JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEJEUNE-DIRICHLET

Extrait d'une lettre de M. Lejeune-Dirichlet à M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 72-74.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__72_0>

EXTRAIT

D'UNE

LETTRE DE M. LEJEUNE-DIRICHLET A M. LIOUVILLE.

« En voyant dans votre Journal l'élégante traduction que M. Terquem a bien voulu faire de mon *Mémoire sur la progression arithmétique* [*], j'ai eu l'idée d'étendre la même analyse aux formes quadratiques. En combinant cette analyse avec les considérations ingénieuses que M. Gauss développe dans les derniers numéros de sa cinquième section, on prouve non-seulement que toute forme quadratique renferme une infinité de nombres premiers, mais encore qu'elle en contient qui soient d'une forme linéaire quelconque compatible avec la forme quadratique donnée.

» Je me suis aussi beaucoup occupé dans ces derniers temps à étendre aux formes quadratiques à coefficients et indéterminées complexes, c'est-à-dire de la forme $t + u\sqrt{-1}$, les théorèmes qui ont lieu dans les cas ordinaires des entiers réels. Si l'on cherche en particulier à obtenir le nombre des formes quadratiques différentes qui existent dans cette hypothèse pour un déterminant donné, on arrive à ce résultat assez remarquable, que le nombre dont il s'agit dépend de la division de la lemniscate, de même que dans le cas des formes réelles et à déterminant positif, il se rattache à la section du cercle. Ce qui m'a surtout fait plaisir dans ce travail, c'est le parti qu'on y tire de considérations géométriques et particulièrement de la théorie des propriétés perspectives des figures. Au moyen de cet auxiliaire, la question qui d'abord, et considérée d'une manière purement analytique, paraît extrêmement compliquée, devient presque aussi simple que lorsqu'il s'agit de déterminants réels.

[*] Tome IV de ce Journal, page 393.

» Les recherches dont je viens de vous indiquer l'objet, m'ont conduit à un théorème remarquable par sa simplicité et qui ne paraît pas sans importance pour la théorie des équations indéterminées des degrés supérieurs au second, matière encore très peu cultivée. Voici en quoi consiste ce théorème.

« Si l'équation

$$(1) \qquad s^n + as^{n-1} + \ldots + gs + h = 0,$$

» à coefficients entiers, n'a pas de diviseur rationnel, et si parmi ses » racines α, β,... ω, il y en a au moins une qui soit réelle, je dis que » l'équation indéterminée

$$(2) \qquad F(x, y, \ldots z) = \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\ldots\varphi(\omega) = 1,$$

» où l'on a posé pour abréger,

$$\varphi(\alpha) = x + \alpha y + \ldots + \alpha^{n-1}z,$$

» a toujours une infinité de solutions entières. »

» Pour établir ce théorème, il faut d'abord faire voir qu'il existe au moins un entier m tel que l'équation

$$(3) \qquad F(x, y, \ldots z) = m$$

ait une infinité de solutions. C'est à quoi l'on peut parvenir par différents moyens. Dans le cas du second degré, la chose, qui pour ce cas n'est pas nouvelle, résulte immédiatement des propriétés des fractions continues.

» L'équation (3) ayant une infinité de solutions, il en existera deux telles que l'on ait

$$F(x, y, \ldots z) = m, \quad F(x', y', \ldots z') = m,$$

et en même temps,

$$(4) \qquad x \equiv x', \quad y \equiv y', \ldots z \equiv z' \ (\text{mod. } m).$$

Cela posé, si nous considérons la fraction

$$\frac{x' + \alpha y' + \ldots + \alpha^{n-1} z'}{x + \alpha y + \ldots + \alpha^{n-1} z},$$

on pourra évidemment [en multipliant par $\varphi(\beta)\ldots\varphi(\omega)$] lui donner la forme

$$\frac{X + \alpha Y + \ldots + \alpha^{n-1} Z}{m},$$

où X, Y,... Z sont des fonctions entières et à coefficients entiers de x, $y,\ldots z$, $x', y',\ldots z'$. Je dis maintenant que X, Y,... Z sont des multiples de m. Pour le faire voir, admettons pour un instant que dans ces expressions $x', y',\ldots z'$ soient changés en $x, y,\ldots z$, changement par lequel X, Y,... Z resteront, en vertu des congruences (4), congrus à eux-mêmes. Par le changement dont il s'agit, $X + \alpha Y + \ldots + \alpha^{n-1} Z$ doit devenir égal à m, ce qui ne peut arriver [l'équation (1) n'ayant pas de diviseurs rationnels] qu'autant que X, Y,... Z deviennent respectivement m, o,... o. Donc X, Y,... Z sont divisibles par m, et la fraction considérée plus haut est

$$\xi + \alpha\eta + \ldots + \alpha^{n-1}\zeta$$

($\xi, \eta,\ldots \zeta$ étant des entiers), d'où l'on conclut

$$F(\xi, \eta,\ldots \zeta) = 1,$$

solution qui en fournira une infinité d'autres.

»Parmi les conséquences nombreuses qu'on peut tirer de ce théorème, il y en a une qui se présente pour ainsi dire d'elle-même et consiste en ce que les fonctions que Lagrange a d'abord considérées dans les *Mémoires de Berlin*, et plus tard, dans les *Additions à l'Algèbre* d'Euler, et qui se reproduisent par la multiplication, si elles peuvent obtenir une certaine valeur, sont dès lors susceptibles de la même valeur pour une infinité de systèmes de valeurs des indéterminées $x, y,\ldots z$, en supposant toutefois que l'équation algébrique d'où ces fonctions tirent leur origine satisfasse aux conditions ci-dessus énoncées.»