleurs lim. $\Phi' = 1^\circ\, 16'\, 46'',8$ et lim. $\Phi'' = 1^\circ\, 20'\, 55''$. La limite est la même pour l'inclinaison de Saturne. Pour l'inclinaison d'Uranus il y a une différence de $13''$ entre les deux limites ; cette différence est due entièrement à l'action de Vénus et de la Terre, que nous négligeons ici.

8. Les quantités K, K′, K″ sont respectivement proportionnelles aux masses de Jupiter, Saturne et Uranus ; il n'entre donc dans les expressions précédentes des limites que les rapports des masses entre elles. Examinons si ces rapports venant à varier il pourrait se faire que les limites des inclinaisons devinssent considérables; et supposons d'abord que la masse de Jupiter restant constante, nous ne fassions varier que les masses de Saturne et d'Uranus.

On pourrait discuter la partie variable des limites sous sa forme générale; mais il vaut mieux attribuer aux deux angles Φ'_0 et Φ''_0 la valeur du plus grand d'entre eux; car nous ne faisons que reculer par là les limites, et nous allons cependant reconnaître qu'elles resteront toujours petites si les inclinaisons primitives sont elles-mêmes peu considérables.

Posons, pour simplifier,

$$\frac{K'}{-K} = z,$$

$$\frac{K''}{-K} = t,$$

et nous trouverons, en supposant que Φ'_0 soit le plus grand des deux angles,

$$\tan^2 \Phi' < \tan^2 \Phi'_0 \left(1 + 4t \frac{2z + 2t + 1}{2z + 2t + 1 + (z - t)^2}\right),$$

$$\tan^2 \Phi'' < \tan^2 \Phi'_0 \left(1 + 4z \frac{2z + 2t + 1}{2z + 2t + 1 + (z - t)^2}\right).$$

Les expressions comprises dans les parenthèses n'ont point de *maximum* absolu; mais lorsqu'on attribue à z, par exemple, une valeur particulière, elles sont susceptibles d'un *maximum* relatif qu'on obtient en faisant $z = t$; et ce *maximum* lui-même est égal à $(1 + 4z)$, en sorte qu'il croît avec la valeur de z.

L'un et l'autre des angles Φ' et Φ'' auront donc une tangente toujours comprise au-dessous de l'expression

$$\tan \Phi'_0 \sqrt{1 + 4z},$$

et dès lors ces angles resteront toujours très petits, tant qu'on ne fera pas grandir énormément les masses de Saturne et d'Uranus. Ainsi, en supposant, par exemple, que la masse de Saturne devienne six fois plus considérable qu'elle ne l'est, il faudrait que la masse d'Uranus grandît de plus de 120 fois sa valeur, pour que z devînt égal à 2. Les angles Φ' et Φ'' resteraient cependant encore toujours plus petits que le triple de la valeur initiale du plus grand d'entre eux.

9. Mais si nous ne pouvons obtenir des masses de Saturne et d'Uranus qui conduisent à des inclinaisons considérables, sans attribuer à ces masses des valeurs qui rendraient le calcul de la première approximation tout-à-fait insuffisant, c'est à la grandeur de la masse de Jupiter que nous le devons. Et si l'on supposait que la masse de Jupiter devînt très petite, il serait alors possible de déterminer les masses des deux autres planètes, de telle sorte que leurs inclinaisons sur l'orbite de la première pussent grandir considérablement. Il n'est pas besoin de dire que cet accroissement des inclinaisons relatives serait dû au mouvement absolu de l'orbite de la plus petite masse.

Cette circonstance d'une masse très petite soumise à l'action de deux autres masses plus considérables et plus éloignées qu'elle du Soleil, se rencontre dans notre système planétaire, et il doit exister entre Jupiter et le Soleil une position telle que si l'on y plaçait une petite masse, dans une orbite d'abord peu inclinée à celle de Jupiter, cette petite masse sortirait de son orbite primitive, et atteindrait de grandes inclinaisons sur le plan de l'orbite de Jupiter, par l'action de cette planète et de Saturne. Déterminons cette position.

Transportons la notation (o) à la planète dont nous cherchons la position; et les notations $'$ et $''$ à Jupiter et à Saturne. Puis supposons le grand axe de la nouvelle planète déterminé par la relation $K' = K''$, ou bien

$$(0,1) + (0,2) = (1,2) + (2,1).$$

Il est facile de voir que cette équation admet toujours une solution unique; car son second membre, en vertu des moyennes distances et des masses de Jupiter et de Saturne a une valeur finie et déterminée; tandis que le premier membre passerait successivement depuis o jusqu'à l'infini, si l'on faisait croître le demi-grand axe a de la planète cherchée depuis zéro jusqu'à la valeur a' du grand axe de Jupiter. La condition $K' = K''$ simplifie les expressions précédentes des limites de Φ' et de Φ''; elles deviennent

$$\text{lim. tang}\,\Phi' = \frac{2K'(\text{tang}\,\Phi'_0 + \text{tang}\,\Phi''_0) - K\,\text{tang}\,\Phi'_0}{\sqrt{K(K-4K')}},$$

$$\text{lim. tang}\,\Phi'' = \frac{2K'(\text{tang}\,\Phi'_0 + \text{tang}\,\Phi''_0) - K\,\text{tang}\,\Phi''_0}{\sqrt{K(K-4K')}}.$$

Ces expressions renferment en dénominateur le facteur $\sqrt{K}$; et comme la quantité K elle-même est proportionnelle à la masse de la nouvelle planète, il s'ensuit qu'il suffira de diminuer suffisamment cette masse pour que les limites ci-dessus se trouvent aussi grandes qu'on le voudra.

On doit au reste remarquer que ce résultat ne prouve pas du tout que la petite planète atteindrait réellement les très grandes inclinaisons qu'on obtiendrait ainsi; mais il montre qu'il y a des cas où l'on ne devrait point, malgré la petitesse primitive des inclinaisons, calculer leurs inégalités séculaires en se bornant aux termes du premier ordre.

On résoudra aisément l'équation

$$(0,1) + (0,2) = (1,2) + (2,1).$$

Elle devient, dans le cas qui nous occupe, et en adoptant les notations de la *Mécanique céleste*, livre II, § 49,

$$-\frac{3}{4} m'n' \sqrt{\alpha} \frac{b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}}{(1-\alpha^2)^2} - \frac{3}{4} m''n'' \sqrt{\alpha'} \frac{b_{-\frac{1}{2}}^{\prime(1)}}{(1-\alpha'^2)^2} = 25'',564\,158.$$

α est le rapport du demi-grand axe de la petite planète au demi-grand axe de Jupiter; α' son rapport au demi-grand axe de Saturne. $b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}$ est une fonction de α; $b_{-\frac{1}{2}}^{\prime(1)}$ est la même fonction de α'. On calcule aisément la valeur de α par le développement en série; et en la multipliant ensuite par a' demi-grand axe de Jupiter, on obtient le demi-grand axe cherché. On trouve ainsi qu'il est à très peu près égal à 1,977.

Nous ne pouvons nous empêcher de remarquer que les planètes dont les demi-grands axes approchent le plus de celui que nous venons d'obtenir sont celles dont les masses sont les plus petites; et qu'il se trouve précisément que leurs inclinaisons sur l'orbite de Jupiter sont considérables.

Entre Vénus et le Soleil, il existe une autre étendue où, en vertu des actions perturbatrices de Vénus et de la Terre, les inclinaisons d'une petite masse pourraient grandir considérablement. Mercure se trouve placé à l'une des extrémités de cette étendue, et ses inclinaisons sont considérables. Elles pourront atteindre près de 9° relativement à l'orbite de Vénus.

10. Reprenons, comme exemple, les deux formules relatives aux inclinaisons de l'orbite de Saturne sur celle de Jupiter,

$$P' = x \sin(gt + 6) + x_1 \sin(g_1 t + 6_1),$$
$$Q' = x \cos(gt + 6) + x_1 \cos(g_1 t + 6_1),$$

et voyons à quel caractère on reconnaîtra s'il est possible ou non que cette inclinaison devienne nulle un jour. Le carré de la tangente, égal à la somme des carrés des deux quantités P' et Q', ne peut être nul, à moins que ces deux quantités ne le soient elles-mêmes chacune séparément; or pour que cette dernière condition pût être remplie, il faudrait que les deux quantités x et x_1 fussent égales en valeurs absolues, puisqu'on sait que les deux arguments g et g_1 sont différents l'un de l'autre. Nous donnerons le moyen de trouver le rapport de ces deux coefficients directement, après avoir indiqué une autre conséquence qu'on en peut déduire.

Les nœuds des trois orbites entre elles ont coïncidé exactement en 1722. Ce fait n'a rien de remarquable en lui-même. Nous avons reconnu qu'il devait se reproduire toutes les fois que les angles qui entrent dans les formules précédentes ne différaient que d'un multiple de la circonférence ou de la demi-circonférence; et comme les arguments g et g_1 ne sont point égaux, cette dernière circonstance doit se représenter périodiquement en vertu de l'excès du mouvement d'un des angles sur l'autre. L'intervalle qui sépare ainsi deux coïncidences successives des trois intersections des orbites est égal au quotient de la demi-circonférence par la différence des arguments g et g_1.

On peut désirer de savoir si l'angle que font entre elles les intersections des orbites de Saturne et d'Uranus avec le plan de l'orbite de Jupiter, croîtra de la demi-circonférence dans l'intervalle d'une coïncidence à l'autre, ou bien s'il exécutera seulement une libration. C'est ce qu'on reconnaîtra très simplement par la détermination du rapport des deux coefficients x et x_1, et du rapport des coefficients correspondants y et y_1 dans les formules relatives aux inclinaisons d'Uranus. Admettons en effet, pour fixer les idées, que les coefficients x et y soient respectivement plus grands en valeurs absolues que x_1 et y_1; il en résultera qu'à toutes les coïncidences, P' et P'' garderont le même signe relatif qu'ils avaient à la première: ce seront donc des nœuds de même espèce qui coïncideront dans tous les cas; et comme, d'ailleurs, les angles Φ' et Φ'' n'auront pu devenir nuls, l'angle des deux nœuds n'aura pu atteindre 180°; il aura exécuté une libration.

Mais si x étant plus grand que x_1, y est au contraire plus petit que y_1, l'angle des deux nœuds exécutera une libration ou une révolution, selon que les sinus des angles des formules auront conservé le même signe relatif ou en auront changé.

Le cas seul où l'un des rapports $\frac{x}{x_1}$ ou $\frac{y}{y_1}$ serait égal à l'unité ne peut donner lieu à aucune conclusion : deux des orbites viennent à coïncider complétement à l'instant de la coïncidence des nœuds.

Cela posé, soit

$$x_1 = zx,$$
$$y_1 = ty;$$

en reprenant l'équation (7) et l'équation analogue pour le système x_1, y_1, nous aurons les deux relations

$$\left.\begin{aligned} &-K + K' + K'' - K'\frac{x}{y} - K''\frac{y}{x} = 0,\\ &-K + K' + K'' - K'\frac{zx}{ty} - K''\frac{ty}{zx} = 0;\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

on tire d'ailleurs des conditions (9), relatives à l'origine du temps,

$$\frac{P'_0}{P''_0} = \frac{x}{y} \times \frac{1+z}{1+t};$$

en tout trois relations entre les trois inconnues $\frac{x}{y}$, z et t.

Si nous éliminons d'abord $\frac{x}{y}$, les équations (15) deviendront

$$\left.\begin{aligned} &-K + K' + K'' - K'\frac{P'_0}{P''_0}\,\frac{1+t}{1+z} - K''\frac{P''_0}{P'_0}\,\frac{1+z}{1+t} = 0,\\ &-K + K' + K'' - K'\frac{P'_0}{P''_0}\frac{z}{t}\frac{1+t}{1+z} - K''\frac{P''_0}{P'_0}\frac{t}{z}\frac{1+z}{1+t} = 0;\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

et pour en déduire z et t d'une manière simple, nous poserons

$$\frac{t}{z} = v, \qquad \frac{1+t}{1+z} = u.$$

Nous arriverons ainsi, pour la détermination de v et u, aux équations

$$\left.\begin{aligned} &v^2 + \left[2 - \frac{(-K + K' + K'')^2}{K'K''}\right] v + 1 = 0, \\ &u = \frac{P''_0}{P'_0}\sqrt{\frac{K''}{K'}v}, \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

L'équation en v est réciproque, et l'on devait s'y attendre; il suffira de prendre une de ses racines : celle qui est plus grande que l'unité, par exemple.

Nous n'avons point donné le double signe à la valeur de u; c'est qu'elle devra toujours avoir le même signe que le rapport $\frac{P''_0}{P'_0}$, ainsi que le montre la première des équations (15), $-K$, K', K'' étant des quantités essentiellement positives.

Ayant d'ailleurs les valeurs de v et u, on calculera z et t par les formules

$$z = \frac{u-1}{v-u},$$
$$t = \frac{v(u-1)}{v-u}.$$

Si nous appliquons ces résultats aux mouvements des orbites de Saturne et d'Uranus par rapport à l'orbite de Jupiter, au moyen des données établies plus haut, nous trouverons

$$v = 322{,}00, \qquad z = -0{,}009\,829,$$
$$u = -2{,}1865, \quad t = -3{,}165,$$

et nous en concluons, conformément à ce que nous avons dit : 1° *que l'angle des deux nœuds sur l'orbite de Jupiter peut croître au-delà de toute limite;* 2° *que ni le plan de l'orbite de Saturne ni celui de l'orbite d'Uranus ne coïncideront jamais avec le plan de l'orbite de Jupiter.*

Pour résoudre la même question pour l'angle des intersections des orbites de Jupiter et d'Uranus avec le plan de l'orbite de Saturne, il n'y a qu'à reprendre les mêmes calculs en changeant seulement K en K′ et réciproquement, et en remplaçant P'_0 et P''_0 par $(p_0 - p'_0)$ et $(p''_0 - p'_0)$. On trouve ainsi

$$v = -108,78, \qquad z = -0,009\,829,$$
$$u = \quad 2,0898, \qquad t = +1,069.$$

z a la même valeur que dans le cas précédent, parce qu'elle ne dépend toujours que du mouvement relatif des deux orbites de Saturne et de Jupiter.

Quant à t, nous voyons qu'il est très voisin de l'unité, et qu'ainsi nous sommes dans l'impossibilité de prononcer si l'angle en question parcourra la demi-circonférence tout entière. Cette difficulté tient à ce que les orbites de Saturne et d'Uranus peuvent s'abaisser très sensiblement dans le même plan. Nous nous sommes assurés, toutefois, que les variations les plus grandes qu'on pourrait attribuer aux masses que nous avons admises, ne pourraient abaisser t au-dessous de l'unité; en sorte qu'on pourrait encore affirmer ici que l'angle que nous considérons parcourra toute la demi-circonférence; mais il serait bien possible que la seconde approximation changeât ce résultat, et il faut s'abstenir de toute conclusion.

On retrouverait dans le mouvement des nœuds sur l'orbite d'Uranus la même valeur de t, et conséquemment la même difficulté. z serait égal à $-2,7$, c'est-à-dire plus grand que l'unité, en valeur absolue, tandis que dans le cas précédent, il était plus petit. Il en résulte que s'il n'est pas possible de décider qu'il y aura libration ou mouvement progressif de l'angle des nœuds sur l'une des deux orbites de Saturne ou d'Uranus, on peut toutefois affirmer *que le premier phénomène se produira toujours sur l'une des orbites, et le second sur l'autre.*

Le mouvement des nœuds des orbites a été étudié d'une manière spéciale dans un Mémoire que M. Liouville a inséré au mois de décembre 1839, dans ce recueil. On peut voir que nos résultats s'accordent complétement avec ceux qu'il y a consignés. Il est essentiel de remarquer qu'ils sont indépendants de toute considération sur la durée des périodes.