JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V.-A. LEBESGUE

Sommation de quelques séries

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 42-71.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__42_0>

SOMMATION DE QUELQUES SÉRIES;

PAR V.-A. LEBESGUE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Dans un Mémoire sur certaines séries singulières, M. Gauss a donné l'expression générale des sommes

$$\sum_{i=0}^{i=p-1} \sin i^2 \frac{2h\pi}{p}, \quad \sum_{i=0}^{i=p-1} \cos i^2 \frac{2h\pi}{p}, \qquad (\mathrm{A})$$

dans l'hypothèse de p premier à h. Depuis, M. Dirichlet, dans le Journal de M. Crelle, a traité par un moyen tout différent et non moins remarquable les sommes

$$\sum \sin i^2 \frac{2\pi}{p}, \quad \sum \cos i^2 \frac{2\pi}{p}, \qquad (\mathrm{B})$$

qui reviennent aux sommes (A), ou n'en diffèrent que par le signe.

La question est donc complétement résolue, et si j'en parle encore, c'est surtout pour donner un procédé fort simple pour trouver le signe des sommes (A), celui de M. Gauss devenant d'autant plus long que p contient plus de facteurs premiers différents; tandis qu'en employant l'ingénieux procédé de calcul par lequel M. Gauss reconnaît si un nombre est résidu ou non-résidu quadratique d'un nombre premier donné, il n'est aucunement nécessaire de distinguer le cas de p nombre premier, de celui de p nombre composé [*]. D'ailleurs quand p et h ont d pour plus grand commun diviseur, en posant

$$p = p'd, \quad h = h'd,$$

on trouve de suite

[*] L'algorithme en question a paru dans un Mémoire postérieur à celui cité plus haut. Ce Mémoire renferme les 5e et 6e démonstrations de *la Loi de réciprocité* de Legendre.

$$\sum_{i=0}^{i=p-1} \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = d \sum_{i=0}^{i=p'-1} \sin i^2 \frac{2h'\pi}{p'},$$

$$\sum_{i=0}^{i=p-1} \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = d \sum_{i=0}^{i=p'-1} \cos i^2 \frac{2h'\pi}{p'},$$

de sorte que l'expression générale des sommes (A) où h et p ont le plus grand commun diviseur d, se trouve être $a\sqrt{pd}$, le coefficient a étant o, 1 ou -1.

Il suit de là qu'au moyen des formules qui donnent $\sin^m z$ et $\cos^m z$ développés suivant les sinus et cosinus des multiples de z, on trouvera de suite les sommes

$$\sum \sin^m i^2 \frac{2h\pi}{p}, \qquad \sum \cos^m i^2 \frac{2h\pi}{p},$$

et c'est là, ce semble, le moyen le plus direct de former les équations dont les racines sont $\sin i^2 \frac{2h\pi}{p}$, ou $\cos i^2 \frac{2h\pi}{p}$, le nombre i prenant les valeurs o, 1, 2,... $p-1$.

Je fais précéder cette recherche de la détermination des sommes

$$\left.\begin{array}{lr}
\sum \sin \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = 0, & p = 2q, \\[2ex]
\left.\begin{array}{l}
\sum \cos \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = \pm \sqrt{p} \sin \frac{p-1}{4} \cdot \frac{h\pi}{p} \\
\sum \sin \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = \pm \sqrt{p} \cos \frac{p-1}{4} \cdot \frac{h\pi}{p}
\end{array}\right\} & p = 4q+1, \\[4ex]
\left.\begin{array}{l}
\sum \sin \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = \pm \sqrt{p} \cos \frac{p+1}{4} \cdot \frac{h\pi}{p} \\
\sum \cos \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = \pm \sqrt{p} \sin \frac{p+1}{4} \cdot \frac{h\pi}{p}
\end{array}\right\} & p = 4q-1.
\end{array}\right\} \quad (C)$$

Dans ces formules où h est supposé premier à p, l'ambiguité du signe se lève comme pour les sommes (A).

I.

La détermination des sommes

$$\sum \sin \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p}, \quad \sum \cos \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p},$$

prises depuis $i=0$, jusqu'à $i=p-1$, dépend d'une formule remarquable due à M. Gauss, qui l'a donnée dans son Mémoire : *Summatio serierum quarumdam singularium.* Comm. Got., v. I; an 1808-1811 [*].

Pour l'obtenir, considérons l'équation

$$f(z)=\theta(z).f[\varphi(z)],$$

où f, θ et φ sont des caractéristiques de fonctions. Pour abréger, nous supprimerons les parenthèses dans les fonctions φ, et nous écrirons

$$\begin{aligned}\varphi(\varphi z)&=\varphi^2 z,\\ \varphi[\varphi(\varphi z)]&=\varphi(\varphi^2 z)=\varphi^3 z,\\ \varphi\{\varphi[\varphi(\varphi z)]\}&=\varphi(\varphi^3 z)=\varphi^4 z,\\ &\text{etc., etc.}\end{aligned}$$

Nous aurons donc la suite d'équations

$$\begin{aligned}f(z)&=\theta(z)f(\varphi z),\\ f(\varphi z)&=\theta(\varphi z)f(\varphi^2 z),\\ f(\varphi^2 z)&=\theta(\varphi^2 z)f(\varphi^3 z),\\ &\vdots\\ f(\varphi^{n-1}z)&=\theta(\varphi^{n-1}z)f(\varphi^n z),\end{aligned}$$

et si les fonctions $f(z)$ et $\theta(z)$ restent finies ou convergentes quand on donne à z les valeurs

$$z,\ \varphi z,\ \varphi^2 z,\ldots\ \varphi^n z,$$

nous pourrons multiplier membre à membre les équations précédentes, et de là

$$(a)\qquad f(z)=f(\varphi^n z).\theta(z).\theta(\varphi z).\theta(\varphi^2 z)\ldots\theta(\varphi^{n-1}z).$$

Supposons maintenant que pour une certaine valeur de n, $f(\varphi^n z)$ prenne une valeur constante déterminée, et que de plus les fonctions

[*] J'emprunte cette citation à la page 186 des *Fund. nova Funct. ellipt.* La formule en question désignée plus loin sous la lettre (f), ne se trouve point dans le Mémoire particulier que M. Gauss a publié sous le même titre.

f et θ ne prennent qu'une seule valeur pour une valeur déterminée de z, l'équation précédente fera connaître $f(z)$ sans aucune ambiguité.

Admettons, par exemple, que pour $n = \infty$, $\varphi^n z$ prenne une valeur constante a, on aura ainsi

$$(b) \qquad f(z) = f(a).\theta(z).\theta(\varphi z).\theta(\varphi^2 z).\theta(\varphi^3 z)\ldots$$

S'il arrive que $f(a)$ ne puisse pas se tirer facilement de $f(z)$, mais qu'il soit aisé de déterminer $f(b)$, on posera $z = b$ dans l'équation précédente, et l'on aura

$$f(b) = f(a).\theta(a).\theta(\varphi a).\theta(\varphi^2 a)\ldots,$$

et par suite

$$(c) \qquad f(z) = f(b)\frac{\theta(z).\,\theta(\varphi z).\theta(\varphi^2 z).\,\theta(\varphi^3 z)\ldots}{\theta(a).\theta(\varphi a).\theta(\varphi^2 a).\,\theta(\varphi^3 a)\ldots}.$$

Pour appliquer cette formule, considérons la fonction

$$f(z) = 1 + q\,\frac{1-z}{1-q} + q^3\,\frac{1-z}{1-q}.\frac{1-qz}{1-q^2} + q^6\,\frac{1-z}{1-q}.\frac{1-qz}{1-q^2}.\frac{1-q^2z}{1-q^3} + \ldots$$

qui a pour terme général

$$q^{\frac{n.n+1}{2}}.\frac{1-z}{1-q}.\frac{1-qz}{1-q^2}.\frac{1-q^2z}{1-q^3}\ldots\frac{1-q^{n-1}z}{1-q^n}.$$

Si l'on y change z en $q^2 z$, et qu'ensuite on multiplie par $1-qz$, on trouvera

$$q^{\frac{n.n+1}{2}}.\frac{1-qz}{1-q}.\frac{1-q^2z}{1-q^2}\ldots\frac{1-q^nz}{1-q^n}(1-q^{n+1}z).$$

Séparant les deux termes qui résultent de la multiplication par $1-q^{n+1}z$, il vient

$$q^{\frac{n.n+1}{2}}.\frac{1-qz}{1-q}\ldots\frac{1-q^nz}{1-q^n} - q.z^{\frac{n+1.n+2}{2}}.\frac{1-qz}{1-q}\ldots\frac{1-q^nz}{1-q^n}.$$

Décomposant ainsi chaque terme du produit $(1-qz)f(q^2z)$, et réunissant la deuxième partie d'un terme à la première du suivant, on trouvera pour terme général,

$$-z.q^{\frac{n+1.n+2}{2}}\cdot\frac{1-qz}{1-q}\cdots\frac{1-q^nz}{1-q^n}+q^{\frac{n+1.n+2}{2}}\cdot\frac{1-qz}{1-q}\cdots\frac{1-q^{n+1}z}{1-q^{n+1}},$$

ou en réduisant

$$q^{\frac{n+1.n+2}{2}}\cdot\frac{1-z}{1-q}\cdot\frac{1-qz}{1-q^2}\cdots\frac{1-q^nz}{1-q^{n+1}},$$

qui est un terme de $f(z)$; on a donc

$$f(z)=(1-qz)f(q^2z).$$

Pour transformer $f(z)$ au moyen de la formule (c), on posera

$$\varphi(z)=q^2z,$$

d'où l'on tirera

$$\varphi z=q^2z,\ \varphi^2z=q^4z,\ \varphi^3z=q^6z\ldots.\varphi^nz=q^{2n}z,$$
$$\theta(z)=1-qz,\ \theta(\varphi z)=1-q^3z,\ \theta(\varphi^2z)=1-q^5z\ldots\theta(\varphi^{n-1}z)=1-q^{2n-1}z,$$

et par conséquent il viendra

$$(d)\qquad f(z)=f(q^{2n}z)(1-qz)(1-q^3z)(1-q^5z)\ldots(1-q^{2n-1}z).$$

Pour $n=\infty$, on a $q^{2n}z=0$ si la valeur absolue (ou plus généralement le module) de q est <1. Donc

$$(e)\qquad f(z)=f(0)(1-qz)(1-q^3z)(1-q^5z)\ldots$$

Posant $z=1$, on trouvera, à cause de $f(1)=1$,

$$1=f(0)(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots$$

et par suite

$$f(z)=\frac{1-qz}{1-q}\cdot\frac{1-q^3z}{1-q^3}\cdot\frac{1-q^5z}{1-q^5}\cdots$$

ou bien

$$(f)\qquad \frac{1-qz}{1-q}\cdot\frac{1-q^3z}{1-q^3}\cdot\frac{1-q^5z}{1-q^5}\cdots = 1+q\frac{1-z}{1-q}+q^3\frac{1-z}{1-q}\cdot\frac{1-qz}{1-q^2}+\ldots,$$

ce qui est précisément la formule de M. Gauss.

Pour $z=q$, elle se réduit à

$$(g)\qquad \frac{1-q^2}{1-q}\cdot\frac{1-q^4}{1-q^3}\cdot\frac{1-q^6}{1-q^5}\cdots = 1+q+q^3+q^6+q^{10}+\ldots+q^{\frac{k.k+1}{2}}+\ldots,$$

équation fort remarquable qui conduit à différents théorèmes sur les nombres triangulaires et sur les nombres carrés.

Quand on choisit une valeur de z qui rende nulle une des quantités $1-qz$, $1-q^2z,\ldots$ $1-q^mz$, par exemple si l'on fait $z=q^{-m}$, la formule $f(z)$ devient de forme finie, son dernier terme se tirant de

$$q^{\frac{m.m-1}{2}}\cdot\frac{1-z}{1-q}\cdot\frac{1-qz}{1-q^2}\cdots\frac{1-q^{m-1}z}{1-q^m},$$

où il faut faire $z=q^{-m}$, ce qui donne

$$q^{\frac{m.m+1}{2}}\cdot\frac{1-q^{-m}}{1-q}\cdot\frac{1-q^{-m+1}}{1-q^2}\cdots\frac{1-q^{-1}}{1-q^m},$$

tous les termes suivants étant nuls à cause du facteur $1-q^0=0$, qui entre dans leurs numérateurs.

L'équation (f) devient alors

$$(h)\left\{\begin{aligned}&1+q\frac{1-q^{-m}}{1-q}+q^3\frac{1-q^{-m}}{1-q}\cdot\frac{1-q^{-m+1}}{1-q^2}\cdots+q^{\frac{m.m+1}{2}}\cdot\frac{1-q^{-m}}{1-q}\cdot\frac{1-q^{-m+1}}{1-q^2}\cdots\frac{1-q^{-1}}{1-q^m}\\ &=f(q^{2n-m})(1-q^{-m+1})(1-q^{-m+3})\ldots(1-q^{-m+2n-1}).\end{aligned}\right.$$

Il se présente ici deux cas.

Soit $m+1=p$ un nombre pair; en posant $m+1=2n$, le facteur $1-q^{-m+2n-1}$ deviendra nul, ainsi le premier membre de l'équation sera nul. C'est en effet ce que l'on vérifie directement, car le dernier terme détruit le premier, l'avant-dernier détruit le deuxième, et ainsi de suite, jusqu'aux deux termes moyens qui se détruisent également.

On a donc identiquement pour m impair,

$$(i)\quad 1+q\frac{1-q^{-m}}{1-q}+q^3\frac{1-q^{-m}}{1-q}\cdot\frac{1-q^{-m+1}}{1-q^2}+\ldots+q^{\frac{m(m+1)}{2}}\cdot\frac{1-q^{-m}}{1-q}\cdots\frac{1-q^{-1}}{1-q^m}=0.$$

Si dans cette identité on fait $\quad q^{-m}=q,$

d'où $\quad q^{m+1}=q^p=1,$

et par suite $\quad q=\cos\frac{2h\pi}{p}+\sin\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1},$

en ayant soin de prendre h premier à p, aucun des facteurs

$$1-q,\ 1-q^2,\ldots 1-q^m=1-q^{p-1}$$

ne deviendra nul, et l'équation (i) prendra la forme

$$(k)\qquad 1+q+q^3+q^6+\ldots+q^{\frac{p-1.p}{2}}=0,$$

ou bien encore

$$(l)\qquad \sum\left(\cos\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}+\sin\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1}\right)=0,$$

d'où résulte, par conséquent, pour p pair premier à h,

$$(m)\qquad \sum\cos\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}=\sum\sin\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}=0,$$

les sommes étant prises de $i=0$ à $i=p-1$.

Soit maintenant $m+i=p$ un nombre impair, m sera pair, et si l'on pose $m=2n$, comme $f(q^0)=f(1)=1$, l'équation (h) deviendra

$$(n)\begin{cases} 1+q\frac{1-q^{-m}}{1-q}+q^3\frac{1-q^{-m}}{1-q}.\frac{1-q^{-m+1}}{1-q^2}+\ldots+q^{\frac{m.m+1}{2}}.\frac{1-q^{-m}}{1-q}.\frac{1-q^{-m+1}}{1-q^2}\cdots\frac{1-q^{-1}}{1-q^m}\\ =(1-q^{-m+1})(1-q^{-m+3})\ldots(1-q^{-1}).\end{cases}$$

Et si l'on pose encore $\quad q=q^{-m},$

d'où $\quad q^{m+1}=q^p=1,$

on obtiendra

$$(o) \quad 1+q+q^3+q^6+\ldots+q^{\frac{p-1.p}{2}}=(1-q^{-p+2})(1-q^{-p+4})\ldots(1-q^{-1}).$$

Comme l'on a $q=\cos\frac{2h\pi}{p}+\sin\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1}$, en supposant h premier à p, on pourra transformer l'équation (o). D'abord le premier membre deviendra

$$\sum\cos\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}+\sum\sin\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1};$$

puis, comme l'on a

$$\begin{aligned} 1-q^{-a} &= 1-\cos\frac{2ah\pi}{p}+\sin\frac{2ah\pi}{p}\sqrt{-1} \\ &= 2\sqrt{-1}.\sin\frac{ah\pi}{p}\left(\cos\frac{ah\pi}{p}-\sin\frac{ah\pi}{p}\sqrt{-1}\right), \end{aligned}$$

si l'on fait successivement $a=1,\ 3,\ 5\ldots\ p-2$, dont la somme est $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$, on trouvera pour le cas de $p=4q+1$,

$$\sum\cos\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}+\sum\sin\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1}=$$
$$2^{\frac{p-1}{2}}\sin\frac{h\pi}{p}\sin 2\frac{h\pi}{p}\sin 3\frac{h\pi}{p}\ldots\ldots\sin\frac{p-1}{2}.\frac{2h\pi}{p}\left(\cos q\frac{h\pi}{p}+\sin q\frac{h\pi}{p}\sqrt{-1}\right),$$

au moyen de quelques transformations qui se présentent d'elles-mêmes.

Et pour le cas de $p=4q-1$, on trouvera pareillement

$$\sum\cos\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}+\sum\sin\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1}=$$
$$2^{\frac{p-1}{2}}\sin\frac{h\pi}{p}\sin 2\frac{h\pi}{p}\sin 3\frac{h\pi}{p}\ldots\ldots\sin\frac{p-1}{2}.\frac{2h\pi}{p}\left(\sin q\frac{h\pi}{p}+\cos q\frac{h\pi}{p}\sqrt{-1}\right).$$

Posant donc $\quad \mathrm{P}=2^{\frac{p-1}{2}}\sin\frac{h\pi}{p}\sin 2\frac{h\pi}{p}\ldots\sin\frac{p-1}{2}.\frac{h\pi}{h},$

on aura pour $p=4q+1$,

$$\sum\cos\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}=\mathrm{P}\cos q\frac{h\pi}{p},\quad \sum\sin\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}=\mathrm{P}\sin q\frac{h\pi}{p};$$

et pour $p=4q-1$,

$$\sum \cos \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = \mathrm{P} \sin q \frac{h\pi}{p}, \quad \sum \sin \frac{i^2+i}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = \mathrm{P} \cos q \frac{h\pi}{p}.$$

Cherchons maintenant quelle est la valeur du produit

$$\mathrm{P} = 2^{\frac{p-1}{2}} \sin \frac{p}{h\pi} \sin 2\frac{h\pi}{p} \sin 3\frac{h\pi}{p} \ldots \sin \frac{p-1}{p} \cdot \frac{h\pi}{p},$$

où h est premier à p.

Posons, en général, $$ah = p\mathrm{Q}_a + r_a,$$

d'où

$$a\frac{h}{p} = \mathrm{Q}_a + \frac{r_a}{p}, \sin a\frac{h\pi}{p} = \sin\left(\mathrm{Q}_a \cdot \pi + \frac{r_a}{p}\pi\right) = (-1)^{\mathrm{Q}_a} \sin \frac{r_a\pi}{p};$$

or, parmi les restes $r_1, r_2, r_3, \ldots r_{\frac{p-1}{2}}$, se trouvent: 1° des nombres positifs $< \frac{p}{2}$; 2° des nombres positifs $> \frac{p}{2}$ et que l'on peut remplacer par $p - \rho_a, p - \rho_b, p - \rho_c, \ldots$ où $\rho_a, \rho_b, \rho_c, \ldots$ sont $< \frac{p}{2}$; ces nombres ρ_a, $\rho_b \ldots$ forment avec ceux énoncés en 1°, la suite $1, 2, 3, \ldots \frac{p-1}{2}$: de plus

$$\frac{r_a\pi}{p} = \frac{(p-\rho_a)\pi}{p} = \pi - \frac{\rho_a\pi}{p}$$

donne

$$\sin \frac{r_a\pi}{p} = \sin \frac{\rho_a\pi}{p};$$

on aura donc finalement

$$\mathrm{P} = (-1)^{\mathrm{Q}_1+\mathrm{Q}_2+\ldots+\mathrm{Q}_{\frac{p-1}{2}}} \; 2^{\frac{p-1}{2}} \sin \frac{\pi}{p} \sin 2\frac{\pi}{p} \ldots \sin \frac{p-1}{p} \cdot \frac{\pi}{2},$$

où tous les facteurs sont positifs, sauf celui-ci $(-1)^{\mathrm{Q}_1+\mathrm{Q}_2+\ldots+\mathrm{Q}_{\frac{p-1}{2}}}$ qui est $+1$ ou -1, selon que $\mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2 + \ldots + \mathrm{Q}_{\frac{p-1}{2}} = \sigma$ est pair ou impair, ce qu'on trouve par la règle suivante, due à M. Gauss:

« Faites sur p et h premiers entre eux l'opération du plus grand com-
» mun diviseur, et soient $q, r, s, t, \ldots v, 1$ les restes successifs; soient p', h',
» $q', r', \ldots v'$ les plus grands nombres ne surpassant pas $\frac{p}{2}, \frac{h}{2}, \frac{q}{2} \ldots \frac{v}{2}$; les

» quotients successifs donnés par l'opération du plus grand commun » diviseur étant α, β,... λ, μ, écrivez ainsi les deux suites

$$\text{(I)} \qquad p',\ h',\ q',\ r',\ s',\ldots\ u',\ v',$$
$$\text{(II)} \qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots\ \lambda,\ \mu.$$

» Soient, dans la série (I), i le nombre des termes impairs suivis de termes » aussi impairs; et J celui de quotients impairs de la série (II) au-dessus » desquels se trouvent, dans la série (I), des nombres de forme $4k+1$ ou » $4k+2$; la somme $\sigma = Q_1 + Q_2 + \ldots\left[= e\left(\frac{h}{p}\right) + e\left(\frac{2h}{p}\right)\ldots + e\left(\frac{p'h}{p}\right)\right.$, » suivant la notation de M. Gauss] sera paire ou impaire en même » temps que $i+\mathrm{J}$.»

Pour la démontrer, on peut consulter le tome III de ce Journal, page 140.

Le signe de P étant déterminé, il faut en avoir la valeur absolue; or l'identité

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = \left(x^2 - 2x\cos\frac{2\pi}{p} + 1\right)\left(x^2 - 2x\cos\frac{4\pi}{p} + 1\right)\ldots\left(x^2 - 2x\cos\frac{\overline{p-1}.\pi}{p} + 1\right),$$

donne, en y posant $x=1$, à cause de $2 - 2\cos\frac{2a\pi}{p} = 4\sin^2\frac{a\pi}{p}$,

$$p = 2^{p-1}\sin^2\frac{\pi}{p}\sin^2.2\frac{\pi}{p}\sin^2.3\frac{\pi}{p}\ldots\sin^2\frac{p-1}{2}.\frac{\pi}{p};$$

d'où, par l'extraction de la racine carrée,

$$\sqrt{p} = 2^{\frac{p-1}{2}}\sin\frac{\pi}{p}\sin 2\frac{\pi}{p}\ldots\sin\frac{p-1}{2}.\frac{\pi}{p}.$$

Telle est la valeur absolue de P. Quant au facteur $(-1)^\sigma$ qui donne le signe, nous le représenterons par le symbole (h, p) pour rappeler la manière dont il dépend de p et h.

Pour avoir les valeurs des sommes $\sum\sin\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}$, $\sum\cos\frac{i^2+i}{2}.\frac{2h\pi}{p}$, pour le cas de h et p non premiers entre eux, nous représenterons par d leur plus grand commun diviseur, et nous ferons

$$h = h'd,\quad p = p'd,\quad \text{d'où}\quad \frac{2h\pi}{p} = \frac{2h'\pi}{p'},$$

h' et p' étant premiers entre eux. La supposition $i = kp' + i'$ donnera

$$\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p} = \left[\tfrac{1}{2}p'k(kp'+2i+1) + \frac{i'^2+i'}{2}\right]\frac{2h'\pi}{p'}.$$

Or dans cet arc on peut négliger les multiples de 2π; on écrira donc seulement

$$k(kp'+1)h'\pi + \frac{i'^2+i'}{2}\cdot\frac{2h'\pi}{p'}.$$

1°. Pour p' impair, $k(kp'+1)h'\pi$ se réduit à $k.k+1.h'\pi$, qu'on peut supprimer puisque $k.k+1$ est pair. L'arc se réduira donc à $\frac{i'^2+i'}{2}\cdot\frac{2h'\pi}{p}$; on aura par conséquent

$$\sum \sin\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p} = d\sum \sin\frac{i'^2+i'}{2}\cdot\frac{2h'\pi}{p'},$$
$$\sum \cos\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p} = d\sum \cos\frac{i'^2+i'}{2}\cdot\frac{2h'\pi}{p'},$$

les sommes des premiers membres étant prises de o à $p-1$, et les autres de o à $p'-1$.

2°. Pour p' pair et par suite h' impair, la partie $k(kq'+1)h'\pi$ se réduit à $k\pi$, qui pourra être négligée si k est pair; mais si k est impair, les sinus et cosinus changeront de signe. Il suit de là que pour d pair les deux sommes sont nulles, et que pour d impair elles se réduisent aux sommes $\sum \sin\frac{i'^2+i}{2}\frac{2h'\pi}{p'}$ et $\sum\cos\frac{i'^2+i'}{2}\frac{2h'\pi}{p'}$, prises de $i'=$o à $i=p'-1$, et sont par conséquent nulles encore, puisque p' est pair. En résumé on a :

1°. p et h étant premiers entre eux,

$$\left.\begin{array}{ll}
p = 2q, & \sum \sin\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p} = \sum\cos\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p} = 0,\\
p = 4q+1, & \sum \sin\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p} = (h,p)\sqrt{p}\,\sin q\frac{h\pi}{p},\\
 & \sum \cos\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p} = (h,p)\sqrt{p}\,\cos q\frac{h\pi}{p},\\
p = 4q-1, & \sum \sin\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p} = (h,p)\sqrt{p}\,\cos q\frac{h\pi}{p},\\
 & \sum \cos\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p} = (h,p)\sqrt{p}\,\sin q\frac{h\pi}{p};
\end{array}\right\}\ (p)$$

2°. p et h ayant pour plus grand commun diviseur d, $p=p'd$, $h=h'd$,

$$p' \text{ pair},\quad \sum \sin\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p}=\sum\cos\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p}=0,$$

$$p' \text{ impair},\quad \sum \sin\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p}=d\sum\sin\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h'\pi}{p'},$$

$$\sum \cos\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p}=d\sum\cos\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h'\pi}{p'},$$

les premières sommes étant prises de $i=0$ à $i=p-1$, et les autres de $i=0$ à $i=p'-1$.

Dans les équations (p) relatives au cas de p impair, si l'on change h en $8h$, l'arc $\frac{i^2+i}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p}$ deviendra $[(2i+1)^2-1]\frac{2h\pi}{p}$, et $q\frac{h\pi}{p}$ se changera en $(p\mp 1)\frac{2h\pi}{p}$, puisque l'on a $p=4q\pm 1$. De plus, il est très facile de voir qu'on a entre les limites $i=0$ et $i=p-1$,

$$\sum\sin(2i+1)^2\frac{2h\pi}{p}=\sum\sin i^2\frac{2h\pi}{p},\quad \sum\cos(2i+1)^2\frac{2h\pi}{p}=\sum\cos i^2\frac{2h\pi}{p};$$

de sorte qu'on trouve, en développant les équations (p) pour le cas de $p=4q+1$,

$$\cos\frac{2h\pi}{p}\sum\sin i^2\frac{2h\pi}{p}-\sin\frac{2h\pi}{p}\sum\cos i^2\frac{2h\pi}{p}=-(8h,p)\sqrt{p}\sin\frac{2h\pi}{p},$$

$$\cos\frac{2h\pi}{p}\sum\cos i^2\frac{2h\pi}{p}+\sin\frac{2h\pi}{p}\sum\sin i^2\frac{2h\pi}{p}=(8h,p)\sqrt{p}\cos\frac{2h\pi}{p};$$

d'où l'on tire

$$\sum\sin i^2\frac{2h\pi}{p}=0,\qquad \sum\cos i^2\frac{2h\pi}{p}=(8h,p)\sqrt{p}.$$

Pour le cas de $p=4q-1$, on trouve de même

$$\cos\frac{2h\pi}{p}\sum\sin i^2\frac{2h\pi}{p}-\sin\frac{2h\pi}{p}\sum\cos i^2\frac{2h\pi}{p}=(8h,p)\sqrt{p}\cos\frac{2h\pi}{p},$$

$$\cos\frac{2h\pi}{p}\sum\cos i^2\frac{2h\pi}{p}+\sin\frac{2h\pi}{p}\sum\sin i^2\frac{2h\pi}{p}=(8h,p)\sqrt{p}\sin\frac{2h\pi}{p};$$

d'où l'on tire

$$\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = (8h,p)\sqrt{p}, \quad \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = 0.$$

Dans ces formules on peut remplacer $(8h,p)$ par $(2h,p)$. En effet, d'après la notation précédente on a

$$2^{\frac{p-1}{2}} \sin\frac{2h\pi}{p} \sin 2\frac{2h\pi}{p} \ldots \sin\frac{p-1}{2}.\frac{2h\pi}{p} = (2h,p)\sqrt{p};$$

de plus, si dans l'hypothèse de $p = 4q+1$, pour lequel le premier membre de l'équation précédente renferme $\frac{p-1}{2} = 2q$ facteurs sinus, on transforme les q derniers au moyen de l'équation

$$\sin\left(\frac{p-1}{2} - i\right)\frac{2h\pi}{p} = \sin\left[h\pi - (2i+1)\frac{h\pi}{p}\right] = (-1)^{h+1}\sin(2i+1)\frac{h\pi}{p},$$

il prendra la forme

$$2^{\frac{p-1}{2}} \sin\frac{h\pi}{p} \sin 2\frac{h\pi}{p} \ldots \sin\frac{p-1}{2}.\frac{h\pi}{p}(-1)^{\overline{h+1}.q},$$

ou bien encore

$$(h,p)\sqrt{p}.(-1)^{\overline{h+1}.q},$$

d'où, par conséquent, l'équation

$$(2h,p) = (h,p)(-1)^{\overline{h+1}.q}.$$

Pour le cas de $p = 4q-1$, ou $\frac{p-1}{2} = 2q-1$, il suffira de transformer les $q-1$ derniers facteurs du premier membre de l'équation dont le deuxième membre est $(2h,p)\sqrt{p}$, et l'on obtiendra ainsi

$$(2h,p) = (h,p)(-1)^{\overline{h+1}.\overline{q-1}}.$$

Si dans ces équations on change successivement h en $2h$ et $4h$, on trouvera pour $p = 4q+1$,

$$(4h,p) = (2h,p)(-1)^q, \quad (8h,p) = (4h,p)(-1)^q,$$

d'où
$$(8h, p) = (2h, p).$$

On obtient la même équation pour $p = 4q - 1$.

Le changement de $(8h, p)$ en $(2h, p)$ donne les valeurs des sommes $\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p}$, $\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p}$, sous une forme que nous retrouverons plus loin. De plus, dans le cas de p premier, $(2h, p)$ est $+1$ pour h résidu quadratique de p, et -1 pour h non-résidu quadratique de p; ainsi l'on pourra, en employant la notation de Legendre, remplacer $(2h, p)$ par $\left(\frac{h}{p}\right)$.

Pour prouver l'assertion précédente, partageons la série $1, 2, 3 \ldots p-1$ en deux autres :

1°. les résidus quadratiques $a, a', a'' \ldots a^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}$;

2°. les non-résidus quadratiques $b, b', b'' \ldots b^{\left(\frac{p-1}{2}\right)}$.

Il suit des premières notions sur les résidus, que h étant résidu, la suite des nombres
$$1.h,\ 2^2h,\ 3^2h, \ldots (p-1)^2h,$$
divisés par p, produit la suite des résidus
$$a,\ a',\ a'', \ldots a^{\left(\frac{p-1}{2}\right)},$$
chacun se trouvant répété deux fois, et que h étant non-résidu, on a, au contraire, la suite
$$b,\ b',\ b'', \ldots b^{\left(\frac{p-1}{2}\right)},$$
chaque non-résidu étant répété deux fois.

Les sommes
$$\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = \sum \sin \frac{i^2 h}{p} 2\pi,$$
$$\sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = \sum \cos \frac{i^2 h}{p} 2\pi,$$
ne peuvent donc prendre que deux valeurs ± 0, $\pm \sqrt{p}$. Or les valeurs

$+0$ et $+\sqrt{p}$ répondant évidemment au cas de $h=1$, répondent au cas de h résidu; il reste à démontrer que pour le cas de h non-résidu on a nécessairement des valeurs de signe contraire.

L'équation $\quad x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x^2+x+1=0$

donne nécessairement

$$\sum \cos i\frac{2h\pi}{p} + \sum \sin i\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1} = -1,$$

ou bien encore

$$1+\sum \cos i\frac{2h\pi}{p} = 0, \quad \sum \sin i\frac{2h\pi}{p} = 0.$$

Or h, $2h$, $3h$,... $\overline{p-1}.h$ divisés par p, donnent la suite $1,2,3,\ldots p-1$, ou bien l'ensemble des deux suites a, a', a'',... b, b', b'',... on a donc

$$1+\sum \cos a\frac{2h\pi}{p}+\sum \cos b\frac{2h\pi}{p}=0,$$
$$\sum \sin a\frac{2h\pi}{p}+\sum \sin b\frac{2h\pi}{p}=0.$$

1°. Soit $\quad p=4q+1,$

on a $\quad 1+2\sum \cos a\frac{2h\pi}{p}=(2h,\ p)\sqrt{p};$

donc

$$\sum \cos a\frac{2h\pi}{p}-\sum \cos b\frac{2h\pi}{p}=\sum \cos ah\frac{2\pi}{p}-\sum \cos bh\frac{2\pi}{p}=(2h,\ p)\sqrt{p}.$$

Le changement de h en non-résidu ne fait que changer le signe du premier membre, donc il changera aussi celui de $(2h, p)$.

2°. Pour $\quad p=4q-1,$

on a l'équation $\quad 2\sum \sin a\frac{2h\pi}{p}=(2h,\ p)\sqrt{p},$

d'où

$$\sum \sin a\frac{2h\pi}{p}-\sum \sin b\frac{2h\pi}{p}=(2h,p)\sqrt{p},$$

qui conduit à la même conséquence.

Ainsi pour h résidu quadratique, on a

$$(2h, p) = +1 = \left(\frac{h}{p}\right),$$

et pour h non-résidu quadratique, on a

$$(2h, p) = -1 = \left(\frac{h}{p}\right).$$

On en peut voir une autre démonstration à l'endroit cité du troisième volume du *Journal de Mathématiques*.

II.

Dans ce paragraphe, nous retrouverons les valeurs précédentes de $\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p}$, $\sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p}$ par le moyen de la sommation de certaines séries, que M. Jacobi a données sans démonstration, à la page 186 de ses *Fundamenta nova Functionum ellipticarum*. Nous obtiendrons ainsi les sommes pour le cas de p pair, qu'il serait peut-être difficile de déduire du paragraphe précédent.

Considérons les deux suites

$$(n)\left\{\begin{aligned} \theta(z^2) &= 1 - q\frac{1-z^2}{1-q^2} + q^4\frac{1-z^2 . 1-q^2z^2}{1-q^2 . 1-q^4} + \ldots \pm q^{m^2}\frac{1-z^2 . 1-q^2z^2 \ldots 1-q^{2m-2}z^2}{1-q^2 \ldots 1-q^{2m}} + \ldots, \\ \varphi(z^2) &= q - q^4\frac{1-z^2}{1-q^2} + q^9\frac{1-z^2 . 1-q^2z^2}{1-q^2 . 1-q^4} \pm q^{(m+1)^2}\frac{1-z^2 . 1-q^2z^2 \ldots 1-q^{2m-2}z^2}{1-q^2 . 1-q^4 \ldots 1-q^{2m}}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$f(z) = \theta(z^2) + \frac{z}{q}\varphi(z^2),$$

on trouvera facilement cette équation de définition

$$f(z) = (1+z)f(qz).$$

On a en effet

$$(1+z)f(qz) = \theta(q^2z^2) + z^2\varphi(q^2z^2) + z[\theta(q^2z^2) + \varphi(q^2z^2)],$$

puis

$$\theta(z^2) = \theta(q^2z^2) + z^2\varphi(q^2z^2), \quad \frac{1}{q}\varphi(z^2) = \theta(q^2z^2) + \varphi(q^2z^2),$$

d'où l'équation $f(z)=(1+z)f(qz)$, qui donne de suite

$$(q)\qquad f(z)=f(q^m z)(1+z)(1+qz)(1+q^2z)\ldots(1+q^{m-1}z).$$

Pour $m=\infty$ et $q<1$, on aura donc

$$f(z)=f(0)(1+z)(1+qz)(1+q^2z)\ldots,$$

en admettant qu'aucun facteur du second membre ne soit nul et que $f(z)$ reste convergente quand on y remplace z par z, qz, $q^2z\ldots$

Comme la supposition $z=1$ donne $f(z)=2$, il en résultera

$$1=f(0)(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots,$$

et par conséquent l'élimination de $f(0)$ donnera

$$(r)\qquad f(z)=\frac{1+z}{1+q}\cdot\frac{1+qz}{1+q^2}\cdot\frac{1+q^2z}{1+q^3}\ldots,$$

Si dans cette formule on change z en $-z$, on obtiendra $f(-z)$, et comme l'on a

$$f(z)+f(-z)=2\,\theta(z^2),\quad f(z)-f(-z)=2\frac{z}{q}\varphi(z^2).$$

il en résultera

$$(s)\begin{cases}\theta(z^2)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1+z}{1+q}\cdot\dfrac{1+qz}{1+q^2}\cdot\dfrac{1+q^2z}{1+q^3}\ldots+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-z}{1+q}\cdot\dfrac{1-qz}{1+q^2}\cdot\dfrac{1-q^2z}{1+q^3}\ldots,\\[2ex] \varphi(z^2)=\dfrac{q}{2z}\cdot\dfrac{1+z}{1+q}\cdot\dfrac{1+qz}{1+q^2}\cdot\dfrac{1+q^2z}{1+q^3}\ldots-\dfrac{q}{2z}\cdot\dfrac{1-z}{1+q}\cdot\dfrac{1-qz}{1-q^2}\cdot\dfrac{1-q^2z}{1-q^3}\ldots,\end{cases}$$

formules données par M. Jacobi.

La supposition $z=q$ réduit la première à

$$1-q+q^4-q^9+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{1-q}{1+q}\cdot\frac{1-q^2}{1+q^2}\cdot\frac{1-q^3}{1+q^3}\ldots\ldots,$$

ou bien encore

$$\frac{1-q}{1+q}\cdot\frac{1-q^2}{1+q^2}\cdot\frac{1-q^3}{1+q^3}\ldots=1-2q+2q^4-2q^9+2q^{16}\ldots\pm 2q^{m^2}\mp\ldots$$

qui, par le changement du signe de q devient

$$(t)\quad \frac{1+q}{1-q}\cdot\frac{1+q^2}{1-q^2}\cdot\frac{1+q^3}{1-q^3}\ldots = 1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}\ldots+2q^{m^2}+\ldots,$$

qui conduit à divers théorèmes sur les nombres carrés.

Nous examinerons ici le cas particulier où le nombre de termes des fonctions $\theta(z^2)$ et $\varphi(z^2)$ devient limité, ce qui arrive pour $z=\pm q^{-m}$.

Dans cette supposition l'équation (q) devient

$$(u)\left\{\begin{aligned} &1-q\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}+q^4.\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}.\frac{1-q^{-2m+2}}{1-q^4}+\ldots\pm q^{m^2}\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}.\frac{1-q^{-2m+2}}{1-q^4}\ldots\frac{1-q^{-2}}{1-q^{2m}}\\ &\pm q^{-(m+1)}\left[q-q^4\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}+q^9.\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}.\frac{1-q^{-2m+2}}{1-q^4}+\ldots\pm q^{(m+1)^2}\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}.\frac{1-q^{-2m+2}}{1-q^4}\ldots\frac{1-q^{-2}}{1-q^{2m}}\right]\\ &=f(\pm 1)(1\pm q^{-m})(1\pm q^{-m+1})\ldots(1\pm q^{-1}),\end{aligned}\right.$$

et par le changement de signe de q

$$(v)\left\{\begin{aligned} &1+q\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}+q^4.\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}.\frac{1-q^{-2m+2}}{1-q^4}+\ldots+q^{m^2}\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}\ldots\frac{1-q^{-2}}{1-q^{2m}}\\ &\pm(-1)^m q^{-(m+1)}\left[q+q^4\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}+q^9.\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}.\frac{1-q^{-2m+2}}{1-q^4}+\ldots+q^{(m+1)^2}\frac{1-q^{-2m}}{1-q^2}\ldots\frac{1-q^{-2}}{1-q^{-2m}}\right]\\ &=(1\pm 1)(1\mp q^{-1})(1\pm q^{-2}q)\ldots(1\pm q^{-m}),\end{aligned}\right.$$

car $f(\pm 1)=1\pm 1$.

Si dans cette équation on pose $m+1=p$, elle deviendra, pour le cas de p impair, en prenant le signe supérieur et supposant de plus $q^{m+1}=q^p=1$:

$$1+q+q^4+\ldots+q^{(p-1)^2}=(1-q^{-1})(1+q^{-2})\ldots[1+q^{-(p-1)}].$$

Il est à remarquer que

$$q=\cos\frac{2h\pi}{p}+\sin\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1}$$

donne

$$q^{2k}=\cos\frac{4hk\pi}{p}+\sin\frac{4hk\pi}{p}\sqrt{-1},$$

et par conséquent dans la supposition de h premier à p, on ne pourra avoir $q^{2k}=1$, qu'en posant $k=p=m+1$, ainsi l'équation (u) ne prend pas de dénominateurs nuls et l'indétermination ne s'introduit point.

Si l'on observe que

$$(1 \pm q^{-i})[1 \mp q^{-(p-i)}] = 1 \mp q^{-(p-i)} \pm q^{-i} - q^{-p} = \pm(q^{-i} - q^{i}),$$

le signe supérieur étant pour i pair et l'inférieur pour i impair, on aura

$$1+q+q^4+\ldots+q^{(p-1)^2} = (q^1-q^{-1})(q^{-2}-q^{+2})\ldots\left(q^{\pm\frac{p-1}{2}} - q^{\mp\frac{p-1}{2}}\right),$$

qui pour le cas de $p = 4q + 1$ se réduit à

$$\sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} + \sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = 2^{\frac{p-1}{2}} \sin \frac{2h\pi}{p} \sin 2\frac{2h\pi}{p} \ldots \sin \frac{p-1}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} = (2h, p)\sqrt{p},$$

et pour celui de $p = 4q - 1$ à

$$\begin{aligned} \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} + \sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} \sqrt{-1} &= \sqrt{-1} \cdot 2^{\frac{p-1}{2}} \sin \frac{2h\pi}{p} \ldots \sin \frac{p-1}{2} \cdot \frac{2h\pi}{p} \\ &= \sqrt{-1} \cdot (2h, p)\sqrt{p}, \end{aligned}$$

comme on le trouve de suite au moyen de la formule

$$q^n - q^{-n} = 2\sqrt{-1} \cdot \sin n \frac{2h\pi}{p}.$$

De là se déduisent les valeurs de $\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p}$ et $\sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p}$ données plus haut.

Maintenant, dans l'équation (u) posons $m + 1 = p$ et encore impair et $q^{m+1} = -1$: en prenant le signe inférieur, on trouvera

$$1 + q + q^4 + \ldots + q^{(p-1)^2} = 0.$$

D'ailleurs, comme $q^p = -1$ donne $q^{2p} = 1$ et $q = \cos \frac{h\pi}{p} + \sin \frac{h\pi}{p}\sqrt{-1}$, on verra encore que dans l'hypothèse de h impair (premier à $2p$) on ne peut avoir $q^{2k} = 1$ sans avoir k multiple de p ; ainsi aucun des dénominateurs de l'équation (s) ne devient nul : on a

$$\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{2p} = \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = 0,$$

les sommes étant prises de $i=0$ à $i=p-1$; en les doublant on aurait les mêmes sommes prises de $i=0$ à $i=2p-1$.

Le nombre $2p$ est de forme $4q+2$; on voit donc que pour $p=4q+2$, on a

$$\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = 0,$$

les sommes étant prises de 0 à $p-1$.

On peut parvenir directement à ce résultat, en considérant la somme

$$1+q+q^4+\ldots+q^{(p-1)^2},$$

car en posant

$$q=\cos\frac{2h\pi}{p}+\sin\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1},$$

il en résulte

$$q^{\frac{p}{2}}=\cos h\pi+\sin h\pi.\sqrt{-1}=-1,$$

dans l'hypothèse de p pair et h impair.

Mais

$$q^{\left(\frac{p}{2}+i\right)^2}=q^{\left(\frac{p}{2}\right)^2}q^{pi}q^{i^2}=(-1)^{h.\frac{p}{2}}q^{i^2},$$

on a donc

$$1+q+q^4+\ldots+q^{(p-1)^2}=\left[1+q+q^4\ldots+q^{\left(\frac{p}{2}-1^2\right)}\right]\left[1+(-1)^{h\frac{p}{2}}\right].$$

Si $\frac{p}{2}$ est impair aussi bien que h, le facteur $1+(-1)^{h.\frac{p}{2}}$ deviendra nul, et l'on aura, comme on l'a déjà trouvé,

$$\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = 0.$$

Dans tout autre cas, les sommes $\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p}$, $\sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p}$ prises de 0 à $p-1$ sont doubles des mêmes sommes prises de 0 à $\frac{p}{2}-1$.

Supposons enfin $m+1=p$ pair et posons $q^{m+1}=-1=q^p$; en prenant le signe supérieur, nous aurons

$$1+q+q^4+\ldots+q^{(p-1)^2}=(1-q^{-1})(1+q^{-2})(1+q^{-3})\ldots[1+q^{-(p-1)}],$$

ici $\quad q^{2p}=1, \qquad$ d'où

$$q=\cos\frac{2h\pi}{2p}+\sin\frac{2h\pi}{2p}\sqrt{-1},$$

et l'on voit encore qu'en prenant h premier à p, l'indétermination n'est pas à craindre.

Pour transformer le second membre, on remarquera que

$$(1\pm q^{-i})[1\pm q^{-(p-i)}]=\pm q^{-i}\pm q^{-p+i}=\pm(q^{-i}-q^{i}),$$

le signe supérieur étant pour i pair et l'inférieur pour i impair, si l'on pose $p=2p'$, il faudra avoir égard au facteur moyen $1\pm q^{p'}$ et comme

$$q^{-p'}=\cos\frac{h\pi}{2}-\sin\frac{h\pi}{2}\sqrt{-1}-(-1)^{\frac{h-1}{2}}\sqrt{-1},$$

on trouvera, réduction faite, pour $2p=4p'=8p''+4$,

$$\sum\cos i^2\frac{2h\pi}{2p}+\sum\sin i^2\frac{2h\pi}{2p}\sqrt{-1}=2^{\frac{p}{2}}\sin\frac{2h\pi}{2}\sin 2\frac{2h\pi}{p}\ldots$$
$$\ldots\sin\frac{p}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p}\left[(-1)^{\frac{h-1}{2}}+\sqrt{-1}\right],$$

en doublant les deux membres, pour prendre les sommes de 1 à $2p-1$.

Pour $2p=4p'=8p''$, on trouvera de même

$$\sum\cos i^2\frac{2h\pi}{2p}+\sum\sin i^2\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1}=2^{\frac{p}{2}}\sin\frac{2h\pi}{2p}\sin 2\frac{2h\pi}{2p}\ldots$$
$$\ldots\sin\frac{p}{2}\cdot\frac{2h\pi}{p}\left[1+(-1)^{\frac{h-1}{2}}\sqrt{-1}\right].$$

Maintenant prenons l'équation $x^p-1=0$, ou plutôt en divisant par x^2-1,

$$x^{p-2}+x^{p-4}+\ldots+x^2+1=\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{p}-1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{p}+1\right)\ldots$$
$$\ldots\left[x^2-2x\cos\frac{2\left(\frac{p}{2}-1\right)\pi}{p}+1\right];$$

la substitution $x=1$ donnera

$$\frac{1}{2}p=2^{p-2}\sin^2\frac{\pi}{p}\sin^2 2\frac{\pi}{p}\sin^2 3\frac{\pi}{p}\ldots\sin^2\frac{p}{2}-1\frac{\pi}{p},$$

Multipliant le second membre par $\sin^2\frac{p}{2}.\frac{\pi}{p}=1$, puis par 4 les deux membres, et extrayant la racine carrée, il viendra, à cause de $\frac{\pi}{p}=\frac{2\pi}{2p}$,

$$\sqrt{2p}=2^{\frac{p}{2}}\sin\frac{2\pi}{2p}\sin 2\frac{2\pi}{2p}\sin 3\frac{2\pi}{2p}\ldots\sin\frac{p}{2}.\frac{2\pi}{2p}.$$

Si l'on change π en πh, ce qui évidemment introduit le facteur (h,p), pour $p=4q+1$, on trouve

$$\sum\cos i^2\frac{2h\pi}{2p}+\sum\sin i^2\frac{2h\pi}{2p}\sqrt{-1}=(h,p)\left[(-1)^{\frac{h-1}{2}}+\sqrt{-1}\right]\sqrt{2p},$$

d'où l'on tire

$$\sum\sin i^2\frac{2h\pi}{2p}=(h,p)\sqrt{2p},$$
$$\sum\cos i^2\frac{2h\pi}{p}=(h,p)(-1)^{\frac{h-1}{2}}\sqrt{2p};$$

et pour $p=4q-1$

$$\sum\cos i^2\frac{2h\pi}{2p}+\sum\sin i^2\frac{2h\pi}{2p}\sqrt{-1}=(h,p)\left[1+(-1)^{\frac{h-1}{2}}\sqrt{-1}\right]\sqrt{2p},$$

d'où l'on tire

$$\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{2p} = (h, p)(-1)^{\frac{h-1}{2}} \sqrt{2p},$$
$$\sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{2p} = (h, p)\sqrt{2p}.$$

Pour le cas de $h = 1$, on a $(-1)^{\frac{h-1}{2}} = 1$, et (h, p) égale 1, comme on l'a vu plus haut; on a donc dans ce cas

$$\sum \sin i^2 \frac{2\pi}{2p} = \sum \cos i^2 \frac{2\pi}{2p} \sqrt{2p},$$

$2p$ étant un nombre pair divisible par 4. Ce qui s'accorde avec les résultats connus.

On voit donc par quelle règle on peut fixer le signe des deux sommes dans tous les cas possibles, h étant premier à p. Dans le cas où h et p auraient d pour plus grand commun diviseur, en posant $h = dh'$, $p = dp'$, $i = kp' + i'$, l'arc $i^2 \frac{2h\pi}{p}$ devenant $(k^2p'^2 + 2kp'i' + i'^2)\frac{2h'\pi}{p'}$ pourra se réduire à $i'^2 \frac{2h'\pi}{p'}$ et l'on aura

$$\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = d \sum \sin i^2 \frac{2h'\pi}{p'},$$

la première somme étant prise de $i = 0$ à $i = p - 1$ et la deuxième de $i = 0$ à $i = p'$. La même chose a lieu pour toutes les sommes analogues.

On a donc, par ce qui précède, les sommes

$$\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p}, \quad \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p},$$

quels que soient h et p, et comme $\sin^m z$ et $\cos^m z$ s'expriment au moyen des sinus et cosinus des arcs multiples, on pourra former immédiatement les valeurs générales des sommes

$$\sum \sin^m i^2 \frac{2h\pi}{p}, \quad \sum \cos^m i^2 \frac{2h\pi}{p},$$

pour toutes les valeurs de h et p.

On pourrait aussi former les sommes

$$\sum \sin^m \frac{i^2 + i}{2} . \frac{2h\pi}{p}, \quad \sum \cos^m \frac{i^2 + i}{2} . \frac{2h\pi}{p},$$

mais elles seraient moins simples à cause des lignes trigonométriques qui s'introduisent dans le résultat.

Nous allons donner, pour le cas de p premier, les formules

$$\sum \sin^m i^2 \frac{2h\pi}{p} \quad \text{et} \quad \sum \cos^m i^2 \frac{2h\pi}{p}.$$

III.

Nous venons de voir que si l'on représente par p un nombre premier qui ne divise pas h, on a, pour $p = 4q + 1$,

$$\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = 0, \quad \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = \left(\frac{h}{p}\right)\sqrt{p},$$

et pour $p = 4q - 1$,

$$\sum \sin i^2 \frac{2h\pi}{p} = \left(\frac{h}{p}\right)\sqrt{p}, \quad \sum \cos i^2 \frac{2h\pi}{p} = 0,$$

ces sommes étant prises depuis $i = 0$ jusqu'à $i = p - 1$, et $\left(\frac{h}{p}\right)$ représentant $+1$ quand h est résidu quadratique de p, et -1 quand h est non-résidu quadratique de p.

De ces formules de M. Gauss on déduit de suite les formules analogues pour les sommes des mêmes puissances : il suffit de remarquer qu'en posant $(1 + 1)^m = 1 + M_1 + M_2 + \ldots + M_m$, de sorte que 1, M_1, M_2, etc., soient les coefficients binomiaux $1, \frac{m}{1}, \frac{m.m-2}{1.2}$, etc., on a pour m pair

$$2^{m-1}\cos^m z = \cos mz + M_1\cos(m-2)z + M_2\cos(m-4)z + \ldots + \frac{1}{2}M_{\frac{m}{2}}\cos 0.z,$$

$$(-1)^{\frac{m}{2}}\, 2^{m-1}\sin^m z = \cos mz - M_1\cos(m-2)z + m_2\cos(m-4)z - \ldots \pm \frac{1}{2}M_{\frac{m}{2}}\cos 0.z;$$

et pour m impair

$$2^{m-1}\cos^m z = \cos mz + M_1\cos(m-2)z + M_2\cos(m-4)z + \ldots + M_{\frac{m-1}{2}}\cos z,$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}\, 2^{m-1}\sin^m z = \sin mz - M_1\sin(m-2)z + M_2\sin(m-4)z - \ldots \pm M_{\frac{m-1}{2}}\sin z,$$

qui, au moyen des formules précédentes, donnent immédiatement, dans le cas de $p=4q+1$, 1° pour m pair

$$2^{m-1}\sum \cos^m i^2 \frac{2h\pi}{p} = \left[\left(\frac{mh}{p}\right)+M_1\left(\frac{m-2.h}{p}\right)+\ldots+M_{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{2h}{p}\right)+\frac{1}{2}M_{\frac{m}{2}}\sqrt{p}\right]\sqrt{p},$$

$$(-1)^{\frac{m}{2}}2^{m-1}\sum \sin^m i^2 \frac{2h\pi}{p} = \left[\left(\frac{mp}{2}\right)-M_1\left(\frac{m-2.h}{p}\right)+\ldots\mp M_{\frac{m-1}{2}-1}\left(\frac{2h}{p}\right)\pm\frac{1}{2}M_{\frac{m}{2}}\sqrt{p}\right]\sqrt{p},$$

et pour le cas de m impair

$$2^{m-1}\sum \cos^m i^2 \frac{2h\pi}{p} = \left[\left(\frac{mh}{p}\right)+M_1\left(\frac{m-2.h}{p}\right)+M_2\left(\frac{m-4.h}{p}\right)+\ldots+M_{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{h}{p}\right)\right]\sqrt{p},$$

$$(-1)^{\frac{m-2}{2}}2^{m-1}\sum \sin^m i^2 \frac{2h\pi}{p} = 0;$$

2°. Pour $p=4q-1$, et m pair

$$2^{m-1}\sum \sin^m i^2 \frac{2h\pi}{p} = 2^{m-1}\sum \cos^m i^2 \frac{2h\pi}{p} = \frac{1}{2}pM_{\frac{m}{2}},$$

et pour m impair

$$2^{m-1}\sum \cos^m i^2 \frac{2h\pi}{p} = 0,$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}2^{m-1}\sum \sin^m i^2 \frac{2h\pi}{p} = \left[\left(\frac{mh}{p}\right)-M_1\left(\frac{m-2.h}{p}\right)+M^2\left(\frac{m-h.h}{p}\right)\ldots\pm M_{\frac{m-1}{2}}\right]\sqrt{p}.$$

Au moyen de ces formules on trouvera très facilement les équations dont les racines sont les sinus ou cosinus des arcs $a\frac{2\pi}{p}$, $a'\frac{2\pi}{p}$, $a''\frac{2\pi}{p}$, etc., en représentant par a, a', a'', etc., les résidus quadratiques de p, et de même celles dont les racines sont les sinus ou cosinus des arcs $b\frac{2\pi}{p}$, $b'\frac{2\pi}{p}$, $b''\frac{2\pi}{p}$, etc., en représentant par b, b', b'', etc., les non-résidus quadratiques de p.

Pour l'équation au sinus, comme deux valeurs de i^2 donnent le même résidu, il faudra diviser les sommes par 2; et comme i^2h est résidu ou non-résidu quadratique en même temps que h, on voit que le changement du signe de $\sqrt{p}$ suffit pour passer de l'équation relative aux arcs $a\frac{2\pi}{p}$, $a'\frac{2\pi}{p}$, etc., à celle relative aux arcs $b\frac{2\pi}{p}$, $b'\frac{2\pi}{p}$, etc.

Pour l'équation au cosinus, à cause de la racine $\cos o\frac{2\pi}{p} = 1$, il faudra diminuer les sommes de l'unité, puis les diviser par 2. D'ailleurs le passage d'une équation à l'autre se fera par le changement de signe du radical $\sqrt{p}$, si ce n'est pour le cas de $p = 4q - 1$, car le radical ne se présente point dans les sommes de racines; en voici la raison.

Pour ce cas, quand a est résidu, $-a$ ou $p - a$ est non-résidu. Or la série des nombres

$$o.h, \quad 1.h, \quad 4.h, \quad 9.h, \ldots (p-1)^2h,$$

quand on en retranche les multiples de p, ce qui n'altère point la valeur des lignes trigonométriques de l'arc $i^2\frac{2h\pi}{p}$, revient à

$$\begin{array}{llll} o, & ah, & a'h, & a''h\ldots, \\ & ah, & a'h, & a''h,\ldots; \end{array}$$

car chaque résidu se répète deux fois. Or quand on change le signe des arcs, les cosinus ne changent pas : on peut donc remplacer la seconde ligne par

$$(p-a)h, \quad (p-a')h, \quad (p-a'')h, \quad \text{etc.},$$

ou par

$$bh, \quad b'h, \quad b''h\ldots$$

On a donc la suite complète

$$o, \; h, \; 2h, \; 3h\ldots(p-1)h,$$

et comme h est premier à p, on peut la remplacer par

$$o, \; 1, \; 2, \; 3\ldots p-1,$$

de sorte que l'équation à laquelle on parvient n'est autre que celle dont les racines sont

$$\cos o\frac{2\pi}{p},\ \cos\frac{2\pi}{p},\ \cos 2\frac{2\pi}{p},\ \cos 3\frac{2\pi}{p}\ldots\cos(p-1)\frac{2\pi}{p},$$

équation connue à coefficients rationnels.

Ainsi donc, le cas précédent excepté, si l'on représente par

$$x^{p-1}+A_1x^{p-2}+\ldots Px+Q=0=X$$

l'équation dont les racines sont les sinus ou cosinus des arcs

$$\frac{2\pi}{p},\ 2\frac{2\pi}{p},\ 3\frac{2\pi}{p},\ldots(p-1)\frac{2\pi}{p},$$

la quantité X prendra la forme $Y^2-pZ^2=X$, Y et Z étant des fonctions entières de x.

Ce théorème est analogue à celui relatif à l'équation

$$x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1=X=0.$$

Comme les racines $\cos\frac{2h\pi}{p}+\sin\frac{2h\pi}{p}\sqrt{-1}$ sont de deux sortes : 1° $\cos a\frac{2\pi}{p}+\sin a\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}$, et 2° $\cos b\frac{2\pi}{p}+\sin b\frac{2\pi}{p}\sqrt{-1}$, la somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des premières sera

$$1^\circ.\ \text{pour}\ p=4q+1\ldots\ldots-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{m}{p}\right)\sqrt{p},$$
$$2^\circ.\ \text{pour}\ p=4q-1\ldots\ldots-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{m}{p}\right)\sqrt{-p},$$

et l'on voit de suite que la somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des secondes ne différera des précédentes que par le signe de $\sqrt{p}$. Ainsi, dans le premier cas on trouvera $X=Y^2-pZ^2$, et dans le second $X=Y^2+pZ^2$, ce qui est le théorème de M. Gauss.

La méthode précédente pour le calcul des fonctions Y et Z a été donnée par M. Legendre. Il en résulte que l'emploi du signe $\left(\frac{h}{p}\right)$ permet de trouver des valeurs générales de Y et Z. Pour plus de détails on peut voir le *Journal de Mathématiques*, tome III, page 128.

Pour donner un exemple de l'emploi des formules précédentes, on peut prendre l'équation

$$Z=x^{16}-\frac{17}{4}x^{14}+\frac{119}{16}x^{12}-\frac{221}{32}x^{10}+\frac{935}{256}x^{8}-\frac{561}{512}x^{6}+\frac{357}{2048}x^{4}-\frac{51}{4096}x^{2}+\frac{17}{65536}=0,$$

dont les racines sont les sinus des arcs multiples de $\frac{2\pi}{17}$; or on a en général

$$-2\sum\sin\, a\,\frac{2\pi}{p}=\left[\left(\frac{2}{p}\right)-\sqrt{p}\right],$$
$$8\sum\sin^2 a\,\frac{2\pi}{p}=\left[\left(\frac{4}{p}\right)-4\left(\frac{2}{p}\right)+3\sqrt{p}\right]\sqrt{p},$$
$$-32\sum\sin^3 a\,\frac{2\pi}{p}=\left[\left(\frac{6}{p}\right)-6\left(\frac{4}{p}\right)+15\left(\frac{2}{p}\right)-10\sqrt{p}\right],$$
$$128\sum\sin^4 a\,\frac{2\pi}{p}=\left[\left(\frac{8}{p}\right)-8\left(\frac{6}{p}\right)+28\left(\frac{4}{p}\right)-56\left(\frac{2}{p}\right)+35\sqrt{p}\right]\sqrt{p},$$
etc.;

les sommes des puissances impaires étant nulles, puisque $p=4q+1$. Pour le cas particulier de $p=17$, comme on a

$$\left(\frac{2}{p}\right)=\left(\frac{4}{p}\right)=\left(\frac{8}{p}\right)=1,\ \left(\frac{6}{p}\right)=-1,$$

en représentant pour abréger les sommes des puissances 1^e^, 2^e^, 3^e^... des racines par $\int_1, \int_2, \int_3,\ldots$ il viendra

$$\int_1=\int_3=\int_5=\int_7=0,$$
$$\int_2=\frac{1}{4}(17-\sqrt{17}),\quad \int_6=\frac{1}{32}(17.5-4\sqrt{17}),$$
$$\int_4=\frac{1}{16}(17.3-3\sqrt{17}),\quad \int_8=\frac{1}{256}(17.35-19.17),$$

de sorte que l'équation dont les racines sont les sinus des arcs $a.\frac{2\pi}{17}$ ou

$$1\frac{2\pi}{17},\quad 2\frac{2\pi}{17},\quad 4\frac{2\pi}{17},\quad 8\frac{2\pi}{17},$$

et

$$16\frac{2\pi}{17},\quad 15\frac{2\pi}{17},\quad 13\frac{2\pi}{17},\quad 9\frac{2\pi}{17},$$

sera

$$x^8 - \frac{1}{8}(17 - \sqrt{17})\ x^6 + \frac{1}{32}(3.17 - 7.\sqrt{17})x^4 - \frac{1}{64}(17.2 - 7.\sqrt{17})x^2 + \frac{1}{256}(17 - 4.\sqrt{17}) = 0,$$

comme on le trouve facilement au moyen des relations qui donnent les coefficients d'une équation en fonction des sommes des puissances des racines. Pour cet exemple, on peut consulter le n° 364 des *Recherches arithmétiques* de M. Gauss.

Je finirai ce petit Mémoire en proposant deux problèmes dont je dois dire d'abord que je n'ai pas la solution.

1. Peut-on déduire des équations en $\sin a\frac{2\pi}{p}$ et $\cos a\frac{2\pi}{p}$ (a est un résidu quadratique quelconque), la valeur du produit Π cotang $a\frac{2\pi}{p}$? Pour le cas $p = 4n + 3$, M. Stern donne l'équation $\frac{1}{\sqrt{p}} = \Pi \operatorname{cotang} a\frac{2\pi}{p}$ (Journal de M. Crelle, tome XVII, page 375); cependant le signe est tantôt + et tantôt —; par quelle règle peut-on le fixer?

2. M. Libri dit dans son Mémoire sur les intégrales définies aux différences finies, que la somme $\sum\limits_{x=0}^{x=n} \cos\frac{2x^3\pi}{n}$ peut s'obtenir en fonction de a, le nombre a étant donné par l'équation indéterminée $4n = a^2 + 27b^2$; il suit en effet de la théorie de M. Gauss que

$$\sum_{x=0}^{x=n-1}\left(\cos\frac{2x^3\pi}{p} + \sin\frac{2x^3\pi}{p}\sqrt{-1}\right)$$

est racine de l'équation

$$z^3 - 3pz - na = 0,$$

en supposant a de forme $3a' + 1$, ce qui détermine son signe. Mais il se présente ici une ambiguité du genre de celle qui a lieu pour les sommes $\sum \sin\frac{2x^2\pi}{n}$, $\sum \cos\frac{2x^2\pi}{n}$. On doit fixer le choix de la valeur de z : tant que cela ne sera point fait, la somme $\sum \cos \frac{2x^3\pi}{n}$ ne sera pas déterminée; quant à la somme $\sum \sin \frac{2x^3\pi}{n}$, elle sera toujours nulle. On demande une règle pour fixer le choix de la valeur de z égale à $\sum \cos \frac{2x^3\pi}{n}$? On a $n = 3q + 1$.

On peut proposer une semblable question pour les sommes $\sum \cos \frac{2x^4\pi}{n}$, $\sum \sin \frac{2x^4\pi}{n}$, dans l'hypothèse de $n = 4q + 1$.